Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

Е. А. Филиппова

О ПОДГРУППАХ СПИНОРНОЙ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИХ РАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР. III

Введение.

Настоящая работа является продолжением статей Н. А. Вавилова [3, I и II] и переносит основной результат части II этой работы на случай нечетномерных спинорных групп $\mathrm{Spin}\,(2l+1,K)$.

Настоящая работа относится к направлению, связанному с описанием надгрупп максимальных торов и близких к ним подгрупп, которое интенсивно развивалось последние 25 лет. Основополагающую роль в возникновении этого направления сыграла работа З. И. Боревича [1], в которой получено стандартное описание подгрупп в полной линейной группе $\mathrm{GL}\,(n,K)$ над полем K, $|K|\geqslant 7$, содержащих группу диагональных матриц. В дальнейшем в работах Н. А. Вавилова, Е. В. Дыбковой и О. Кинга эти результаты были обобщены на другие классические группы. Ранний этап развития этой теории подробно освещен в обзорах А. Е. Залесского и А. С. Кондратьева [12] и [13, 14]. С точки зрения теории алгебраических групп речь здесь идет об описании надгрупп максимальных торов. В дальнейшем в работах Д. Дьоковича, Г. Зейтца, У. Кантора, В. А. Койбаева, С. Л. Крупецкого, В. П. Платонова и других для некоторых классов полей были описаны надгруппы не обязательно расщепимых максимальных торов. Подробное обсуждение имеющихся здесь результатов и много дальнейших ссылок можно найти также в [4, 5, 17, 15].

В настоящей работе мы продолжаем изучение расположения подгрупп спинорной группы $\mathrm{Spin}\,(n,K)$, содержащих расщепимый максимальный тор. Для четномерного случая эта задача полностью решена в работах Н. А. Вавилова [2, I и II]. Там же доказаны основные леммы, не зависящие от четности n и l. В работах [4] и [5] аналогичный результат анонсирован и для нечетномерной спинорной группы в предположении $\mathrm{char}\,K\neq 2$ и $|K|\geq 13$, однако доказательство для этого случая не публиковалось. Аналогичный результат для *конечного* основного поля доказан в работах Г. Зейтца (см., например, [16]) также в предположении $\mathrm{char}\, K \neq 2$ и $|K| \geq 13$.

В настоящей работе мы показываем, что при условии, что либо $l = 2m$, либо $l = 2m + 1$ и $-1 \in K^{*2}$, проходит та же редукция от нечетномерного случая к четномерному, что и в работах Н. А. Вавилова [3, I и II], и В. Голубовского [6, 7], посвященных подгруппам в ортогональной группе $\mathrm{SO}\,(n, K)$. Сами вычисления в настоящей работе аналогичны вычислениям в цитированных работах, но при этом мы можем использовать только элементы из $\mathrm{Spin}\,(n, K)$, с чем и связано появление дополнительного условия $-1 \in K^{*2}$ в случае $l = 2m + 1$. Без этого дополнительного предположения результат остается справедливым, но для доказательства этого требуются значительно более трудные вычисления, которым будет посвящена следующая работа автора. Отметим, что, кроме того, мы усиливаем результаты статей [3] и [16], понижая требование на поле K до $|K| \geq 9$.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть K – поле характеристики, отличной от 2, содержащее не менее 9 элементов, $l \geq 3$. Положим, что либо $l = 2m$, либо $l = 2m + 1$ и $-1 \in K^{*2}$. Тогда для любой подгруппы X группы $\widetilde{\Gamma} = \mathrm{Spin}\,(2l + 1, K)$, содержащей максимальный расщепимый тор $T(2l+1, K)$, существует единственная ортогональная D-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов в K порядка $2l + 1$ такая, что*

$$\widetilde{\Gamma}(\sigma) \leq H \leq \widetilde{N}_{\Gamma}(\sigma).$$

Заметим, что в самое последнее время Е. В. Дыбкова почти полностью перенесла результаты о надгруппах группы диагональных матриц со случая расщепимых классических групп на *значительно* более общий случай унитарных групп в смысле Бака, отвечающих некоммутативному кольцу, нетривиальной инволюции и произвольному значению форм-параметра (см., например, [8–11] и настоящий сборник). При этом, в частности, снимается условие обратимости 2. Одной из самых важных нерешенных задач в этой области представляется совмещение результатов этих работ с результатами статей [3, I–II], и настоящей работы, т.е. описание надгрупп унитарных групп, содержащих часть группы диагональных матриц, порожденную короткими корневыми полупростыми элементами.

