Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

Е. А. Сопкина

О СУММЕ КОРНЕЙ ЗАМКНУТОГО МНОЖЕСТВА

Введение

Системы корней и группы Вейля их автоморфизмов естественно возникают при описании полупростых алгебр Ли и их линейных представлений, при классификации простых алгебраических групп. Комбинаторная интерпретация в терминах систем корней позволяет дать ответ на многие вопросы, связанные со структурой алгебр Ли и групп Шевалле.

В частности, замкнутыми подмножествами системы корней параметризуются редуктивные надгруппы максимального расщепимого тора в группе Шевалле и регулярные подалгебры алгебры Ли.

В случае системы типа A_l замкнутые подмножества оказались напрямую связаны с топологиями на конечном множестве. Путем редукции сначала к T_0-топологиям, а потом к V-топологиям З. И. Боревичу [1] удалось подсчитать количество замкнутых множеств в системах типа A_l для $l \leqslant 11$.

Другие системы корней классической серии – B_l, C_l и D_l – устроены значительно сложнее, и потому вопрос об их классификации и даже о редукции к специальным замкнутым множествам остается открытым. Частичные результаты в этом направлении получены Ф. М. Малышевым, см. например [3].

Не менее интересен вопрос о классификации замкнутых подмножеств для исключительных систем корней типа E_6, E_7 и E_8. Ответ на него также неизвестен.

Цель настоящей работы – описание структуры замкнутых множеств. Для этого в работе вводится новый инвариант замкнутого множества, названный направляющим вектором, обобщающий конструкцию, использованную в [7] для классификации замкнутых множеств, дополнение к которым также замкнуто. Направляющий вектор отражает важные особенности структуры замкнутого множества: расположение его симметричной части, размер и расположение специальной части, стабилизирующую его подгруппу в группе Вейля. В терминах направляющего вектора в работе определяются ассоциированные базисы – базисы, в которых замкнутое множество имеет наиболее простой вид. Используя эти понятия, мы получаем новое элементарное доказательство теоремы Шевалле о параболических подмножествах. Центральным результатом является теорема, в которой определяется множество всевозможных значений направляющего вектора. Последняя часть настоящей статьи посвящена “сборке” замкнутого множества из замкнутой подсистемы и специального множества.

1. Предварительные сведения

Везде в дальнейшем Φ – система корней ранга l, $W(\Phi)$ – ее группа Вейля. Фиксируя систему Π фундаментальных корней, мы будем рассматривать вместе с ней множество Φ^+ положительных относительно нее корней и фундаментальную камеру Вейля $C(\Phi^+)$.

Скалярное произведение векторов x и y будем обозначать $\langle x, y\rangle$. Если угол между корнями α и β тупой, т.е. $\langle\alpha,\beta\rangle < 0$, то $\alpha+\beta$ также является корнем.

Как известно, группа Вейля действует на всевозможных системах фундаментальных корней (или, что то же самое, на камерах Вейля) просто-транзитивно. Кроме того, замыкание камеры Вейля $\overline{C(\Phi^+)}$ является фундаментальной областью для группы $W(\Phi)$, действующей на объемлющем пространстве $\mathbb{R}^l$. (Из этого, в частности, следует, что подгруппа в группе $W(\Phi)$, стабилизирующая данный вектор, совпадает с группой Вейля подсистемы корней, ортогональных этому вектору.)

Определение. *Подмножество S системы корней Φ называется* **замкнутым**, *если для любых двух корней α и β, принадлежащих множеству S, сумма которых $\alpha+\beta$ является корнем, $\alpha+\beta$ также лежит в S.*

Примеры. 1. Множество всех положительных корней замкнуто.

2. Пересечение Φ с любым линейным подпространством замкнуто.

Каждое замкнутое множество S является дизъюнктным объединением своей *симметричной* части $S^r = \{\alpha \in S| -\alpha \in S\}$ и своей *специальной* части $S^u = \{\alpha \in S| -\alpha \notin S\}$.

Широко известна следующая лемма.

Лемма 1. 1. *S^r – замкнутая подсистема корней в Φ.*

2. *Для любых корней $\alpha \in S^u$ и $\beta \in S$, сумма $\alpha + \beta$ которых является корнем, $\alpha + \beta$ лежит в S^u.*

Из второй части леммы, в частности, следует, что S^u замкнуто.

