Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

А. М. Коточигов

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВ СВОБОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

1. Введение и формулировки результатов. Известно, что структура множеств свободной интерполяции остается неизменной для больших семейств пространств аналитических функций и определятся гладкостью граничных значений функций рассматриваемого класса. Но при некоторых изменениях гладкости она может меняться скачком. Целью настоящей работы является описание того, как можно сгладить эти переходы, подбирая подходящие классы промежуточных пространств. Кроме того, будет показано, что для множеств, удовлетворяющих необходимому условию интерполяции, справедлива оценка типа условия Макенхаупта. Интерес к этой оценке связан с тем, что неравенства такого рода часто лежат в основе достаточности этих условий.

Перейдем к точной постановке задачи свободной интерполяции. Пусть заданы пространство X_a аналитических в области G функций, множество E, содержащееся в замыкании области G, и пространство $X(E)$ функций, заданных на множестве E и не связанных условиями аналитичности. Множество E называется *множеством свободной интерполяции*, если сужение на него функций класса X_a порождает весь класс $X(E)$, т.е. при сужении на это множество теряются следы аналитичности. Современный этап изучения задач свободной интерполяции начался с замечательного результата Карлесона [1].

Теорема Карлесона. *Множество $E = \{z_n\}$, лежащее в единичном круге, является интерполяционным для пространства H^∞, состоящего из всех аналитических ограниченных в круге функций, и для пространства ограниченных функций на множестве E (в качестве $X(E)$) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет* *условию:*

$$\inf_n \prod_{k\neq n} \frac{|z_k - z_n|}{|1 - z_k \overline{z}_n|} > 0. \tag{1}$$

Условие (1), возникшее в теореме, оказалось универсальным и получило название *условие Карлесона*. Оно постоянно возникает при решении задач свободной интерполяции и в целом ряде других вопросов. С переходом к пространствам аналитических функций, гладких вплоть до границы, естественно возникает вопрос об интерполяции на границе. Первым результатом в этом направлении стала теорема Рудина–Карлесона об интерполяции в диск-алгебре, пространстве аналитических в круге функций, непрерывных в его замыкании [2].

Теорема Рудина–Карлесона. *Множество E, лежащее в замыкании круга D, является интерполяционным для диск-алгебры и пространства непрерывных функций на множестве E (в качестве $X(E)$) тогда и только тогда, когда:*

1) *$E \cap D$ удовлетворяет условию Карлесона,*

2) *$E \cap \partial D$ является множеством меры ноль.*

Условие Карлесона проявляет здесь свою универсальность, а условие на граничную часть интерполяционного множества оказывается тривиальным: любое множество неединственности является интерполяционным. Однако, повышение гладкости граничных значений резко меняет эту картину. В работе автора [3] было показано, что для гёльдеровских пространств аналитических функций и для пространств функций с производной из классов Харди необходимым условием интерполяции оказывается *условие пористости* множества E: существует постоянная d такая, что на любой дуге окружности J найдется дуга I, обладающая следующими свойствами:

$$1) \quad E \cap I = \varnothing, \qquad 2) \quad d \cdot |I| \geq |J|. \tag{2}$$

Далее мы ограничимся рассмотрением пространств Гёльдера и близких к ним пространств, определяемых в терминах модулей непрерывности. Эти классы естественны и удобны для решения поставленной нами задачи.

Определение 1. *Класс Гёльдера с показателем* α, $0<\alpha\le 1$, *вводится следующим образом:*

$$\Lambda^{\alpha}(E)=\left\{f\in C(E):\sup\left\{\frac{|f(e_1)-f(e_2)|}{|e_1-e_2|^{\alpha}}\right\}<\infty, e_1,e_2\in E\right\}.$$

Аналитические классы Гёльдера определяются так:

$$\Lambda_a^{\alpha}=\{f\in\Lambda^{\alpha}(\overline{D}):f\text{ – аналитическая функция в круге } D\}.$$

Пусть ω *произвольный модуль непрерывности, тогда*

$$\Lambda^{\omega}(E)=\left\{f\in C(E):\sup\left\{\frac{|f(e_1)-f(e_2)|}{\omega(|e_1-e_2|)}\right\}<\infty, e_1,e_2\in E\right\};$$

аналогично определяется пространство аналитических функций Λ_a^{ω}.