План работы таков. В §1 кратко напоминаются основные используемые понятия и обозначения. В §2 улучшается оценка на число элементов поля в четномерном случае. В §3 доказывается несколько простых вспомогательных утверждений. Ядром статьи является §4, в котором доказана основная лемма об извлечении ортогональных трансвекций, полностью сводящая изучение нечетномерного случая к четномерному. Настоящая работа примыкает к статьям [3, I и II], и мы отсылаем читателя к этим работам по поводу подробного обсуждения рассматриваемой нами задачи и более полной библиографии.

§1. Основные определения и обозначения

Напомним определение сети идеалов и сетевой подгруппы. Таблицу $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, идеалов σ_{ij} кольца R называют сетью идеалов в R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых i, j, r. Сеть σ называется D-сетью, если, кроме того, $\sigma_{ii} = R$. Каждой сети сопоставляется сетевая подгруппа $G(\sigma)$ в $G = \mathrm{GL}\,(n, R)$, состоящая из всех матриц $a = (a_{ij}) \subseteq G$, для которых $a_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\sigma_{ij}}$ при всех i, j. Сеть называется симплектической, если $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i}$ для всех i, j, и ортогональной, если, кроме того

$$\sigma_{i,-i} = \sum \sigma_{ij}\sigma_{j,-i}, \quad j \ne \pm i,$$

для всех i. Ортогональная сеть σ определяет ортогональные сетевые подгруппы $\Gamma(\sigma)$ и $\dot\Gamma(\sigma)$ в группах $\Gamma = \mathrm{SO}\,(n, R)$ и $\dot\Gamma = \Omega(n, R)$ следующим образом: $\Gamma(\sigma) = \Gamma \cap G(\sigma)$ и $\dot\Gamma(\sigma) = \dot\Gamma \cap G(\sigma)$. Через $N_\Gamma(\sigma)$ и $\dot N_\Gamma(\sigma)$ обозначаются нормализаторы $\Gamma(\sigma)$ в Γ и $\dot\Gamma(\sigma)$ в $\dot\Gamma$ соответственно.

Задача описания подгрупп $\mathrm{Spin}\,(n, K)$, содержащих T, эквивалентна задаче описания подгрупп в $\dot\Gamma = \Omega(n, K)$, содержащих $\Delta = \Delta(n, K)$, где $\Omega(n, K) \cong \mathrm{Spin}\,(n, K)/\{\pm 1\}$ – подгруппа в $\mathrm{SO}\,(n, K)$, называемая "ядром спинорной нормы", а группа Δ – образ тора T.

Как обычно e – единичная матрица, e_{ij} – матрица, у которой на месте (i, j) стоит 1, на всех остальных – нули. Положим $n = 2l+1$ и занумеруем строки и столбцы матриц из $\dot\Gamma$ следующим образом: $-1, \ldots, l, 0, -l, \ldots, -1$. Группа $\Omega(n, K)$ в случае поля совпадает с группой $\mathrm{EO}(n, K)$, порожденной всеми элементарными ортогональными трансвекциями

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j,-i}(\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j,-i},$$

где $i,\ j \neq 0,\ i \neq \pm j,\ \xi \in K$, и

$$T_{i0}(\xi) = T_{0,-i}(\xi) = e + \xi e_{i0} - 2\xi e_{0,-i} - \xi^2 e_{i,-i},$$

где $i \neq 0,\ \xi \in K$.

Ее диагональная группа $\Delta = \Delta(n, K)$ состоит из матриц вида

$$d = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l, 1, \varepsilon_l^{-1}, \dots \varepsilon_1^{-1}), \quad \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l \in K^{*2}.$$

Нам понадобятся следующие матрицы

$$D_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i}, \quad \varepsilon \in K^*.$$

Имеют место хорошо известные изоморфизмы

$$\begin{aligned} &\mathrm{Spin}\,(3, K) \cong \mathrm{SL}\,(2, K), \qquad &&\mathrm{Spin}\,(4, K) \cong \mathrm{SL}\,(2, K) \times \mathrm{SL}\,(2, K),\\ &\mathrm{Spin}\,(5, K) \cong \mathrm{Sp}\,(4, K), \qquad &&\mathrm{Spin}\,(6, K) \cong \mathrm{SL}\,(4, K), \end{aligned}$$

поэтому рассмотрение нечетного случая будет происходить в предположении $l \geq 3$. Приводимые ниже доказательства основаны на вычислениях с матрицами из Δ. Поэтому при $n = 2l + 1$ следует различать два случая: когда l четно и когда оно нечетно. При $l = 2m$ все матрицы вида $h(\varepsilon) = \mathrm{diag}\,(\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-1})$ принадлежат Δ, $\varepsilon \in K^*$. Если это условие не выполнено, то, вообще говоря, матрицы $h(\varepsilon)$ не принадлежат Δ, но матрицы вида $h_i(\varepsilon) = h(\varepsilon)D_i(\varepsilon^{-1})$, $\varepsilon \in K^*$ уже принадлежат. Поэтому будем проводить доказательство теоремы в случае $l = 2m$ или $l = 2m+1$, $-1 \in K^{*2}$ и в случае $l = 2m+1$, $-1 \notin K^{*2}$ отдельно, причем доказательство в последнем случае технически значительно сложнее.

