Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

Г. М. Губреев, М. Г. Волкова

БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ ВЕКТОР–ФУНКЦИЙ ПОЛОВИННОГО ПОРЯДКА РОСТА

Через $\Lambda^{(\exp)}$ обозначается [1] класс ограниченных операторов B в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условиям: 1) $\frac{1}{2i}(B - B^*) \geqslant 0$; 2) $\sigma(B) = \{0\}$, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$; 3) целая оператор-функция $(I - zB)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип.

В дальнейшем *квазикосинусом со значениями в пространстве* $\mathfrak{H}$ *называется произвольная вектор-функция вида*

$$c(z) := (I - zB^2)^{-1}g, \quad B \in \Lambda^{(\exp)}, \quad g \in \mathfrak{H}. \tag{1}$$

Отметим, что целая вектор-функция c имеет порядок роста $1/2$ и нормальный тип. Работа посвящена описанию безусловных базисов в $\mathfrak{H}$ вида

$$\Big\{c(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\Big\}, \tag{2}$$

где c – произвольный квазикосинус. Другими словами, задача состоит в нахождении операторов $B \in \Lambda^{(\exp)}$, векторов $g \in \mathfrak{H}$ и последовательностей комплексных чисел Λ, при которых семейства (2) могут образовывать безусловные базисы гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, а также в описании всех таких базисов. Результаты работы находят применение при изучении спектральной структуры конечномерных возмущений операторов B^2, $B \in \Lambda^{(\exp)}$. Типичными представителями операторов этого класса являются несамосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля на конечном интервале.

1. Стандартные рассуждения показывают, что в случае безусловной базисности семейства (2) последовательность Λ совпадает с множеством корней некоторой целой функции Φ порядка роста $1/2$ и нормального типа, причем все корни функции Φ

простые. Потребуем сначала от последовательности Λ большего, предположив, что она есть последовательность типа L. В следующем определении (и далее) через $\sqrt{z}$ обозначается ветвь, которая отображает плоскость с разрезом вдоль луча $\mathbb{R}_+$ на нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-$.

Определение 1. *Последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, *лежащая в некоторой криволинейной полосе* $-\delta < \operatorname{Im}\sqrt{z} < -\Delta$ $(\Delta, \delta > 0)$, *называется последовательностью типа* L, *если она совпадает с множеством простых корней такой целой функции* Φ *половинного порядка роста и нормального типа, что*

$$0 < m \leqslant |\Phi(x)| \leqslant M, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Опираясь на результаты работы [2] о корнях функций типа синуса, легко привести примеры последовательностей типа L. Например, такой последовательностью будет произвольное множество чисел вида

$$\left(\frac{2\pi k}{\sigma} + \alpha i + \beta + \gamma_k\right)^2, \quad \alpha < 0, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{2\pi}{\sigma}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где последовательность $\{\gamma_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству l_p, $p > 1$, и такова, что это множество попадает в указанную криволинейную полосу.

Определение 2. *Квазикосинус* c *со значениями в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$ *называется регулярным, если существует такая последовательность* Λ *типа* L, *что семейство* (2) *образует безусловный базис пространства* $\mathfrak{H}$.

Приведем одну конструкцию [3] регулярных квазикосинусов со значениями в пространстве $L_2(0,\sigma), \sigma > 0$. Пусть w^2 – произвольный A_2-вес Макенхаупта на луче $\mathbb{R}_+$ [4]. Тогда существует аналитическая в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ функция w_-, удовлетворяющая условиям:

а) функция $w_-(z^2)$ внешняя в области $\mathbb{C}_-$;

б) существуют некасательные предельные значения $w_-(x \pm i0)$ такие, что

$$|w_-(x - i0)|^2 \overset{\text{п.в.}}{=} |w_-(x + i0)|^2 \overset{\text{п.в.}}{=} w^2(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Функция w_-, определяемая условиями а), б) с точностью до мультипликативной унимодулярной постоянной, допускает интегральное представление

$$w_-(z) = z^{3/4}\int_0^\infty e^{-i\sqrt{z}t}y_w(t)\,dt, \quad z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+,$$