Другой критической точкой оказался переход от показателей $\alpha<1$ к $\alpha=1$. В работе [4] было показано, что в первом случае часть интерполяционного множества, лежащая внутри круга, должна быть редкой, а во втором она может быть объединением двух редких множеств. Напомним определение. Множество $E\subset D$ удовлетворяет *условию редкости*, если:

$$\inf\left\{\frac{|e_1-e_2|}{|1-e_1\overline{e}_2|}:e_1\ne e_2,\ e_1,e_2\in E\right\}>0. \tag{3}$$

Оказалось, что эти условия являются и достаточными для интерполяции во многих пространствах аналитических функций, гладких вплоть до границы. Дынькин [5] дал полное решение задачи интерполяции для целого ряда семейств пространств аналитических функций, в том числе и для классов Гёльдера. В той же работе показано, что для множеств, граничная часть которых является пористой, условие Карлесона эквивалентно более простому условию редкости.

Теорема Дынькина. *Множество* E, *лежащее в замыкании круга* D, *является интерполяционным для пространств* Λ_a^{α}, $\Lambda^{\alpha}(E)$ *при* $0<\alpha<1$ *тогда и только тогда, когда*

1) *внутренняя часть множества* E, *т.е.* $E\cap D$, *удовлетворяет условию редкости,*
2) *граничная часть множества* E, *т.е.* $E\cap\partial D$, *является пористым множеством.*

Случай $\alpha = 1$. *Множество E, лежащее в замыкании круга D, является интерполяционным для пространств $\Lambda^1_a(D)$, $\Lambda^1(E)$ тогда и только тогда, когда*

1) *внутреннюю часть множества E можно представить в виде объединения двух редких множеств,*
2) *граничная часть множества E является пористым множеством.*

Сглаживание этих скачков оказывается возможным при переходе к более тонкой шкале пространств, порождаемой модулями непрерывности. Для этой шкалы справедлив аналог теоремы Дынькина. Широков [6] доказал следующее утверждение

Теорема Широкова. *Пусть для модуля непрерывности ω существует постоянная ε такая, что*

$$\frac{\omega(y)}{\omega(x)} \geq \left(\frac{y}{x}\right)^{\varepsilon}, \quad 0 < x \leq y, \tag{4}$$

Множество E, лежащее в замыкании круга D, является интерполяционным для пространств $\Lambda^\alpha_a(D)$, $\Lambda^\alpha(E)$ тогда и только тогда, когда

1) *множество $E \cap D$ можно представить как объединение двух редких множеств E_1 и E_2, и кроме того любая точка $e \in E \cap D$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\operatorname{dist}(e, E \setminus \{e\})}{1 - |e|} \geq C \, \frac{\omega(\operatorname{dist}(e, E \setminus \{e\}))}{\omega(1 - |e|)} \tag{5}$$

2) *граничная часть множества E, т.е. $E \cap \partial D$, является пористым множеством.*

Легко видеть, что теорема Широкова является прямым обобщением теоремы Дынькина. Если $\omega(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то условие (4) выполнено. Далее, при $0 < \alpha < 1$ условие (5) превращается в условие редкости, а при $\alpha = 1$ условие (5) вырождается и в качестве множества E можно брать объединение двух любых редких множеств.

В работе автора [7] показано, что для любой возрастающей функции γ, $\gamma(0) = 0$, найдется модуль непрерывности, для которого интерполяционные множества описываются условиями:

1) $E \cap D = E_1 \cup E_2$, E_1 и E_2 редкие множества и

$$\operatorname{dist}(e, E \setminus \{e\}) \geq C\gamma(1 - |e|),$$

2) $E \cap \partial D$ является пористым множеством.

Таким образом мы получаем плавный переход от интерполяционных множеств для пространств Гёльдера с показателем $\alpha < 1$ (внутренняя часть – редкое множество) к интерполяционным множествам, возникающим при $\alpha = 1$ (внутренняя часть – объединение двух редких множеств). Мы покажем, что в таком же ключе можно построить плавный переход от пористых множеств (интерполяционных для классов Гёльдера) к замкнутым множествам меры ноль (интерполяционных для диск-алгебры). Из теоремы Широкова следует, что для этого надо иметь дело с модулями непрерывности, не удовлетворяющими условию (4). Такие модули непрерывности мы будем называть *слабыми модулями непрерывности*. Примером такого модуля может служить функция $\omega(x) = -\frac{1}{\log x}$.

Всюду далее мы предполагаем, что интерполяционное множество E является подмножеством граничной окружности.

