Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

М. Ф. Гамаль

РЕШЕТКИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ КВАЗИАФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОСТОРОННЕГО СДВИГА КОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ

Пусть T_1 и T_2 – ограниченные линейные операторы, действующие в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и, соответственно, $\mathcal{H}_2$. Если существует оператор $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, такой, что $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, $\operatorname{clos} X\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ и $XT_1 = T_2X$, то оператор T_1 называется квазиаффинным преобразованием оператора T_2, обозначение: $T_1 \prec T_2$. Если существует семейство операторов $\{X_i\}_i$, $X_i : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, таких, что $\operatorname{Ker} X_i = \{0\}$ и $X_iT_1 = T_2X_i$ для любого i, и $\bigvee\limits_i X_i\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, то такое отношение между операторами T_1 и T_2 обозначается так: $T_1 \overset{ci}{\prec} T_2$.

Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Символами $L^2(\mathcal{E})$ и $H^2(\mathcal{E})$ обозначаются пространства L^2- и H^2-функций, заданных на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ и принимающих значения в пространстве $\mathcal{E}$. Символом $H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}')$ обозначается пространство H^∞-функций, заданных в единичном круге $\mathbb{D}$ и принимающих значения в пространстве операторов, действующих из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$. Символом H^∞ обозначается пространство Харди в круге $\mathbb{D}$, символом $I_{\mathcal{H}}$ – тождественный оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Односторонний сдвиг S в пространстве $H^2(\mathcal{E})$ – это оператор умножения на независимую переменную: $Sh = zh$, $h \in H^2(\mathcal{E})$, его краткость равна $\dim\mathcal{E}$ – размерности пространства $\mathcal{E}$.

В работе К. Такахаши [1] показано, что если T – сжатие в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $T \prec S$, то $S \overset{ci}{\prec} T$ (предложение 2 из [1]). Если же кратность сдвига S конечна, то существует семейство операторов $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{D}}$, $Y_\alpha : H^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}$, таких, что $TY_\alpha = Y_\alpha S$, $XY_\alpha = \delta_\alpha(S)$, $Y_\alpha X = \delta_\alpha(T)$ и $\delta_\alpha(\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{D}$, где $\delta_\alpha \in H^\infty$, $X : \mathcal{H} \to H^2(\mathcal{E})$ – оператор из опре-

Работа частично поддержана грантом РФФИ N 02-01-00264, ФЦП "Интеграция"рег. номер 326.53 и грантом "Научные школы" N 00-15-96-022.

деления отношения $T \prec S$ (лемма 3 из [1]). Очевидно, что при этих условиях $\operatorname{Ker} Y_\alpha = \{0\}$ для любого $\alpha \in \mathbb{D}$, но, если следовать доказательству леммы 3 из [1] буквально, то может получиться так, что семейство $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{D}}$ на самом деле состоит из одного оператора и функция δ_α имеет нетривиальную внутреннюю часть (поэтому такое семейство $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{D}}$ может не осуществлять отношения $S \overset{ci}{\prec} T$). Однако небольшое изменение доказательства леммы 3 из [1] позволяет построить семейство операторов $\{Y_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$, обладающие теми же свойствами, что и $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{D}}$, но вместо условия $\delta_\alpha(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{D}$, получится, что внутренние части функций $\{\delta_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ взаимно просты. Поэтому отображения решеток (би-, гипер-)инвариантных подпространств операторов T и S, индуцированные оператором X и семейством операторов $\{Y_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$, будут взаимно-обратными изоморфизмами решеток.