где $y_w\in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$ (см. [3]). Формула

$$c_w(z,t) := \frac{d}{dt}\int_0^t y_w(t-s)\cos\sqrt{z}\,s\,ds \tag{3}$$

каждому A_2-весу Макенхаупта w^2 на $\mathbb{R}_+$ относит квазикосинус $c_w(z,t)$ со значениями в каждом пространстве $L_2(0,\sigma), \sigma>0$. В самом деле, равенство (3) есть частный случай формулы (1), в которой следует положить:

$$\mathfrak{H} = L_2(0,\sigma),\ B = J_\sigma,\ (J_\sigma h)(t) := i\int_0^t h(s)\,ds,\ g(t) = y_w(t),\ 0\leqslant t\leqslant\sigma.$$

В дальнейшем вектор-функцию $c_w(z,t)$ будем называть квазикосинусом, порожденным весом Макенхаупта w^2 на $\mathbb{R}_+$ или, коротко, w-квазикосинусом. В случае степенного веса

$$w^2(x) = x^\omega, \quad -1<\omega<1, \quad x\in\mathbb{R}_+,$$

имеем $y_w(t) = \Gamma^{-1}(\mu)t^{\mu-1},\ \mu = 3/2-\omega$ [3]. Поэтому из (3) вытекает, что в этом случае

$$c_w(z,t) = \Gamma^{-1}(\mu)\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\mu-1}\cos\sqrt{z}\,s\,ds = t^{\mu-1}E_{1/2}(-zt^2;\mu),$$

где целая функция $E_{1/2}(\lambda;\mu)$ определяется разложением

$$E_{1/2}(\lambda;\mu) := \sum_{n\geqslant 0}\Gamma^{-1}(\mu+2n)\lambda^n.$$

В частности, если $w^2(x) = x^{1/2}$, то

$$c_w(z,t) = \cos\sqrt{z}\,t,$$

что, на наш взгляд, оправдывает термин “квазикосинус” для общих вектор-функций вида (1).

Теорема 1. *Для произвольного веса Макенхаупта w^2 на $\mathbb{R}_+$ w-квазикосинус $c_w(z,t)$ со значениями в каждом пространстве $L_2(0,\sigma)$, $\sigma > 0$, регулярен.*

Действительно, в качестве последовательности Λ типа L возьмем множество корней функции $\Phi(z) = \cos\sqrt{z}\sigma + A$, $|A| > 1$. Из результатов работы [3] вытекает, что соответствующее семейство w-квазикосинусов $\{c_w(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \Lambda\}$ (для каждого A_2-веса w^2 на $\mathbb{R}_+$) образует безусловный базис пространства $L_2(0,\sigma)$, то есть квазикосинус $c_w(z,t)$ регулярен.

Определение 3. *Две вектор-функции c_k со значениями в сепарабельных гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_k$ $(k = 1, 2)$ называются изоморфными, если существует такой непрерывный и непрерывно обратимый оператор S из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, что $Sc_1(z) = c_2(z)$, $z \in \mathbb{C}$.*

Очевидно, что свойство квазикосинуса быть регулярным сохраняется при изоморфных преобразованиях. Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 2. *Квазикосинус c со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве регулярен тогда и только тогда, когда вес $w^2(x) := x^{1/2}\|c(x)\|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}_+$ и функция c изоморфна w-квазикосинусу $c_w(z,t)$ со значениями в пространстве $L_2(0,\sigma)$, где σ – тип вектор-функции c при порядке $1/2$.*

2. Основная трудность в доказательстве теоремы 2 заключается в том, чтобы установить, что вес $w^2(x) = x^{1/2}\|c(x)\|^2$ является A_2-весом. Для этого сначала доказывается, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} w^{\pm 2}(x)(1+x^2)^{-1}\,dx < \infty.$$

Поэтому существует аналитическая в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ функция w_-, удовлетворяющая уже упоминавшимся при построении w-квазикосинусов (п.1) условиям а) -б). Далее, если квазикосинус c регулярен, то имеют место оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{w^{\pm 2}(x)}{|x-z|^2}\,dx \leqslant M\frac{|w_-(z)|^{\pm 2}|z|^{1/2}}{|\operatorname{Im}\sqrt{z}|}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+,$$

которые являются основой всего доказательства. Соединяя их с некоторыми результатами работы [5], заключаем, что вес w^2 удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}_+$.