Теорема Широкова дает полное описание интерполяционных множеств для пространств Λ_a^ω, когда модуль непрерывности удовлетворяет условию (4). Наша цель получить необходимые условия для оставшихся – слабых модулей непрерывности. Но рассматривать слабые модули непрерывности отдельно нет необходимости. Приводимые ниже формулировка и доказательство никак не используют специфику слабых модулей непрерывности, а окончательный результат для модулей непрерывности, удовлетворяющих условию (4), превращается в условие пористости. Для того, чтобы получить описание структуры интерполяционных множеств, надо модифицировать определение пористости.

Определение 2. *Пусть ω – произвольный модуль непрерывности. Множество E, лежащее на граничной окружности, назовем ω-пористым, если существует постоянная d такая, что на любой дуге окружности J найдется дуга I такая, что*

$$1) \quad E \cap I = \emptyset, \qquad 2) \quad d \cdot \omega(|I|) \geq \omega(|J|). \tag{6}$$

У ω-пористого множества отношение размера поры дуги I к размеру несущей дуги J может стремиться к нулю как угодно быстро, и это позволяет любое замкнутое множество меры ноль интерпретировать как ω-пористое множество. Ниже будет приведен алгоритм, реализующий это утверждение.

Есть все основания полагать, что это условие окажется и достаточным для интерполяции. Существенным шагом в этом направлении является доказанный здесь аналог *неравенства Дынькина* [5], утверждающего, что для любого пористого множества найдется постоянная ε такая, что для любой дуги J выполнено неравенство

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\operatorname{dist}(z,E)} \le |J|^{1-\varepsilon}.$$

Мы докажем, что при некоторых несущественных ограничениях на модуль непрерывности для любого ω-пористого множества выполнено неравенство

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z,E))} \le \frac{|J|}{\omega(|J|)}.$$

Так как для любого модуля непрерывности справедлива оценка $\omega(x) \ge x$, то это неравенство можно рассматривать как условие Макенхаупта (A_2) для соответствующей меры:

$$\frac{1}{|J|}\int\limits_J \omega(x)dx \cdot \frac{1}{|J|}\int\limits_J \frac{dx}{\omega(x)} \le C.$$

Неравенство превращается в аналог неравенства Дынькина, если положить в нем $\omega(x) = x^\alpha$. Но даже для этого случая приведенное здесь доказательство является новым. Упомянутые выше ограничения на модуль непрерывности связаны с тем, что для $\omega(x) = x$ такая оценка по очевидным причинам невозможна. Для того, чтобы оценка могла быть справедлива, надо ввести дополнительные условия, исключающие эту крайность. С этой целью введем следующее

Определение 3. *Модуль непрерывности ω будем называть регулярным, если существует такое положительное число Δ, что для любого числа $q \in (0,1)$ и чисел a и b, таких, что $\omega(b) = q\omega(a)$, справедливо неравенство*

$$\frac{b}{a} \le q^{1+\Delta}.$$

2. Необходимость условия ω-пористости.

Теорема 1. *Пусть E – замкнутое подмножество окружности $T = \partial D$ и модуль непрерывности таков, что функция $\omega(x)/x$ убывает. Если E – интерполяционное множество, то оно удовлетворяет условию ω-пористости.*

Доказательство. Фиксируем дугу J на T и обозначим через I дугу другой окружности, проходящей через конечные точки дуги J и ортогональной окружности T. Рассмотрим область K, ограниченную этими дугами и лежащую в круге D. В области K имеется естественный центр – точка $z_0 \in K$ такая, что

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial K) \asymp \operatorname{diam} K, \qquad \int\limits_J d\omega_{z_0} \asymp \int\limits_I d\omega_{z_0},$$

здесь ω_{z_0} – гармоническая мера на границе области K относительно точки z_0. Введем в рассмотрение пробную функцию $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ и оценим ее норму в пространстве $\Lambda^\omega(E)$. Фиксируем точки z_1, $z_2 \in K \cap E$ и рассмотрим приращение функции

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_0||z_2 - z_0|} \leq C_1 \frac{|z_1 - z_2|}{|J|^2} \leq \frac{\omega(|z_1 - z_2|)}{|J|\omega(|J|)},$$