Использующиеся в работе определения и факты можно найти в [2].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{H}, \mathcal{E}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, $\dim\mathcal{E} = k < \infty$, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – сжатие, $S : H^2(\mathcal{E}) \to H^2(\mathcal{E})$ – односторонний сдвиг, $X : \mathcal{H} \to H^2(\mathcal{E})$ – оператор, $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, $\operatorname{clos} X\mathcal{H} = H^2(\mathcal{E})$ и $XT = SX$. Тогда существуют семейства операторов $\{Y_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ и функций $\{\delta_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$, $Y_\mathbf{i} : H^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}$, $\delta_\mathbf{i} \in H^\infty$, такие, что $TY_\mathbf{i} = Y_\mathbf{i}S$, $XY_\mathbf{i} = \delta_\mathbf{i}(S)$, $Y_\mathbf{i}X = \delta_\mathbf{i}(T)$ для всех $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$, и наибольший общий делитель внутренних частей функций $\{\delta_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ равен 1.*

Доказательство. В [1] показано, что в условиях теоремы сжатие T унитарно эквивалентно оператору $S(\Theta)$, где Θ – характеристическая функция сжатия T, $\Theta \in H^\infty(\mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*})$ – внутренняя, $S(\Theta) : H(\Theta) \to H(\Theta)$, $S(\Theta)f = Pzf$, $f \in H(\Theta)$, $H(\Theta) = H^2(\mathcal{D}_{T^*}) \ominus \Theta H^2(\mathcal{D}_T)$, P – ортогональный проектор из $H^2(\mathcal{D}_{T^*})$ на $H(\Theta)$, $P = I_{H^2(\mathcal{D}_{T^*})} - \Theta P_+\Theta^*$, P_+ – ортогональный проектор из $L^2(\mathcal{D}_T)$ на $H^2(\mathcal{D}_T)$. Не умаляя общности считаем, что $T = S(\Theta)$. Оператор X имеет вид $Xf = \Phi f$, $f \in H(\Theta)$, где $\Phi \in H^\infty(\mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{E})$ – внешняя функция, $\Phi\Theta = 0$ (см. [1] или [2, теорема VI.3.6]). Положим $\nu = \dim\mathcal{D}_{T^*}$, так как Φ – внешняя, то $k \leqslant \nu \leqslant \infty$. Зафиксируем в пространствах $\mathcal{D}_{T^*}$ и $\mathcal{E}$ ортонормированные базисы $\{d_i\}_{i=1}^{\nu}$ и $\{e_n\}_{n=1}^{k}$ и положим $\mathbf{I}_0 = \{\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant \nu, i_k < \infty\}$. Для $\mathbf{i} \in \mathbf{I}_0$ положим $\mathcal{F}_\mathbf{i} = \bigvee_{n=1}^{k} d_{i_n}$, и пусть $\delta_\mathbf{i}$ – определитель матрицы $\Phi|_{\mathcal{F}_\mathbf{i}} : \mathcal{F}_\mathbf{i} \to \mathcal{E}$ в базисах $\{d_{i_n}\}_{n=1}^{k}$

и $\{e_n\}_{n=1}^k$. Очевидно, что $\delta_{\mathbf{i}} \in H^\infty$. Пусть $\mathbf{I} = \{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_0 : \delta_{\mathbf{i}} \not\equiv 0\}$. Для $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$ существует функция $B_{\mathbf{i}} \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{F}_{\mathbf{i}})$, такая, что $B_{\mathbf{i}}\Phi|_{\mathcal{F}_{\mathbf{i}}} = \delta_{\mathbf{i}} I_{\mathcal{F}_{\mathbf{i}}}$, $\Phi|_{\mathcal{F}_{\mathbf{i}}} B_{\mathbf{i}} = \delta_{\mathbf{i}} I_{\mathcal{E}}$ (см. [1] или [2, предложение V.6.1]). Пусть $A_{\mathbf{i}} = \mathrm{id}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}$, $A_{\mathbf{i}} \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{D}_{T^*})$, где $\mathrm{id}_{\mathbf{i}} : \mathcal{F}_{\mathbf{i}} \to \mathcal{D}_{T^*}$ – оператор тождественного вложения. Положим $Y_{\mathbf{i}} : H^2(\mathcal{E}) \to H(\Theta)$, $Y_{\mathbf{i}} h = PA_{\mathbf{i}} h$, $h \in H^2(\mathcal{E})$.