В случае, когда $S = S^r$, и соответственно, $S^u = \emptyset$, структура S довольно проста и хорошо изучена. В частности, все замкнутые подсистемы классифицированы в работах Бореля, де Зибенталя [5] и Дынкина [8]. А именно, все замкнутые подсистемы могут быть получены из Φ в результате многократного применения следующей пары операций:

1) для каждой неприводимой составляющей рассматриваемой подсистемы выберем корни, образующие базис, и максимальный корень;

2) из полученного набора корней выберем произвольное подмножество и перейдем к рассмотрению минимального замкнутого множества (оно автоматически будет замкнутой подсистемой), содержащего все эти корни и противоположные к ним.

Определение. *Замкнутые подмножества S и S' системы Φ* **сопряжены**, *если существует такой элемент $w \in W(\Phi)$, что $w(S) = S'$.*

Вопрос о классификации замкнутых множеств – всех или всех с точностью до сопряжения – остается открытым.

2. Направляющий вектор: определение и простейшие свойства

Определение. *Вектор $\xi(S)$, равный сумме всех корней замкнутого множества S, называется* **направляющим вектором**.

Следующая лемма следует непосредственно из определения.

Лемма 2. 1. *$\xi(S) = \xi(S^u)$.*

2. *Все коэффициенты в разложении $\xi(S)$ по базису, состоящему из фундаментальных корней, целые.*

Пример. Рассмотрим замкнутое множество Φ^+, состоящее из всех положительных корней. Для него $\xi(\Phi^+)/2 = \rho$, при этом ρ лежит в фундаментальной камере Вейля, $w_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ и

$\langle\rho,\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$ для любого фундаментального корня α. Подробные доказательства приведены в [2].

Предложение 1. 1. *$\xi(S)$ ортогонален всем корням из S^r.*

2. *Скалярное произведение $\xi(S)$ с любым корнем из S^u положительно.*

Доказательство. 1. Пусть α – произвольный корень из S^r. Заметим, что отражение относительно него оставляет S на месте. Действительно, каждый корень β, лежавший в S, при отражении относительно α переходит в корень $w_\alpha(\beta)$, получающийся из β прибавлением нескольких корней α или $-\alpha$ и, следовательно, лежащий в S. Поэтому и вектор ξ, являющийся суммой корней из S, остается на месте под действием w_α, т.е. перпендикулярен α.

2. Пусть α – произвольный корень из S^u. Сопоставим каждому корню β из S, скалярное произведение которого с α отрицательно, корень $w_\alpha(\beta)$. Т.к. корень $w_\alpha(\beta)$ отличается от β несколькими прибавлениями корня α, он также лежит в S. При этом скалярное произведение корня α с суммой корней β и $w_\alpha(\beta)$ равно нулю. Итак, каждому корню из S, скалярное произведение которого с α отрицательно, мы сопоставили единственный корень из S такой, что скалярное произведение их суммы с α равно нулю, причем разным корням сопоставили разные корни, а корень $-\alpha$ не сопоставили никакому корню, т.к. $-\alpha$ не принадлежит S по определению S^u. Поэтому $\langle\xi(S),\alpha\rangle \geq \langle\alpha,\alpha\rangle > 0$.

Предложение 2. *Пусть S и T замкнутые множества такие, что S^u строго содержится в T^u. Тогда $|\xi(S)| < |\xi(T)|$.*

Доказательство. Пользуясь п. 1 леммы 1, можно считать, что оба множества совпадают со своей специальной частью. Рассмотрим корень $\alpha \in T\backslash S$ такой, что его скалярное произведение с $\xi(S)$ максимально.

Заметим, что множество $S' = S\cup\{\alpha\}$ замкнуто. Действительно, множество S замкнуто, а если сумма корней α и $\beta \in S$ является корнем, то либо $\alpha+\beta \in S$, что согласуется с замкнутостью S', либо $\alpha+\beta \in T\backslash S$, но при этом $\langle\xi(S),\alpha+\beta\rangle = \langle\xi(S),\alpha\rangle + \langle\xi(S),\beta\rangle > \langle\xi(S),\alpha\rangle$, что противоречит максимальности α.

При этом $\langle\xi(S'),\xi(S')\rangle - \langle\xi(S),\xi(S)\rangle = \langle\xi(S'),\xi(S')\rangle - \langle\xi(S')-\alpha,\xi(S')-\alpha\rangle = 2\langle\xi(S'),\alpha\rangle - \langle\alpha,\alpha\rangle \geq \langle\alpha,\alpha\rangle > 0$.