§2. Улучшение оценки на $|K|$ в четномерном случае

Чтобы осуществить редукцию нечетномерного случая $n = 2l + 1$ к четномерному $n = 2l$ при нечетном l, нам нужно еще понизить требование на число элементов поля так как в [3] соответствующий результат, на который мы опираемся при редукции, доказан только в предположении $|K| \geqslant 13$.

Допустим, что $q > 0$ (для $q < 0$ доказывается аналогично), $p = \pm 1$, тогда уравнения, о которых идет речь в [3], §6–3, принимают вид

$$\eta^4\gamma - \gamma + \lambda_{pq} = 0 \tag{1}$$

$$\eta^4(\gamma + 2\delta) - \gamma - 2\delta + \lambda_{pq} = 0, \tag{2}$$

где $\gamma = \sum \lambda_{ph}\lambda_{hq} - \sum \lambda_{p,-h}\lambda_{-h,q} = A_h - A_{-h}$, а $\delta = \sum \lambda_{p,-h}\lambda_{-h,q} = A_{-h}$. Суммирование производится по $h = 2, \dots, l$.

Мы выбираем индекс p равным ± 1, потому как иначе, если $p \in 2, \dots, l$, то в сумме $\sum b(\varepsilon^2)_{ph} b(\eta^2)_{hq}$ или, если $p \in -l, \dots, -2$, то в сумме $\sum b(\varepsilon^2)_{p,-h} b(\eta^2)_{-h,q}$, где $h = 2, \dots, l$, возникает слагаемое $\varepsilon^2(\eta^2 - \eta^{-2})\lambda_{pq}$, что усложняет рассуждения о выборе η, потому что тогда степени уравнений (1) и (2) формально возрастают. Нам же достаточно хотя бы для какого-то индекса p занулить (p, q)-ый элемент $(q \neq -p)$ матрицы $z = b(\varepsilon^2)D^1(\theta)b(\eta^2)$ (см. [3, II]).

Нам остается посмотреть, какие решения имеют данные уравнения в полях $\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_9$ и $\mathbb{F}_{11}$. Поскольку $\operatorname{char} K \neq 2$, то поле $\mathbb{F}_8$ мы не рассматриваем. Однако, стоит отметить, что и для поля $\mathbb{F}_8$ можно выбрать η таким образом, чтобы ни одно из уравнений (1) и (2) не выполнялось. Это можно сделать потому, что в поле $\mathbb{F}_8$ уравнение $\eta^4 = A$ имеет не более двух решений.

Пусть $K = \mathbb{F}_{11}$. Тогда η^4 может принимать только значения $x = \pm 1, 3, 4$ и 5. Значение $\eta^4 = 1$ нам не подходит, т. к. оно имеет только корни $\eta = \pm 1$. Заметим, что какие бы значения ни принимало η^4, уравнение $\eta^4 = x$ имеет ровно два корня, поэтому решениями уравнений (1) и (2) могут быть не более четырех значений η, отличных от $0, \pm 1$. Таким образом, в случае $\mathbb{F}_{11}$ мы получаем не более семи запретов, что позволяет выбрать η таким образом, чтобы ни одно из этих уравнений не имело места.

Пусть теперь $K = \mathbb{F}_9$. Заметим, что решения имеют только уравнения $\eta^4 = \pm 1$, причем в уравнении (1) η^4 не может быть равно единице, т.к. тогда $\lambda_{pq} = 0$, что противоречит нашему условию. То есть остается единственно рассмотреть случай, когда в первом уравнении $\eta^4 = -1$, а во втором $\eta^4 = 1$. Каждое из этих уравнений имеет по четыре различных решения и множества их решений не пересекаются. При $\eta^4 = -1$ из первого уравнения следует, что $\lambda_{pq} = 2\gamma$, подставив это во второе уравнение вместе с $\eta^4 = 1$, получаем , что $\gamma = 0$, а это значит, что и $\lambda_{pq} = 0$. Опять получаем противоречие. Это значит, что оба уравнения могут иметь лишь одинаковые решения при $\eta^4 = -1$. Таким образом, в случае $\mathbb{F}_9$ мы опять получаем не более семи запретов.