Убедимся, что $\{Y_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ и $\{\delta_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ удовлетворяют заключению теоремы. Пусть $h \in H^2(\mathcal{E})$, тогда $TY_{\mathbf{i}} h = PzPA_{\mathbf{i}} h = Pz(I - \Theta P_+ \Theta^*)A_{\mathbf{i}} h = PzA_{\mathbf{i}} h = Y_{\mathbf{i}} Sh$ и $XY_{\mathbf{i}} h = \Phi PA_{\mathbf{i}} h = \Phi(I - \Theta P_+ \Theta^*)A_{\mathbf{i}} h = \Phi A_{\mathbf{i}} h = \Phi|_{\mathcal{F}_{\mathbf{i}}} B_{\mathbf{i}} h = \delta_{\mathbf{i}} h$, то есть $TY_{\mathbf{i}} = Y_{\mathbf{i}} S$ и $XY_{\mathbf{i}} = \delta_{\mathbf{i}}(S)$. Далее, $XY_{\mathbf{i}} X = \delta_{\mathbf{i}}(S)X = X\delta_{\mathbf{i}}(T)$, то есть $X(Y_{\mathbf{i}} Xf - \delta_{\mathbf{i}}(T)f) = 0$ для любого $f \in \mathcal{H}$. Так как $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, то $Y_{\mathbf{i}} Xf = \delta_{\mathbf{i}}(T)f$ для любого $f \in \mathcal{H}$, то есть $Y_{\mathbf{i}} X = \delta_{\mathbf{i}}(T)$.

Осталось проверить, что наибольший общий делитель внутренних частей функций $\{\delta_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ равен 1. Это так, поскольку, по построению, $\delta_{\mathbf{i}}$ являются минорами высшего порядка внешней функции Φ (см. [3, гл. I п. 6]; также этот факт можно вывести из результатов работ [4] и [5], примененных к функции, ассоциированной к $*$-внутренней части функции Φ). •

Замечание 1. Пусть в условиях теоремы 1 существует оператор $Y : H^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}$ такой, что $\operatorname{Ker} Y = \{0\}$, $\operatorname{clos} YH^2(\mathcal{E}) = \mathcal{H}$ и $YS = TY$ (то есть T и S квазиподобны). Тогда существуют оператор $X_1 : H^2(\mathcal{E}) \to H^2(\mathcal{E})$ и внешняя функция $\delta, \delta \in H^\infty$, такие, что $X_1XT = SX_1X$, $X_1XY = \delta(S)$ и $YX_1X = \delta(T)$.

Это утверждение известно по крайней мере для случая конечных дефектов сжатия T (см. [6]), доказательство здесь приводится для полноты изложения.

Доказательство замечания 1. Ясно, что $XYS = SXY$ и $\operatorname{clos} XYH^2(\mathcal{E}) = H^2(\mathcal{E})$, поэтому (см. [2, теорема VI.3.6]) $XYh = Gh$, $h \in H^2(\mathcal{E})$, где $G \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E})$ – внешняя функция. Положим $\delta = \det G$ и $X_1 h = G^{\mathrm{Ad}} h$, $h \in H^2(\mathcal{E})$, где $G^{\mathrm{Ad}} \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E})$ – присоединенная к матрице-функции G, см. [2, предложение V.6.1]. По [2, следствие V.6.3] δ – внешняя функция. Остальные утверждения очевидны. •

Утверждение о решетках инвариантных подпространств операторов T и S является следствием приведенных ниже предложений, которые являются простыми обобщениями некоторых результатов работ [7] (п.1–7 из §4) и [8] (леммы 1.1 и 1.3).

Для оператора T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ символом $\operatorname{Alg} T$ обозначается наименьшая замкнутая в слабой операторной топологии алгебра, содержащая $I_{\mathcal{H}}$ и T. Для операторов $\{A_i\}_i$, $A_i \in \operatorname{Alg} T$, символом $\operatorname{Idl}\{A_i\}_i$ обозначается наименьший идеал в $\operatorname{Alg} T$, замкнутый в слабой операторной топологии и содержащий все операторы A_i.