здесь мы воспользовались тем, что функция $\frac{\omega(x)}{x}$ убывает. Полученная оценка гарантирует, что $||f|| \asymp \frac{1}{|J|\omega(|J|)}$. Так как множество E является интерполяционным, то найдется функция $h \in \Lambda^\omega_a$ такая, что $h(z) = f(z)$ при $z \in E$ и $||h|| \asymp \frac{1}{|J|\omega(|J|)}$. Оценим функцию h в области K. По построению $|h(z_1)| = \frac{1}{|z_1 - z_0|}$, следовательно

$$|h(z)| \leq |h(z_1)| + |h(z) - h(z_1)| \leq \frac{C}{|J|} + \frac{C}{|J|\omega(|J|)} \omega(|z - z_1|) \leq \frac{C}{|J|}.$$

Введем в рассмотрение функцию $g(z) = 1 - (z - z_0)h(z)$. Очевидно, что $g(z_0) = 1$ и $g(z_1) = 0$ при любом $z_1 \in E \cap K$. Легко видеть, что функция g ограничена на множестве K: $|g(z)| \leq 1 + |J||h(z)| \leq C$. Уточним эту оценку, пользуясь тем, что $g(z_1) = 0$ при $z_1 \in E \cap K$:

$$|g(z)| \leq |g(z) - g(z_1)| =$$

$$|(z - z_0)h(z) - (z_1 - z_0)h(z) + (z_1 - z_0)h(z) - (z_1 - z_0)h(z_1)| \leq$$

$$|h(z)||z - z_1| + |z_1 - z_0||h(z) - h(z_1)| \leq \frac{C}{|J|}|z - z_1| + |J| \frac{C}{|J|\omega(|J|)} \omega(|z - z_1|) \leq$$

$$C\frac{\omega(\mathrm{dist}(z,E))}{\omega(|J|)}.$$

Функция $\log|g(z)|$ субгармонична в области K и, следовательно,

$$\int\limits_{\partial K} \log|g(z)|d\omega_{z_0} \geq \log|g(z_0)| = 0.$$

Продолжая оценки, получим

$$0 \leq \int\limits_{\partial K} \log|g(z)|d\omega_{z_0} = \int\limits_{J} \log|g(z)|d\omega_{z_0} + \int\limits_{I} \log|g(z)|d\omega_{z_0} \leq$$

$$\log C\int\limits_J d\omega_{z_0} + \log\max_I\left(\frac{\omega(\mathrm{dist}(z,E))}{\omega(|J|)}\right)\int\limits_I d\omega_{z_0}.$$

Обозначим $a = \int_J d\omega_{z_0}$ и $b = \int_I d\omega_{z_0}$. Напомним, что по построению $a \asymp b$, и перепишем оценку в виде

$$0 \leq \log\left[C^a \max_I\left(\frac{\omega(\mathrm{dist}(z,E))}{\omega(|J|)}\right)^{\gamma b}\right].$$

Следовательно

$$\max_I\left(\frac{\omega(\mathrm{dist}(z,E))}{\omega(|J|)}\right) \geq C^{-\frac{a}{\gamma b}},$$

т.е. для дуги J выполнено условие ω-пористости. □

3. Неравенство Дынькина для ω-пористых множеств.

Теорема 2. *Пусть ω – регулярный модуль непрерывности, E – замкнутое ω-пористое подмножество окружности. Тогда существует постоянная C такая, что для любой дуги $J \subset T$ справедлива оценка*

$$\sigma_\omega(E,J) = \int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\mathrm{dist}(z,E))} \leq C\frac{|J|}{\omega(|J|)}. \qquad (7)$$

Теорема будет доказана в несколько этапов. Мы введем некоторые количественные характеристики модулей непрерывности, в терминах которых удобно проводить нужные оценки. Затем будут определены канонические ω-пористые множества, являющиеся естественным обобщением канторовских множеств. На совокупности всех ω-пористых множеств будет введена частичная упорядоченность и доказано, что канонические множества оказываются в ней минимальными элементами. Это позволит доказать, что наибольшее значение интеграла $\sigma_\omega(E, J)$ достигается на каноническом множестве. Завершается доказательство проверкой неравенства (7) для канонического множества.

Обозначим через $\{l_n\}$ совокупность дуг дополнения множества E на окружности. Условие ω-пористости допускает очевидную переформулировку в терминах дуг дополнения, а именно: для любой дуги J найдется дуга дополнения l_n такая, что

$$d \cdot \omega(|l_n \cap E|) \geq \omega(|J|).$$

Покажем, что величина $\sigma_\omega(E, J)$ достигает наибольшего значения на множествах регулярной структуры, описание которых будет приведено ниже. Первый, очевидный, но важный шаг в доказательстве неравенства (7) – оценка для локального переноса.