К сожалению, в случае $\mathbb{F}_7$ такого рода рассуждения не дают желаемого результата, потому как ограничений на η тогда ровно семь. Как и в четномерном случае $n = 2l$, так и для $n = 2l + 1$ в случае основного поля $\mathbb{F}_7$ для доказательства нужно, очевидно, привлекать более общие соображения. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся условием на число элементов основного поля $|K| \geq 9$.

§3. Вспомогательные утверждения

Теперь пусть K – поле, удовлетворяющее условиям теоремы, $\dot{\Gamma} = \Omega(n, K)$, $\Delta = \Delta(n, K)$, H – подгруппа в $\dot{\Gamma}$, содержащая Δ. Пусть далее σ – ассоциированная с H сеть идеалов, т.е. наибольшая ортогональная сеть такая, что $\dot{\Gamma}(\sigma) \leq H$. Построение такой ортогональной сети для $\operatorname{Spin}(n, K)$ произведено в [3, I], а именно: сначала с любой подгруппой $H \leq \Gamma = \operatorname{SO}(n, K)$, нормализуемой подгруппой диагональных матриц $T = T(n, K) \leq \Gamma$ связывают единственную наибольшую ортогональную D-сеть σ идеалов в K. Эта сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ определяется следующим образом: $\sigma_{ij} = \{\xi \in K \,|\, T_{ij}(\xi) \in H\}$ при $i \neq \pm j$. При этом $E_\Gamma(\sigma) \leq H$ (это лемма 1 работы [3, I]), где $E_\Gamma(\sigma)$ – это подгруппа в $\Gamma(\sigma)$, порожденная всеми содержащимися там элементарными ортогональными трансвекциями, т.е. всеми матрицами $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in \sigma_{ij}$, $i \neq \pm j$. Теперь лемма 2 той же работы показывает, что $\dot{\Gamma}(\sigma) = E_\Gamma(\sigma)\Delta$.

Нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 1. *Пусть $\theta \in K^*$ – такой, что $\theta^4 - 1$ также обратим. Пусть, далее $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\tau = (\tau_{ij})$ – две ортогональные D-сети идеалов одного и того же порядка. Для того, чтобы для матрицы $a = (a_{ij}) \in \dot{\Gamma}$ с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$ имела место формула $a\dot{\Gamma}(\sigma)a^{-1} \leq \dot{\Gamma}(\tau)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора индексов i, j, r, s выполнялось включение*

$$a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \tau_{ij}.$$

Эти условия для всех наборов индексов эквивалентны тем же условиям для тех наборов, в которых $r \neq -s$, $i \neq -j$.

Доказательство. Эта лемма доказывается точно так же, как лемма 2 работы [2], нужно только всюду заменить матрицы $D_r(\theta)$ на $D_r(\theta^2)$, что приводит к усилению требования с $\theta^2 - 1 \in K^*$ до $\theta^4 - 1 \in K^*$. Утверждение о том, что включения для $i \neq -j$ можно отбросить, доказывается так же как и в Предложении 1 той же работы.

Лемма 2. *Пусть K – поле такое, что $2 \in K^*$ и $|K| \geq 7$. Тогда для того, чтобы подгруппа $H, \Delta \leq H \leq \dot{\Gamma}$, содержалась в $N_{\dot{\Gamma}}(\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех матриц $a = (a_{ij}) \in H$ имели место включения $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$, $i \neq \pm j$, $r \neq 0$.*

Доказательство. Достаточно всюду заменить $D_r(\theta)$ на $D_r(\theta^2)$ в доказательстве Предложения 1 работы [2, I] и воспользоваться формулой

$$a_{i0}a'_{0j} = -\sum a_{ir}a'_{rj}, \quad r \neq 0,$$

справедливой для всех $i \neq j$. □

Напомним, что для $i \neq \pm j$ условие $\xi \in \sigma_{ij}$ эквивалентно тому, что $T_{ij}(\xi) \in H$ (мы так и определяли ассоциированную с H сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$). Сначала будем рассматривать случай $l = 2m$ или $l = 2m+1$, $-1 \in K^{*2}$.

Следующие три леммы являются перенесением аналогичных результатов (леммы 1, 2 и 3 работы [2, II]) на спинорный случай.