Лемма. *Пусть $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – сжатие, не имеющее сингулярного унитарного прямого слагаемого, пусть $\delta_i \in H^\infty$ для всех i, и пусть наибольший общий делитель внутренних частей функций $\{\delta_i\}_i$ равен 1. Тогда $\operatorname{Idl}\{\delta_i(T)\}_i = \operatorname{Alg} T$.*

Доказательство. Как и в лемме 1.1 из [8], положим $\Psi = \{\psi \in H^\infty : \psi(T) \in \operatorname{Idl}\{\delta_i(T)\}_i\}$. Множество Ψ является слабо* замкнутым идеалом алгебры H^∞, поэтому $\Psi = \theta H^\infty$, где θ – внутренняя функция. Так как $\delta_i \in \Psi$ для всех i, то $\Psi = H^\infty$, поэтому $I_{\mathcal{H}} = 1(T) \in \operatorname{Idl}\{\delta_i(T)\}_i$. •

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – гильбертовы пространства, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $R : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $X : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $Y_i : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ – операторы, такие, что $XT = RX$, $Y_i R = T Y_i$, $Y_i X \in \operatorname{Alg} T$, $X Y_i \in \operatorname{Alg} R$ для всех i, $\operatorname{Idl}\{Y_i X\}_i = \operatorname{Alg} T$, $\operatorname{Idl}\{X Y_i\}_i = \operatorname{Alg} R$. Пусть $\mathcal{L}(T)$ и $\mathcal{L}(R)$ – решетки инвариантных, или гиперинвариантных, или биинвариантных подпространств операторов T и R. Тогда отображения*

$$\mathcal{J}_X : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(R) \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} : \mathcal{L}(R) \to \mathcal{L}(T),$$

действующие по формулам

$$\mathcal{J}_X E = \operatorname{clos} X E, \quad E \in \mathcal{L}(T), \quad \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} F = \bigvee_i Y_i F, \quad F \in \mathcal{L}(R),$$

являются взаимно-обратными изоморфизмами решеток $\mathcal{L}(T)$ и $\mathcal{L}(R)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Lat} T$ и $\operatorname{Lat} R$ – решетки инвариантных подпространств операторов T и R. Для $E \in \operatorname{Lat} T$ и $F \in \operatorname{Lat} R$ включения $\mathcal{J}_X E \in \operatorname{Lat} R$ и $\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} F \in \operatorname{Lat} T$ очевидно следуют из равенств $XT = RX$ и $Y_i R = T Y_i$ для всех i. Рассмотрим отображение $\mathcal{J}_{\{Y_i X\}_i} = \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} \mathcal{J}_X$, действующее в $\operatorname{Lat} T$. Пусть $E \in \operatorname{Lat} T$. Так как $Y_i X \in \operatorname{Alg} T$, то $Y_i X A E \subset E$ для любого индекса i и любого оператора A из $\operatorname{Alg} T$. Пусть $h \in E$ и $h \perp \bigvee_{\substack{i \\ A \in \operatorname{Alg} T}} Y_i X A E$, это означает, что для любого $e \in E$ равенство $[e \otimes h, Y_i X A] = 0$ справедливо для всех i и для всех $A \in \operatorname{Alg} T$ (здесь $e \otimes h$ – это непрерывный линейный функционал на пространстве операторов в $\mathcal{H}$, снабженном слабой операторной топологией). По условию $I_{\mathcal{H}}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке семейства $\{Y_i X A\}_{\substack{i \\ A \in \operatorname{Alg} T}}$, поэтому $[e \otimes h, I_{\mathcal{H}}] = (e, h) = 0$. Таким образом, $h \perp e$ для всех $e \in E$, то есть $h = 0$ и $\bigvee_{\substack{i \\ A \in \operatorname{Alg} T}} Y_i X A E = E$. Наконец, равенство $\bigvee_i Y_i X E = \bigvee_{\substack{i \\ A \in \operatorname{Alg} T}} Y_i X A E$ очевидно, и мы получили, что $\mathcal{J}_{\{Y_i X\}_i} E = E$ для любого $E \in \operatorname{Lat} T$. Равенство $\mathcal{J}_{\{XY_i\}_i} F = \mathcal{J}_X \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} F = F$ для любого $F \in \operatorname{Lat} R$ доказывается точно так же.