Предложение 1. *Пусть a, b, δ – положительные числа и $a > b+\delta$. Тогда*

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{\omega(x)} + \int\limits_0^b \frac{dx}{\omega(x)} \geq \int\limits_0^{a-\delta} \frac{dx}{\omega(x)} + \int\limits_0^{b+\delta} \frac{dx}{\omega(x)}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $1/\omega(x)$ убывает, и, следовательно, интеграл по отрезку $[a-\delta, a]$ меньше интеграла по отрезку $[b, b+\delta]$. □

Отметим, что величина $\sigma_\omega(E, J)$ не зависит от взаимного расположения интервалов дополнения и полностью определяется числовой последовательностью $\{|l_n|\}$. Это позволяет нам ввести обозначение $\sigma_\omega(\{|l_n|\}) = \sigma_\omega(E, J)$.

Следствие 1. *Пусть задан набор дуг $\{l_n\}$, из которого выбраны две дуги l_m и l_k такие, что $|l_m| \geq |l_k| + \delta$. Образуем новую систему дуг $\{\widetilde{l}_n\}$, присоединяя часть дуги l_m к дуге l_k так, что $|\widetilde{l}_m| = |l_m| - \delta$ и $|\widetilde{l}_k| = |l_k| + \delta$, и сохраняя все остальные дуги неизменными. Тогда справедлива оценка $\sigma_\omega(\{|l_n|\}) \leq \sigma_\omega(\{|\widetilde{l}_n|\})$.*

Введем упорядочение на множестве всех замкнутых подмножеств окружности нулевой меры.

Определение 4. *Пусть E_1 и E_2 – замкнутые подмножества окружности нулевой меры, $\{l_n^{(k)}\}$ – набор дуг дополнения множества E_k. При этом здесь и всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что нумерация дуг монотонная, т.е. $|l_n^{(k)}| \geq |l_{n+1}^{(k)}|$. Будем говорить, что множество E_1 подчинено множеству E_2, $E_1 \prec E_2$, если выполнены следующие соотношения:*

$$|l_1^{(1)}| = |l_1^{(2)}|,\ |l_2^{(1)}| = |l_2^{(2)}|, \cdots, |l_{m-1}^{(1)}| = |l_{m-1}^{(2)}|, \quad |l_m^{(1)}| < |l_m^{(2)}|.$$

Опишем кандидата на наименьшее множество во введенном нами упорядочении.

Определение 5. *Пусть фиксированы дуга окружности J и постоянная d из условия ω-пористости. Каноническим ω-пористым множеством мы будем называть множество E_*, построенное по следующему правилу:*

$$J = J_{1,1} \cup L_{0,1} \cup J_{1,2},$$

дуги $J_{1,1}$ и $J_{1,2}$ назовем рабочими дугами первого поколения, а $L_{0,1}$ – дугой дополнения нулевого поколения, все они полностью определены следующими равенствами:

$$1) \quad d \cdot \omega(|L_{0,1}|) = \omega(|J|), \qquad 2) \quad |J_{1,1}| = |J_{1,2}|.$$

На каждой рабочей дуге k-го поколения процедура повторяется:

$$J_{k,m} = J_{k+1,2m-1} \cup L_{k,m} \cup J_{k+1,2m},$$

$$1) \quad d \cdot \omega(|L_{k,m}|) = \omega(|J_{k,m}|), \qquad 2) \quad |J_{k+1,2m-1}| = |J_{k+1,2m}|.$$

Предложение 2. *Пусть фиксированы дуга окружности J и постоянная d из условия ω-пористости. Тогда на множестве всех ω-пористых множеств с постоянной d в условии ω-пористости наименьшим множеством является каноническое, т.е. оно подчинено всем остальным.*

Доказательство. Фиксируем ω-пористое множество E, удовлетворяющее условиям предложения. Пусть $\{l_n\}$ – дуги дополнения этого множества (нумерация монотонная). Определение ω-пористости позволяет считать, что все l_n содержатся в J, в противном случае их можно подрезать по J. Возьмем соответствующее каноническое множество E_* и обозначим дуги его дополнения через $\{l_n^*\}$. Заметим, что по построению $|l_{2^k}^*| = \cdots = |l_{2^{k+1}-1}^*|$, поскольку речь идет о дугах одного поколения.