Лемма 3. *Если для некоторой матрицы $x = (x_{ij}) \in H$ такой, что $x_{00} \in K^*$, имеет место $x_{ij} = 0$ при всех $i \geq 0$, $j \leq 0$, $(i,j) \neq (0,0)$, то $x_{i0} \in \sigma_{i0}$ для всех $i \leq 0$ и $x_{0j} \in \sigma_{0j}$ для всех $j \geq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $y = [x, h(\varepsilon^{-1})]$, где для матриц $x, y \in \dot{\Gamma}$ через $[x, y]$ обозначен их коммутатор. Матрица y нижняя унитреугольная и, следовательно, к ней можно применить лемму 4 работы [2, I] и заключить, что $y_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех $i \leq 0$ и $j \geq 0$. Вычисление показывает, что $y_{i0} = x_{i0}x'_{00}(1-\varepsilon)$, $i \leq 0$ и из условия на поле K следует, что мы можем выбрать $\varepsilon \in K^*$ так, чтобы $1 - \varepsilon \in K^*$, поэтому $y_{i0} \in \sigma_{i0}$.

Аналогично, для получения включений $x_{0j} \in \sigma_{0j}$, $j \geq 0$ надо рассмотреть нижнетреугольную матрицу $y = [x^{-1}, h(\varepsilon)]$, у которой $y_{0j} = x_{0j}x'_{00}(\varepsilon - 1)$ для всех $j \geq 0$.

§4. Основная лемма об извлечении трансвекций и редукция к четномерному случаю

Теперь обозначим через ε_i знак индекса i (т. е. $\varepsilon_i = 1$, если $i > 0$, и $\varepsilon_i = -1$, если $i < 0$).

Лемма 4. *Если для некоторой матрицы $x = (x_{ij}) \in H$ имеем $x_{00} \in K^*$, то $x_{i0} \in \sigma_{i0}$, $x_{0i} \in \sigma_{0i}$ для любого $i \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$y = xh(-1)x^{-1},$$

принадлежащую H вместе с x. Имеем $y_{ij} = -\delta_{ij} + 2x_{i0}x'_{0j}$. Очевидно, что $y^2 = e$. И поэтому $y_{ij} = y'_{ij} = y_{-j,-i}$ для всех i, $j \neq 0$. Фиксируем $\varepsilon \in K^*$ такое, что $\varepsilon - 1 \in K^*$ и рассмотрим матрицу $z(\varepsilon) = yh(\varepsilon)y^{-1}$. Тогда

$$z(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}(\varepsilon - 1) + b_{ij}(\varepsilon^{-1} - 1),$$

где

$$a_{ij} = \sum y_{ik}y'_{kj}, \quad b_{ij} \sum y_{i,-k}y'_{-k,j}$$

и суммирование производится по $1 \leq k \leq l$. Ясно, что $b_{ij} = a_{-j,-i}$ для всех i, $j \neq 0$. И вычисление показывает, что

$$a_{ij} = \delta_{ij} + x_{i0}x'_{0j}(4\lambda - \mu_{ij}),$$

где слагаемое δ_{ij} возникает, только если $\varepsilon_i = 1$, $\lambda = \sum x'_{0k}x_{k0}$, $1 \leq k \leq l$, а μ_{ij} принимает следующие значения: 0, если $\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$; 2, если $\varepsilon_i = 1$ или $\varepsilon_j = 1$; 4, если $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$.

Аналогично для b_{ij} имеем

$$b_{ij} = \delta_{ij} + x_{i0}x'_{0j}(4\lambda - \mu_{ij}),$$

где δ_{ij} возникает, только если $\varepsilon_i = -1$, μ_{ij} принимает следующие значения: 0, если $\varepsilon_i = 1$; 2, если $\varepsilon_i = -1$ или $\varepsilon_j = -1$; 4, если $\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$. Теперь перейдем к непосредственному вычислению $z(\varepsilon)_{ij}$ в зависимости от знаков i и j. Пусть $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ и $i, j \neq 0$, тогда нетрудно видеть, что $a_{ij} = b_{ij} = x_{i0}x'_{0j}(4\lambda - 2)$. Следовательно, имеем

$$z(\varepsilon)_{ij} = x_{i0}x'_{0j}(4\lambda - 2)(\varepsilon - 1)^2\varepsilon^{-1}.$$

Т.е. если записать матрицу $z(\varepsilon)$ в клеточном виде, который соответствует разбиению $n = l + 1 + l$, то у матриц $z(\varepsilon)$ и $z(\eta)$, ε,

$\eta \in K^*$, таких, что $\varepsilon - 1$, $\eta - 1 \in K^*$ правые верхние и левые нижние углы пропорциональны.

Теперь при $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ получаем следующее:

$$z(\varepsilon)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}\varepsilon + x_{i0}x'_{0j}(\varepsilon - 1)\varepsilon^{-1}[\varepsilon(4\lambda - 4) - 4\lambda], & \text{если} \quad \varepsilon_i = 1, \\ \delta_{ij}\varepsilon^{-1} + x_{i0}x'_{0j}(\varepsilon - 1)\varepsilon^{-1}[4\lambda\varepsilon - (4\lambda - 4)], & \text{если} \quad \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

для всех $i \neq 0$.