Отметим также, что в процессе доказательства теоремы 2 попутно получен следующий важный для приложений результат.

Теорема 3. *Если квазикосинус c со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ регулярен, то существуют такие константы m, M $(0 < m \leqslant M < \infty)$, что*

$$m\|h\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^{-1/2} \left| \Big(c(x), h\Big)_{\mathfrak{H}} \right|^2 \|c(x)\|^{-2} dx \leqslant M\|h\|^2_{\mathfrak{H}}$$

для всех $h \in \mathfrak{H}$.

Другими словами, если из значений квазикосинуса можно составить безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то ядро $c(x)$ порождает непрерывное и непрерывно обратимое "интегральное преобразование", обобщающее cos-преобразование Фурье.

В качестве приложения теоремы 2 рассмотрим задачу отыскания регулярных квазикосинусов среди вектор-функций вида

$$c(z,t) := \frac{d}{dt} \int\limits_0^t g(t-s) \cos \sqrt{z}\, s\, ds \, \Big(= (I - zJ^2_\sigma)^{-1} g \Big), \quad g \in L_2(0, \sigma), \tag{4}$$

со значениями в пространстве $L_2(0,\sigma)$. Напомним, что если для некоторого веса Макенхаупта w^2 на полуоси $\mathbb{R}_+$ справедлива формула

$$g(t) = y_w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \sigma,$$

то квазикосинус (4) регулярен (теорема 1). Задача состоит в описании всех функций $g \in L_2(0,a)$, для которых квазикосинусы вида (4) регулярны.

Обозначим через V множество аналитических в $\mathbb{C}_-$ функций

$$v(z) = s(z) z^{-1/2} w_-(z^2), \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

где: 1) $s \in H^\infty_-$, причем $0 < m \leqslant |s(x - i0)|$, $x \in \mathbb{R}$;

2) w_- – аналитическая в $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$ функция такая, что:

a) $w_-(z^2)$ – внешняя в $\mathbb{C}_-$;

б) существуют некасательные предельные значения $w_-(x \pm i0)$, $x \in \mathbb{R}_+$, и вес

$$w^2(x) :\overset{\text{п.в.}}{=} |w_-(x-i0)|^2 \overset{\text{п.в.}}{=} |w_-(x+i0)|^2, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

удовлетворяет A_2-условию на $\mathbb{R}_+$;

3) $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}_-} \Big\{|s(z)| + |e^{-iaz}|\Big\} > 0.$

Отметим также, что $-\pi < \arg z < 0$, если $z \in \mathbb{C}_-$. Каждая функция $v \in V$ представима в виде

$$v(z) = z\int\limits_0^\infty e^{-izt} g(t)\,dt, \quad g \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+).$$

Получаемое таким образом множество функций g обозначим через $\mathcal{M}$, а $\mathcal{M}_\sigma$ – это множество сужений функций g из $\mathcal{M}$ на сегмент $[0,\sigma]$.

Из теорем 1, 2 вытекает, что квазикосинус $c(z,t)$ регулярен тогда и только тогда, когда $g = Sy_w$, $SJ_\sigma^2 = J_\sigma^2 S$, где S – автоморфизм пространства $L_2(0,\sigma)$, w^2 – некоторый A_2-вес на $\mathbb{R}$. Поскольку $SJ_\sigma = J_\sigma S$, получаем формулу для искомых функций g:

$$g = Sy_w, \quad SJ_\sigma = J_\sigma S, \quad \|S\| < \infty, \quad 0 \notin \sigma(S).$$

Теперь из теоремы Сарасона о коммутанте [6] и теоремы о короне [7] вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Произвольный квазикосинус вида* (4) *со значениями в пространстве* $L_2(0,\sigma)$ *регулярен тогда и только тогда, когда* $g \in \mathcal{M}_\sigma$.