Доказательство проводится по индукции. Нам будет удобна следующая терминология: будем говорить, что дуга дополнения l_n *центрирована*, если она расположена на равном расстоянии от ближайших соседних дуг с меньшими номерами.

Из определения ω-пористости и канонического множества следует, что $|l_1| \geq |l_1^*|$. Случай, когда неравенство строгое, тривиален, так как это означает, что $E_* \prec E$. Остается рассмотреть случай $|l_1| = |l_1^*|$. Покажем, что если дуга l_1 не центрирована, то $E_* \prec E$. Пусть $J = j_l \cup l_1 \cup j_r$. Если условие центровки нарушено, то не умаляя общности можно считать, что $|j_r| > |J_{1,1}| = |J_{1,2}|$. Пусть l_p – наибольшая из дуг дополнения, лежащая на j_r. Условие ω-пористости гарантирует, что $d\cdot\omega(|l_p|) \geq \omega(|j_r|) > \omega(|J_{1,1}|) = d\cdot\omega(|l_1^*|)$. Условие монотонности нумерации гарантирует, что $|l_2| \geq |l_p|$. Монотонность функции ω позволяет объединить эти неравенства и получить оценку $|l_2| > |l_2^*|$ и, следовательно, соотношение $E_* \prec E$. Отметим, что попутно мы доказали, что либо $E_* \prec E$, либо дуги l_1 и l_1^* совпадают.

Сделаем индукционное предположение: пусть дуги l_p и l_p^* попарно совпадают при $p = 1, \cdots, m-1$. Надо показать, что тогда либо $E_* \prec E$, либо дуги l_m и l_m^* совпадают. Совпадению дуг может препятствовать различие длин ($|l_m| > |l_m^*|$) или отсутствие центровки. Возможность несовпадения, связанную с различными способами нумерации внутри одного поколения, мы исключаем, проводя, если необходимо, перенумерацию. Первый случай тривиален, и остается показать, что в отсутствии центровки $E_* \prec E$. Подберем число r так, что $2^{r-1} \leq m < 2^r$. Ясно, что все наибольшие дуги дополнения множества E, лежащие на рабочих дугах $(r-1)$-го поколения канонического множества, имеют ту же (минимальную) длину, что и дуга l_m. Пользуясь отмеченной выше свободой в нумерации дуг одинаковой длины, мы можем считать, что все дуги l_p, $m < p < 2^r$, – это наибольшие дуги на рабочих интервалах $(r-1)$-го поколения. Если предположить, что выделенная нами дуга l_m не центрирована, то, рассуждая, как и в начале доказательства, на большей из рабочих дуг, примыкающих к l_m, мы найдем дугу l_s, $s \geq 2^r$, такую, что $|l_s| > |l_q^*|$, $q \geq 2^r$, т.е. больше длины дуг r-го поколения для E_*. Проделаем такую операцию для всех нецентрированных дуг из списка l_p, $m < p < 2^r$. Наибольшая из возникших при этом дуг будет иметь номер 2^r, так как нумерация монотонна, и при этом сохранится оценка $|l_{2^r}| > |l_q^*|$, $q \geq 2^r$, т.е. мы доказали, что $E_* \prec E$, так как $|l_p| = |l_p^*|$, $p = 1, \cdots, 2^r - 1$, и $|l_{2^r}| > |l_{2^r}^*|$. □

Покажем теперь, что величина $\sigma_\omega(\{l_n\})$ достигает наибольшего значения на каноническом множестве. Фактически мы докажем, что любое ω-пористое множество с постоянной d в условии пористости можно за счет последовательности локальных переносов, т.е., увеличивая $\sigma_\omega(\{l_n\})$, переделать в каноническое множество с теми же ω и d.