Наконец, аналогичные вычисления показывают, что

$$z(\varepsilon)_{i0} = \begin{cases} x_{i0}x'_{00}(\varepsilon - 1)\varepsilon^{-1}[\varepsilon(4\lambda - 2) - 4\lambda], & \text{если} \quad \varepsilon_i = 1, \\ x_{i0}x'_{00}(\varepsilon - 1)\varepsilon^{-1}[4\lambda\varepsilon - (4\lambda - 2)], & \text{если} \quad \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

для всех $i \neq 0$. При этом $z(\varepsilon)_{0i} = 2z'(\varepsilon)_{-i0} = 2z(\varepsilon^{-1})_{-i0}$, поэтому

$$z(\varepsilon)_{0i} = \begin{cases} 2x'_{0i}x_{00}(1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}[4\lambda - \varepsilon(4\lambda - 2)], & \text{если} \quad \varepsilon_i = 1, \\ 2x'_{0i}x_{00}(1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}[(4\lambda - 2)\varepsilon - 4\lambda\varepsilon], & \text{если} \quad \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

для всех $i \neq 0$.

Теперь рассмотрим матрицу

$$\omega = \omega(\varepsilon, \eta, \theta) = z(\varepsilon)h(\theta)z^{-1}(\eta), \qquad \theta \in K^*.$$

Вычислим вначале элементы ω_{ij}, где i, $j \neq 0$, $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$. Вообще,

$$\omega_{ij} = \theta \sum z(\varepsilon)_{ik} z'(\eta)_{kj} + z(\varepsilon)_{i0} z'(\eta)_{0j} + \theta^{-1} \sum z(\varepsilon)_{i,-k} z'(\eta)_{-kj},$$

суммирование ведется по $1 \leq k \leq l$.

Пусть сначала $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_j = 1$. Заменяя кусок (i)-ой строки матрицы $z(\varepsilon)$ на кусок $(-j)$-ой строки матрицы $z(\eta)$ и кусок (j)-го столбца матрицы $z(\eta)^{-1}$ на кусок $(-i)$-го столбца матрицы $z(\varepsilon)^{-1}$, получаем

$$\sum z(\varepsilon)_{ik} z'(\eta)_{kj} = -\frac{1}{2} \, \frac{\eta(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\eta - 1)^2} \, \frac{x_{i0}}{x_{-j0}} \, z(\eta)_{-j0} z'(\eta)_{0j},$$

$$\sum z(\varepsilon)_{i,-k} z'(\eta)_{-kj} = -\frac{1}{2} \, \frac{\varepsilon(\eta - 1)^2}{\eta(\varepsilon - 1)^2} \, \frac{x'_{0j}}{x'_{0,-i}} \, z(\varepsilon)_{i0} z'(\varepsilon)_{0,-i},$$

где суммирование производится по $1 \leq k \leq l$.

Присутствие здесь в знаменателях x_{i0} и $x'_{0,-i}$ не должно смущать, т.к. они сокращаются с соответствующими множителями в $z(\eta)_{-j0}$ и $z'(\varepsilon)_{0,-i}$. В итоге имеем

$$\omega_{ij} = x_{i0}x'_{0j}(\varepsilon - 1)(\eta - 1)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}x_{00}x'_{00}f(\theta),$$

где $f(\theta)$ – следующий многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}[\varepsilon,\eta,\lambda]$:

$$f(\theta)=-\theta(\varepsilon-1)(\eta-1)^{-1}(4\lambda\eta-(4\lambda-2))^2+2(4\lambda\varepsilon-(4\lambda-2))(4\lambda\eta-(4\lambda-2))-\theta^{-1}(\varepsilon-1)(\eta-1)^{-1}(4\lambda\eta-(4\lambda-2))^2.$$

Дискриминант уравнения $f(\theta)=0$ равен нулю и, если мы предположим, что $4\lambda\varepsilon-(4\lambda-2)$, $4\lambda\eta-(4\lambda-2)\in K^*$, то его единственный корень

$$\theta_0=\frac{(4\lambda\varepsilon-(4\lambda-2))(\eta-1)}{(4\lambda\eta-(4\lambda-2))(\varepsilon-1)}.$$