Пусть Φ – целая функция, фигурирующая в определении последовательности типа L.

Следствие. *Пусть* $c(z,t)$ – *вектор-функция, определенная формулой* (4). *Семейство функций* $\Big\{c(\lambda_k,t) : \lambda_k \in \Lambda\Big\}$, *где* Λ – *произвольная последовательность типа* L, *тогда и только тогда образует безусловный базис пространства* $L_2(0,\sigma)$, *когда выполнены условия:*

1) $g \in \mathcal{M}_\sigma$; 2) $\limsup\limits_{r\to\infty} r^{-1/2}\log|\Phi(-r)| = \sigma$;

3) $\inf\limits_{k\neq j} |\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_j}| > 0.$

3. В этом пункте дается описание всех безусловных базисов гильбертова пространства, составленных из значений произвольного регулярного квазикосинуса.

В дальнейшем используются следующие обозначения. Если Λ – последовательность комплексных чисел, то положим

$$Z := \{z_k = \sqrt{\lambda_k}, \lambda_k \in \Lambda\}, \quad -2\pi < \arg \lambda_k \leqslant 0. \tag{5}$$

Если некоторая прямая $\mathbb{R} - i\delta := \{x - i\delta,\, x \in \mathbb{R}\}$, $\delta > 0$, лежит на положительном расстоянии от множества Z, то введем в рассмотрение последовательности

$$Z_\delta^+ := \{z_k \in Z : \operatorname{Im} z_k > -\delta\}, \quad Z_\delta^- := \{z_k \in Z : \operatorname{Im} z_k < -\delta\},$$
$$-Z_\delta^+ := \{-z_k : z_k \in Z_\delta^+\}. \tag{6}$$

Через γ_δ обозначается парабола, задаваемая параметрическим уравнением

$$z(t) = (t - i\delta)^2, \quad \delta > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Говорят, что вес $W(z) \geqslant 0$ на параболе γ_δ удовлетворяет условию $(A^2_{\gamma_\delta})$, если [4]

$$\sup_{z\in\gamma_\delta}\sup_{r>0}\left\{r^{-1}\int\limits_{B(z,r)\cap\gamma_\delta} W(z)|dz|\; r^{-1}\int\limits_{B(z,r)\cap\gamma_\delta} W^{-1}(z)|dz|\right\} < \infty, \tag{$A^2_{\gamma_\delta}$}$$

где $B(z,r)$ – круг с центром z радиуса r.

Как уже отмечалось, если семейство (2) образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то Λ совпадает с множеством простых корней целой функции Φ порядка роста $1/2$ и нормального типа, *которая называется порождающей функцией этого семейства.* Она однозначно определяется последовательностью Λ:

$$\Phi(z) = \prod_{\lambda_k\in\Lambda}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

В следующей ниже формулировке последовательности Z, $Z_\delta^\pm$ строятся по множеству Λ всех корней порождающей функции Φ (формулы (5),(6)), $\mathbb{R} - i\delta$, $\delta > 0$, – какая-нибудь прямая, лежащая на положительном расстоянии от Z. Отметим, что случаи

$Z_\delta^+ = \varnothing$ или $Z_\delta^- = \varnothing$ не исключаются. Аналитическая в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ функция w_- удовлетворяет условиям а), б) (п.1) и отвечает весу Макенхаупта w^2 на $\mathbb{R}_+$. И, наконец, через σ обозначается тип квазикосинуса c при порядке $1/2$. Из результатов работы [8] выводится следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть c – регулярный квазикосинус со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $w^2(x) = x^{1/2}\|c(x)\|^2$ – отвечающий ему A_2-вес на $\mathbb{R}_+$, Φ – порождающая функция семейства $\{c(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\}$. Для того, чтобы это семейство было безусловным базисом пространства $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\int\limits_{\mathbb{R}_+} |\Phi(x) - \Phi(0)|^2 x^{-2} w^{-2}(x)\, dx < \infty$;