Продолжая таким же образом добавлять к S по одному корню из T, получая на каждом шагу замкнутое множество с все бо́льшим по длине направляющим вектором, мы получим в конце концов все множество T. Отсюда следует требуемое.

3. Сопряженность и ассоциированные базисы

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3. 1. *Если замкнутые множества S и S' сопряжены посредством элемента w, то $w(\xi(S)) = \xi(S')$.*

2. *Так как $S^r \subseteq \xi(S)^\perp \cap \Phi$, $W(S^r) \subseteq X(S) \subseteq X(\xi(S)) = W(\xi(S)^\perp \cap \Phi)$. (Здесь $X(S)$ – "нормализатор", т.е. подгруппа в $W(\Phi)$, оставляющая множество S на месте.)*

Определение. *Базис (или система фундаментальных корней)* Π *называется* **ассоциированным** *с замкнутым множеством S, если $\xi(S) \in \overline{C(\Phi^+)}$.*

Хорошо известно, что для каждого замкнутого множества существует базис, относительно которого все корни специальной части положительны. Индуктивное доказательство этого факта, приведенное в [2], гораздо сложнее, чем получающееся в результате следующего рассуждения в терминах направляющего вектора.

Предложение 3. *В базисе, ассоциированном с S, все корни S^u положительны.*

Доказательство. Из того, что $\xi(S)$ лежит в замыкании фундаментальной камеры Вейля, следует, что скалярное произведение $\xi(S)$ с каждым фундаментальным корнем неотрицательно и, следовательно, с каждым положительным корнем неотрицательно, а с каждым отрицательным корнем неположительно. Используя второй пункт предложения 1, получаем, что среди корней S^u не может быть отрицательных, поэтому S^u состоит из положительных корней.

Следствие. *Координаты $\xi(S)$ в ассоциированном базисе неотрицательны и не превосходят соответствующих координат $\xi(\Phi^+)$.*

Вид замкнутого множества в ассоциированном базисе является в каком-то смысле "каноническим". Например, с множеством, состоящим из одного корня, ассоциированы в точности те базисы, в которых этот корень является максимальным. С параболическим множеством (как будет показано в следующем предложении) ассоциированы те базисы, в которых оно содержит все положительные корни, при этом во всех ассоциированных базисах параболическое множество имеет один и тот же вид. В общем случае замкнутое множество в разных ассоциированных с ним базисах может выглядеть по-разному.

Пример. Замкнутое множество, состоящее из пары ортогональных корней $\alpha_1+\alpha_2$ и $\alpha_2+\alpha_3$, в системе типа A_3, в базисе $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=-\alpha_3$ имеет вид β_2 и $\beta_1+\beta_2+\beta_3$.

Два замкнутых множества S и S' сопряжены посредством элемента $w\in W(\Phi)$ тогда и только тогда, когда в некотором базисе Π S имеет такой же вид, как и S' в базисе $w(\Pi)$. Для каждого $w_1\in W(\Phi)$ такого, что $w_1(\xi(S))=\xi(S')$, элемент w раскладывается в произведение $w=w_2w_1$, где $w_2\in W(\Phi\cap\xi(S')^{\perp})$.

В терминах направляющего вектора можно привести элементарое доказательство следующего факта, известного как теорема Шевалле.

Предложение 4. *Несовпадающие замкнутые множества, содержащие Φ^+, не сопряжены.*

Доказательство. Заметим сначала, что направляющий вектор $\xi(S)$ замкнутого множества S, содержащего Φ^+, лежит в $\overline{C(\Phi^+)}$. Действительно, каждый фундаментальный корень либо лежит в S^u, и тогда скалярное произведение $\xi(S)$ с ним положительно, либо лежит в S^r, и тогда скалярое произведение $\xi(S)$ с ним равно нулю (по предложению 1). Таким образом, если два множества, содержащие Φ^+, сопряжены, то их направляющие векторы совпадают (по п.1 леммы 2 и потому, что $\overline{C(\Phi^+)}$ является фундаментальной областью). Но тогда эти множества совпадают, т.к. совпадают их специальные части (это в точности те положительные корни, скалярное произведение ξ с которыми положительно), и совпадают их симметричные части (это в точности корни, ортогональные ξ).

Из того, что параболическое множество однозначно определяется своим направляющим вектором (и тем, что оно параболическое), следует также, что параболическое множество имеет один и тот же вид во всех ассоциированных с ним базисах.