Он зависит не от самих i и j, а только от их знаков. Получается, что при $\theta=\theta_0$ имеем $\omega_{ij}=0$ для всех $1\le j\le l$, $-l\le i\le -1$. Из ортогональности матрицы ω следует, что если хотя бы один из элементов ω_{rj}, $\omega_{r,-j}$ строки с номером $r\ne 0$ равен нулю, то и элемент $\omega_{r0}=0$. То же верно и для столбцов. Таким образом, в матрице $\omega=\omega(\varepsilon,\eta,\theta_0)$ имеем $\omega_{i0}=0$ для $1\le i\le l$ и $\omega_{0j}=0$ для $-l\le j\le -1$. То есть, к данной матрице можно применить лемму 1 и заключить, что $\omega_{i0}\in\sigma_{i0}$ для всех $i\le 0$, $\omega_{0j}\in\sigma_{0j}$ для всех $j\ge 0$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\omega_{i0}=x_{i0}x'_{00}\varepsilon^{-1}\eta^{-1}((4\lambda-2)-4\lambda\varepsilon)^{-1}g(\varepsilon,\eta,\lambda),$$

где g – некоторый многочлен от ε, η, λ с коэффициентами из K. Так как для любого поля многочлен g тождественно равен 0, то равен 0 формально, т.е. все его коэффициенты нулевые. Поэтому $\omega_{i0}=0$ для любого $-l\le i\le -1$. Аналогично проверяется, что $\omega_{0j}=0$ для $1\le j\le l$. Равенства $\omega_{i0}=0$ и $\omega_{0j}=0$ представляют собой при фиксированных ε и η квадратные уравнения относительно θ с обратимыми коэффициентами. При этом θ_0 является кратным корнем этого уравнения. Это значит, что при $\theta\ne\theta_0$ коэффициент при x_{i0} в ω_{i0} обратим.

Произведя вычисления элементов ω_{ij} при $\varepsilon_i=1$, $\varepsilon_j=-1$, получим такую же формулу, как и в предыдущем случае ($\varepsilon_i=-1$, $\varepsilon_j=1$), только θ и θ^{-1} в ней нужно поменять местами.

Это значит, что для того,чтобы коэффициент при $x_{i0}x'_{0j}$ в ω_{ij} (а вместе с тем и соответствующие коэффициенты при x_{i0} в ω_{i0} и x_{0j} в ω_{0j}) для матрицы $\omega=\omega(\varepsilon,\eta,\theta)$ не был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $\theta=\theta_0^{-1}$. По доказанному выше коэффициенты при x_{i0} в ω_{i0} и при x_{0j} ω_{0j} матрицы $\omega(\varepsilon,\eta,\theta_0)$ обратимы, если $\theta_0\ne\theta_0^{-1}$. Но равенство $\theta_0=\theta_0^{-1}$ означает, что $\theta_0=1$ или $\theta_0=-1$, а при фиксированном η каждое из этих равенств – линейное уравнение относительно ε. Это значит, что запрещая для ε, η значения 0, 1 и $(2\lambda-1)/2\lambda$ (если λ обратим) и еще не более двух значений для ε, можем считать, что эти коэффициенты обратимы. Мы можем это сделать, учитывая условие, наложенное на поле – $|K| \geq 9$. Это значит, что $x_{i0} \in \sigma_{i0}$ при $\varepsilon_i = 1$ и $x_{0j} \in \sigma_{0j}$ при $\varepsilon_j = -1$. Проводя такое же рассуждение для матрицы $\omega = \omega(\varepsilon, \eta, \theta^{-1})$, убеждаемся, что $x_{i0} \in \omega_{i0}$ при $\varepsilon_i = -1$ и $x_{0j} \in \sigma_{0j}$ при $\varepsilon_j = 1$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $x \in H$ – такая матрица, что $x_{00} \neq 0$. Тогда $x \in N_\Gamma(\sigma)$.*

Доказательство этого утверждения в точности такое же, как и в [2, I].