Для завершения доказательства осталось убедиться в том, что отображения $\mathcal{J}_X$ и $\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i}$ переводят гиперинвариантные подпространства в гиперинвариантные, а биинвариантные – в биинвариантные. Пусть $\{T\}'$ и $\{R\}'$ – коммутанты, $\{T\}''$ и $\{R\}''$ – бикоммутанты операторов T и R. Пусть E гиперинвариантно для T и $B \in \{R\}'$. Очевидно, что $Y_i B X \in \{T\}'$ и $BXY_i = XY_i B$ для всех i. Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{clos} B \mathcal{J}_X E = \operatorname{clos} B \mathcal{J}_X \mathcal{J}_{\{Y_i X\}_i} E &= \bigvee_i BXY_i X E \\ &= \bigvee_i XY_i B X E \subset \bigvee_i X E = \mathcal{J}_X E,\end{aligned}$$

то есть $\mathcal{J}_X E$ гиперинвариантно для R. Аналогично доказывается, что $\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i}$ переводит гиперинвариантные подпространства для R в гиперинвариантные подпространства для T.

Пусть, для разноообразия, F – биинвариантное подпространство для R и $A \in \{T\}''$. Очевидно, что $XAY_i \in \{R\}''$ и $AY_i X = Y_i X A$ для всех i. Поэтому $AY_j F = AY_j \mathcal{J}_{\{XY_i\}_i} F \subset \bigvee_i AY_j X Y_i F = \bigvee_i Y_j X A Y_i F \subset \bigvee_i Y_j F = \operatorname{clos} Y_j F$ для любого индекса j. Следовательно, $A \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} F \subset \bigvee_i AY_i F \subset \bigvee_i Y_i F = \mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} F$, то есть $\mathcal{J}_{\{Y_i\}_i} F$ биинвариантно для T. Аналогично доказывается, что $\mathcal{J}_X$ переводит биинвариантные подпространства для T в биинвариантные подпространства для R. $\bullet$

Замечание 2. Ясно, что если X и $\{Y_i\}_i$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, $\operatorname{clos} X\mathcal{H} = \mathcal{K}$, $\bigcap_i \operatorname{Ker} Y_i = \{0\}$ и $\bigvee_i Y_i\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

Литература

1. K. Takahashi, *On quasiaffine transforms of unilateral shifts.* — Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 683–687.
2. Б. Сёкефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* — Мир, Москва (1970).
3. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* — Наука, Москва (1980).
4. B. Sz.-Nagy, *Diagonalization of matrices over H^∞.* — Acta Sci. Math. **38** (1976), 223–238.
5. P. Y. Wu, *$C_{\cdot 0}$ contractions: cyclic vectors, commutants and Jordan models.* — J. Operator Theory, **5** (1981), 53–62.
6. P. Y. Wu, *When is a contraction quasi-similar to an isometry*? — Acta Sci. Math. **44** (1982), 151–155.
7. В. В. Капустин, А. В. Липин, *Операторные алгебры и решетки инвариантных подпространств. I.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **178** (1989), 23–56.
8. В. В. Капустин, *Рефлексивность операторов: общие методы и критерий для почти изометрических сжатий.* — Алгебра и анализ **4**, no. 2 (1992), 141–160.

Gamal' M. F. Lattices of invariant subspaces for a quasiaffine transform of a unilateral shift of finite multiplicity.

Let T be a contraction, let S be a unilateral shift of finite multiplicity, and let X be an operator with zero kernel, dense range, and such that $XT = SX$. Then the mapping $E \mapsto \operatorname{clos} XE$, $E \in \operatorname{Lat} T$, is an isomorphism between the lattices $\operatorname{Lat} T$ and $\operatorname{Lat} S$ of invariant subspaces of T and S.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 18 октября 2002 г.