4. Теорема о значениях направляющего вектора

В этом параграфе мы выясним, какие значения может принимать направляющий вектор $\xi(S)$, когда S пробегает все замкнутые подмножества системы Φ.

Если рассмотреть замкнутое множество S в каком-нибудь из ассоциированных с ним базисов Π, $\xi(S)$ будет лежать в $\overline{C(\Phi^+)}$, коэффициенты $\xi(S)$ в этом базисе будут целыми (по п. 2 леммы 1), неотрицательными и не будут превосходить соответствующие коэффициенты в разложении $\xi(\Phi^+)$ (по следствию из предложения 3). Оказывается, верно и обратное.

Теорема. *Любой вектор с целыми неотрицательными коэффициентами в базисе, состоящем из фундаментальных корней, лежащий в замыкании фундаментальной камеры Вейля не выше вектора $\xi(\Phi^+)$, является направляющим вектором некоторого замкнутого подмножества Φ^+.*

Доказательство. Пусть вектор ξ удовлетворяет условию теоремы. Найдем замкнутое подмножество Φ^+, направляющим вектором которого он является.

Опишем процедуру, которую в дальнейшем будем называть **"сокращение"**:

(a) если некоторый корень не принадлежит рассматриваемому нами конечному семейству корней S, но представляется в виде суммы некоторых двух корней этого семейства, то мы заменяем эти два корня на их сумму;

(b) если семейству S принадлежит пара противоположных корней, убираем их из семейства;

повторяем (a) и (b) до тех пор, пока это возможно (когда-нибудь этот процесс закончится, т.к. после (a) и (b) количество корней в семействе уменьшается).

Перечислим некоторые тривиальные свойства этой процедуры, которые понадобятся нам в дальнейшем:

I. Сумма корней семейства S при "сокращении" не изменяется.

II. Кратность корня при "сокращении" не увеличивается.

III. Подмножество Φ^+ является замкнутым тогда и только тогда, когда оно не изменяется в результате применения к нему "сокращения".

Т.к. ξ имеет целые неотрицательные координаты в базисе, состоящем из фундаментальных корней, и лежит не выше суммы всех положительных корней, он может быть представлен в виде суммы корней семейства, состоящего из всех положительных корней (каждый из которых берется по одному разу) и нескольких корней, противоположных фундаментальным (возможно, кратных). Применим к этому семейству процедуру "сокращение" и получим семейство S, в котором кратными могут быть только корни, противоположные фундаментальным.

Покажем, что семейство S в действительности не содержит отрицательных корней (и, следовательно, состоит из нескольких различных положительных корней).

Предположим противное, пусть в S есть отрицательные корни. Выберем среди них корень x, лежащий не выше каждого из остальных.

Заметим, что скалярное произведение x с любым кратным корнем a семейства S неотрицательно: иначе их сумма $a + x$ тоже является корнем, тоже лежит в семействе S, и т.к. a противоположен фундаментальному, располагается ниже x, что противоречит минимальности x. Рассмотрим множество S', состоящее из всех корней, лежащих в S (т.е. S' состоит из тех же корней, что и S, но среди них нет кратных). По предложению 1 $\langle x, \xi(S')\rangle > 0$.

$$\langle \xi, x\rangle = \langle \xi(S'), x\rangle + (t_1 - 1)\langle a_1, x\rangle + \ldots + (t_l - 1)\langle a_l, x\rangle,$$

где t_i – кратность i-ого кратного корня a_i. Таким образом, $\langle \xi, x\rangle > 0$. Но x – отрицательный корень, и из того, что ξ лежит в $\overline{C(\Phi^+)}$, следует, что $\langle \xi, x\rangle \leq 0$.

Полученное противоречие показывает, что все корни семейства S положительны, различны и образуют замкнутое множество, направляющим вектором которого является ξ. Теорема доказана.

Замечание. Один и тот же вектор может быть направляющим для совершенно разных замкнутых подмножеств Φ^+.

Примеры. 1. В системе типа A_3 замкнутые множества $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}$ и $\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$ имеют одинаковые направляющие векторы. Они являются сопряженными (ср. предыдущий пример).

2. В системе типа A_4 замкнутые множества $\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\}$ и $\{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\}$ имеют одинаковые направляющие векторы, хотя в них разное количество корней.