Теперь остается рассмотреть случай, когда x – произвольная матрица. Возьмем $\varepsilon \neq 0, 1$ и рассмотрим матрицу $y(\varepsilon) = xD_{rs}(\varepsilon)x^{-1} \in H$, $r \neq \pm s$, $r, s \neq 0$. Условие $y(\varepsilon)_{00} = 0$ является квадратным уравнением относительно ε, а значит, имеет в поле K не более двух корней. Это значит, что все матрицы $y(\varepsilon)$ кроме, может быть двух, принадлежат $N_\Gamma(\sigma)$. Не трудно видеть, что тогда и оставшиеся матрицы принадлежат $N_\Gamma(\sigma)$. Действительно, представим $y(\varepsilon) = xD_{rs}(\theta\varepsilon\theta^{-1})x^{-1} = y(\theta)y(\varepsilon\theta^{-1})$. Теперь равенства $y(\theta)_{00} = 0$ и $y(\varepsilon\theta^{-1})_{00} = 0$ накладывают на θ не более четырех запретов и, следовательно, найдется такое $\theta \neq 0, 1$, что $y(\theta)$, $y(\varepsilon\theta^{-1}) \in N_\Gamma(\sigma)$, т.к. $|K| \geq 9$, но тогда и $y(\varepsilon) \in N_\Gamma(\sigma)$. Это значит, что все матрицы $y(\varepsilon) = xD_{rs}(\varepsilon)x^{-1}$, $\varepsilon \neq 0$, $r \neq \pm s$, содержатся в $N_\Gamma(\sigma)$. По лемме 2 имеем $y(\varepsilon)_{ir}\, y'(\varepsilon)_{rj} \in \sigma_{ij}$ для любых i, j, r. Поэтому $y(\varepsilon)_{ij}\, y'(\varepsilon)_{jj} \in \sigma_{ij}$. Возьмем $\varepsilon \neq 0, 1$ такое, что $y'(\varepsilon)_{jj} \neq 0$. Это запрещает не более двух значений ε. Тогда из предыдущего включения будем иметь $y(\varepsilon)_{ij} \in \sigma_{ij}$. Так как $|K| \geq 9$, то найдутся два различных значения $\varepsilon \neq 0, 1$, не являющиеся корнями уравнения $y'(\varepsilon)_{jj} = 0$. Подставляя эти значения и расписывая $y(\varepsilon)_{ij}$ через коэффициенты матриц x и x^{-1}, получаем систему сравнений, аналогичную той, что появляется в лемме 2. То же рассуждение, что и в той лемме, показывает, что $a_{ir}a'_{rj} + a_{is}a'_{sj} \in \sigma_{ij}$. Учитывая, что $n \geq 7$, мы можем выбрать три индекса r, s, t так, что все шесть индексов $\pm r$, $\pm s$, $\pm t$ различны. Вычитая включения $a_{ir}a'_{rj} + a_{it}a'_{tj}, a_{is}a'_{sj} + a_{it}a'_{tj} \in \sigma_{ij}$, получаем, что $a_{ir}a'_{rj} - a_{is}a'_{sj} \in \sigma_{ij}$. И, наконец, складывая его со включением $a_{ir}a'_{rj} + a_{it}a'_{tj} \in \sigma_{ij}$, имеем $2a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$. Так как $2 \in K^*$, то $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$. Это значит, что по лемме 2 $x \in N_\Gamma(\sigma)$.

Автор выражает глубокую благодарность Н. А. Вавилову за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп* I, II. — Сиб. мат. журн. **29**, No.3 (1988), 12–25; Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 42–63.
3. Н. А. Вавилов, *О подгруппах спинорной группы, содержащих расщепимый максимальный тор* I, II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 49–75; **289** (2002), 37–56.
4. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР **183** (1990), 29–41.
5. Н. А. Вавилов, *Погруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Тр. Ленингр. Мат. Об-ва **1** (1990), 64–109.
6. В. Голубовский, *Строение изотропных ортогональных групп.* — Канд. дисс., Л. (1991).
7. В. Голубовский, *Подгруппы изотропной ортогональной группы, содержащие централизатор максимального расщепимого тора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **191** (1991), 76–79.
8. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах гиперболических унитарных групп.* — Алгебра и Анализ **9**, No. 4 (1997), 87–96.
9. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
10. Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербург. Ун-та., Сер. 1, No. 1 (1997), 8–11.
11. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп в симплектической группе над полем характеристики* 2. — Алгебра и Анализ **10**, No. 4 (1998), 113–129.
12. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — Успехи мат. наук **36**, No. 6 (1981), 56–107.
13. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — В кн.: Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия, М. (1985), 135–182.
14. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — Успехи мат. наук **41**, No. 1 (1986), 57–96.
15. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of a Chevalley group which contain a split maximal torus.* — Commun. Algebra **24**, No. 1 (1996), 109–133.
16. G. M. Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type.* — J. Algebra **61**, No. 1 (1979), 16–27.

17. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie type and their geometries (Como-1993), Cambridge Univ. Press (1995), pp. 233–280.

Filippova E. A. Subgroups of the spinor group containing a split maximal torus. III.

We describe subgroups of the spinor group Spin $(2l+1, K)$ over a field K such that $2 \in K^*$, $|K| \geqslant 9$, and $l \geqslant 3$, which contain a split maximal torus. We prove that the description of these subgroups is standard in two cases: 1) l is even; 2) l is odd and $-1 \in K^{*2}$. We show that as in the papers by N. A. Vavilov and V. Hołubovsky, devoted to subgroups of the orthogonal group, one can reduce the odd case to the case of even $n = 2l$. However, here the calculations are somewhat more involved since we can only use diagonal elements of Spin $(2l+1, K)$. Furthermore, we strengthen the results of N. A. Vavilov pertaining to the even case by relaxing the condition on the field K to $|K| \geqslant 9$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 июня 2002 г.