Предложение 3. *Пусть J – дуга окружности, E – ω-пористое множество с постоянной d в условии пористости. Пусть E_* – каноническое ω-пористое множество, построенное на дуге J, с той же постоянной d. Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z, E))} \leq \int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z, E_*))}.$$

Доказательство. В предложении 2 доказано, что либо ситуация вырождена и $E = E_*$, либо найдется число m такое, что

$$|l_1| = |l_1^*|, \cdots, |l_{m-1}| = |l_{m-1}^*|, \quad |l_m| < |l_m^*|.$$

Тогда $\sum_1^{m-1} |l_n| = \sum_1^{m-1} |l_n^*|$, а так как по построению $\sum_1^\infty |l_n| = \sum_1^\infty |l_n^*|$, то $\sum_m^\infty |l_n| = \sum_m^\infty |l_n^*|$. Введем обозначение $\delta^{(1)} = |l_m| - |l_m^*|$, тогда $\sum_{n>m} |l_n| + \delta^{(1)} = \sum_{n>m} |l_n^*|$. Найдем наименьшее число m_1 такое, что 1) $m_1 > m$, 2) $|l_{m_1}| < |l_{m_1}^*|$. Перенесем дугу размера δ_{m_1} от дуги l_m к дуге l_{m_1}, здесь $\delta_{m_1} = \delta^{(1)}$, если $|l_{m_1}| + \delta^{(1)} \geq |l_{m_1}^*|$, или $\delta_{m_1} = |l_{m_1}^*| - |l_{m_1}|$ в противном случае. Сохраним для новой системы дуг прежнее обозначение $\{l_n\}$ и заметим, что из предложения 1 следует, что в ходе преобразования величина $\sigma_\omega(E, J) = \sigma_\omega(\{l_n\})$ могла только увеличиться. Если реализовался случай $|l_{m_1}| + \delta^{(1)} \geq |l_{m_1}^*|$, то неизрасходованную часть избытка $\delta^{(1)}$ надо переносить дальше. Положим $\delta^{(2)} = \delta^{(1)} - \delta_{m_1}$. Найдем наименьший номер m_2 такой, что 1) $m_2 > m_1$, 2) $|l_{m_2}| < |l_{m_2}^*|$. Как и на предыдущем этапе, определим размер переносимой дуги δ_{m_2}. Будем действовать таким образом до тех пор, пока не уменьшим длину дуги l_m до размера дуги l_m^*. Это возможно в силу равенства $\sum_m^\infty |l_n| = \sum_m^\infty |l_n^*|$. Далее мы проверим, нет ли совпадения полученного набора дуг $\{l_n\}$ с набором дуг канонического множества и, если нет, повторим ту же процедуру с новым набором дуг $\{l_n\}$. Таким образом, увеличивая всякий раз величину $\sigma_\omega(\{l_n\})$, мы достигнем набора дуг дополнения канонического множества $\{l_n^*\}$. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы, надо проверить неравенство (7) для канонического множества. Введем вспомогательные обозначения. Пусть q некоторое число, $0 < q < 1$. Определим числа α_n равенством $\omega(\alpha_n) = q^n$.

Предложение 4. *Для регулярного модуля непрерывности справедлива оценка*

$$\int\limits_0^\alpha \frac{dx}{\omega(x)} \leq C\frac{\alpha}{\omega(\alpha)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $\alpha = \alpha_N$ $(\omega(\alpha_N) = q^N)$:

$$\int\limits_0^{\alpha_N} \frac{dx}{\omega(x)} = \sum_{n\geq N} \int\limits_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} \frac{dx}{\omega(x)} \asymp \sum_{n\geq N} q^{-n}(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \asymp \sum_{n\geq N} q^{-n}\alpha_n \asymp$$

$$\frac{\alpha_N}{q^N}\sum_{n\geq N} q^{N-n}\frac{\alpha_n}{\alpha_N} \leq \frac{\alpha_N}{q^N}\sum_{n\geq N} q^{\Delta(N-n)} \asymp \frac{\alpha_N}{\omega(\alpha_N)}.$$

В общем случае найдем число N такое, что $\alpha_N < \alpha < \alpha_{N-1}$. Оценим предварительно интеграл по промежутку $[\alpha_N, \alpha]$:

$$\frac{\alpha - \alpha_N}{q^{N-1}} \leq \int\limits_{\alpha_N}^{\alpha} \frac{dx}{\omega(x)} \leq \frac{\alpha - \alpha_N}{q^N}.$$

Если $\alpha \geq 2\alpha_N$, то $\int_{\alpha_N}^{\alpha} \frac{dx}{\omega(x)} \asymp q^{-N}\alpha \asymp \frac{\alpha}{\omega(\alpha)}$. Если же $\alpha \leq 2\alpha_N$,то $\alpha \asymp \alpha_N$ и далее $\frac{\alpha}{\omega(\alpha)} \asymp \frac{\alpha_N}{\omega(\alpha_N)}$. Отсюда легко следует нужная оценка в общем случае. $\square$

Нам потребуются некоторые соотношения для дуг дополнения канонического множества. Напомним, что оно строилось по поколениям. У поколения с номером k имеется 2^k равных между собой рабочих интервалов, длину каждого из которых мы обозначим через a_k, и столько же дополнительных интервалов длины b_k. Основные соотношения длин интервалов заложены в конструкции канонического множества: $d \cdot \omega(b_k) = \omega(a_k)$, дополнительные интервалы расположены по центру рабочих.