5. Сборка

Следующее предложение имеет отношение к т.н. "сборке", т.е. помогает ответить на вопрос, для каких пар замкнутых подсистем и специальных замкнутых подмножеств существует такое замкнутое множество, что они являются его симметричной и специальной частями соответственно.

Хотя следующее предложение довольно естественно, оно не встретилось нам в работах, относящихся к этой тематике.

Предложение 5. *Среди всех замкнутых множеств с фиксированной специальной частью есть наибольшее по включению.*

Доказательство. Пусть эта специальная часть – множество S^u. Заметим, что корень α может лежать в некоторой симметричной части S^r в том и только в том случае, если он и противоположный к нему не лежат в S^u и множество $S^u \cup \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}$ замкнуто. В свете леммы 1, достаточно проверить, что все такие корни образуют замкнутую подсистему. Т.е. что для любых двух корней α и β, сумма которых также является корнем, таких, что

$S^u \cup \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}$ и $S^u \cup \{\beta\} \cup \{-\beta\}$ замкнуты, (*)

$S^u \cup \{\alpha+\beta\} \cup \{-\alpha-\beta\}$ также замкнуто.

Предположим противное, т.е. найдется корень $\gamma \in S^u$ такой, что $\gamma+\beta+\alpha$ является корнем, не лежащим в S^u. Рассмотрим замкнутую подсистему Δ в Φ, порожденную корнями α, β и γ. Ранг Δ равен трем, т.к. α, β и γ линейно независимы. Определим $S' = S \cap \Delta$ – замкнутое множество, содержащее γ и не содержащее $\gamma+\beta+\alpha$. Т.к. $\alpha+\beta$ и $\gamma+\beta+\alpha$ являются корнями, лежащими в Δ, система Δ неприводима. Поэтому она одного из типов A_3, B_3 или C_3.

Заметим, что $\alpha+\gamma$ (и, аналогично, $\beta+\gamma$) не может быть корнем, иначе из (*) следует, что $\alpha+\gamma \in S^u$ и $(\alpha+\gamma)+\beta \in S^u$, противоречие.

Хорошо известно, что если скалярное произведение пары корней отрицательно, то их сумма является корнем, а если оно положительно, то в системе типа A_3, B_3 или C_3 их сумма корнем не является. Отсюда сразу же получаем, что $\langle\alpha,\gamma\rangle \geq 0$, $\langle\beta,\gamma\rangle \geq 0$ и $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle \leq 0$. В каждом из этих неравенствах должно достигаться равенство. Заметим, что сумма двух ортогональных корней является корнем только в том случае, если они оба короткие, т.е. $\alpha+\beta$ и γ должны быть короткими. Сумма двух корней является коротким корнем только в том случае, если среди них есть короткий, поэтому среди α и β есть короткий. Но тогда, поскольку рассматриваемая нами система типа B_3 или C_3, сумма этого корня с ортогональным ему коротким корнем γ должна также быть корнем, а как было замечено выше, ни $\alpha+\gamma$, ни $\beta+\gamma$ корнями быть не могут. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Автор выражает признательность Н. А. Вавилову за внимательное чтение рукописи и полезные обсуждения.

Литература

1. З. И. Боревич, *К вопросу перечисления конечных топологий.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 47–65.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* гл. IV–VI, Мир, Москва (1972).
3. Ф. М. Малышев, *О замкнутых подмножествах корней и когомологиях регулярных подалгебр.* — Мат. сб. **104(146)**№1(9) (1977), 140–150.
4. Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли.* Мир, Москва (1969).
5. A. Borel, J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermés connexes de rang maximal de groupes de Lie clos.* — Comm. Math. Helv. **23**, No. 2 (1949), 200–221.
6. R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group.* — Comp. Math. **25**, fasc.1 (1972), 1–59.
7. D. Z. Djoković, P. Check, J.-Y. Hée, *On closed subsets of root systems.* — Canad. Math. Bull. **37** (3) (1994), 338–345.
8. E. B. Dynkin, *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras.* — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **6** (1957), 111–244.
9. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus.* — Commun. Algebra **24**, No. 1 (1996), 109–133.

Sopkina E. A. On the sum of roots of a closed set.

The invariant of closed set which is equal to the sum of roots is introduced. For a closed subset in the root system we describe symmetric and special parts, and its stabilizer in the Weyl group by means of the sum of roots. We define associated bases with respect to which the closed set has the simplest form. All possible values of root sum are determined.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 18 апреля 2002 г.