2) $\limsup\limits_{r\to\infty} r^{-1/2} \log|\Phi(-r)| = \sigma$;

3) *последовательность $Z_\delta^+ \cup (-Z_\delta^+)$ разделена:*

$$\inf_{k\neq j} |u_k - u_j| > 0, \quad u_k \in Z_\delta^+ \cup (-Z_\delta^+);$$

4) *последовательность Z_δ^- удовлетворяет условию Карлесона:*

$$\inf_k \prod_{j\neq k} \Big\{ |z_k^- - z_j^-|\, |z_k^- - \overline{z_j^-}|^{-1} \Big\} > 0, \quad Z_\delta^- = \{z_k^-\};$$

5) *вес $W(z) := |w_-(z)|^{-2}|\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A^2_{\gamma_\delta})$.*

4. Для приложений сформулированных результатов необходимо иметь простые критерии, гарантирующие регулярность квазикосинуса c. Мы сформулируем здесь один из таких результатов.

Предположим, что для вектора $g \in B\mathfrak{H} + B^*\mathfrak{H}$ выполняются следующие условия:

I. Существуют $a \in \mathbb{C}$ и вектор $f \in B\mathfrak{H} + B^*\mathfrak{H}$ такие, что корни целой функции экспоненциального типа

$$F(z) = a - z\Big((I - zB)^{-1} g, f\Big)$$

лежат над прямой $\mathbb{R} + bi$, $b \in \mathbb{R}$, и $0 < m \leqslant |F(x + bi)| \leqslant M$, $x \in \mathbb{R}$.

II. Оператор $\operatorname{Im} B := \frac{1}{2i}(B - B^*)$ является ядерным и ширина индикаторной диаграммы функции F равна $2\operatorname{Sp}\operatorname{Im} B$.

Теорема 6. *Пусть $g \in B\mathfrak{H} + B^*\mathfrak{H}$ и выполнены условия* I, II. *Тогда вектор g принадлежит области определения оператора $B^{\mu-1}$ при $\mu > 1/2$, а квазикосинус*

$$c_\mu(z) := (I - zB^2)^{-1} g_\mu, \quad g_\mu := B^{\mu-1} g,$$

регулярен тогда и только тогда, когда $1/2 < \mu < 5/2$. Более того, квазикосинус c_μ изоморфен квазикосинусу $c_\mu(z,t) := t^{\mu-1}E_{1/2}(-zt^2;\mu)$ со значениями в $L_2(0,\sigma)$, $\sigma = 2\mathrm{Sp}\,\mathrm{Im}\,B$.

Литература

1. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* М., 1969.
2. Б. Я. Левин, И. В. Островский, *О малых возмущениях множества корней функций типа синуса.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **43**, № 1 (1979), 87–110.
3. Г. М. Губреев, *Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **190** (1991), 34–80.
4. Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер, *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения.* — Итоги науки и техники, матем. анализ. **21** (1983), 42–129.
5. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, *Weigted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* — Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.
6. D. Sarason, *Generalized interpolation in H^∞.* — Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179–203.
7. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* М., 1980.
8. G. M. Gubreev, M. G. Volkova, *On a class of unconditional bases in weighted spaces of the entire functions whose order of growth is equal to 1/2 and on their applications.* — Methods of funct. analysis and topology **7**, No. 3 (2001), 22–32.

Gubreev G. M., Volkova M. G. Hilbert space unconditional bases formed by values of an entire vector-function of order 1/2.

Let B be a dissipative Volterra operator in a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ such that the resolvent $(I - zB)^{-1}$ has finite exponential type. A complete description is given of the operators B with the above properties, vectors $g \in \mathfrak{H}$, and sequences Λ of complex numbers such that the family

$$(I - \lambda_k B^2)^{-1}, \quad \lambda_k \in \Lambda,$$

forms an unconditional basis in $\mathfrak{H}$.

Южноукраинский
педагогический университет
г. Одесса
E-mail: varv@rambler.ru

Поступило 6 июня 2002 г.