Предложение 5. *Если ω – регулярный модуль непрерывности, а параметр q выбран так, что постоянная в условии пористости удовлетворяет неравенству $d > q^{-2}$, то справедлива оценка $b_k \leq a_k \cdot q^{1+\Delta}$.*

Доказательство. Из условий предложения вытекает оценка $\omega(b_k) = \omega(a_k)/d \leq q^2\omega(a_k)$. Пусть $a_k \in [\alpha_n, \alpha_{n-1}]$, тогда $\omega(a_k) \in [q^n, q^{n-1}]$, и, следовательно, $\omega(b_k) \leq q^{n+1}$. Значит $b_k \leq \alpha_{n+1}$, и с учетом оценки для a_k мы получим $b_k/a_k \leq \alpha_{n+1}/\alpha_n \leq q^{1+\Delta}$. □

Следствие 2. *В условиях предыдущего предложения справедлива оценка*

$$b_k \leq q^{1+\Delta} a_0 \left(\frac{1-q^{1+\Delta}}{2}\right)^k.$$

Доказательство. По построению $a_1 = \frac{a_0-b_0}{2}$, и по предыдущему предложению $b_0 \leq q^{1+\Delta}a_0$, $b_1 \leq q^{1+\Delta}a_1 \leq q^{1+\Delta}a_0\frac{1-q^{1+\Delta}}{2}$. Продолжая эти оценки, получим требуемое. □

Все готово для того, чтобы завершить доказательство теоремы 2.

Предложение 6. *Если ω – регулярный модуль непрерывности, то справедлива оценка*

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z,E))} \leq C\frac{|J|}{\omega(|J|)}.$$

Доказательство. Выберем параметр q так, что

$$d > q^{-2}, \quad q > \left(1 - 2^{-1/\Delta}\right)^{1/(1+\Delta)}; \tag{8}$$

здесь d – постоянная в условии пористости (определение 2) и Δ – постоянная из условия регулярности (определение 3). Запишем интеграл как сумму интегралов по дугам дополнения множества E_* и воспользуемся тем, что внутри поколений длины отрезков равны; получим:

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z,E))} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \int\limits_0^{b_k} \frac{dx}{\omega(x)}.$$

Оценим интегралы на основании предложения 3:

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z,E))} \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{b_k}{\omega(b_k)}.$$

Дальнейшие оценки проходят на основании регуляризации слагаемых в сумме. Положим $\widetilde{b}_k = q^{1+\Delta} a_0 \left(\frac{1-q^{1+\Delta}}{2}\right)^k$. Следствие 2 гарантирует оценку $b_k \le \widetilde{b}_k$. Так как функция $\frac{x}{\omega(x)}$ возрастает, то в имеющейся оценке можно заменить b_k на $\widetilde{b}_k$:

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\omega(\operatorname{dist}(z,E))} \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{\widetilde{b}_k}{\omega(\widetilde{b}_k)} = \sum_{n\ge N} q^{-n} \sum_{k\in K_n} 2^k \widetilde{b}_k,$$

здесь N выбрано так, что $|J| = a_0 \in [\alpha_{N+1}, \alpha_N]$ и $K_n = \{k : \alpha_{n+1} \le \widetilde{b}_k < \alpha_n\}$. Для оценки внутренних сумм (геометрических прогрессий) достаточно оценить первое слагаемое в каждой из них. Вычислим с этой целью числа k_n – наименьшие элементы множеств K_n:

$$\widetilde{b}_{k_n} \asymp \alpha_n, \quad k_n \asymp \frac{\log\left(\frac{\alpha_n}{a_0 q_1}\right)}{\log\left(\frac{1-q_1}{2}\right)}, \quad q_1 = q^{1+\Delta}.$$

Оценим первое слагаемое в каждой из внутренних сумм:

$$2^{k_n}\widetilde{b}_{k_n} \asymp \left(\frac{\alpha_n}{a_0 q_1}\right)^{\frac{1}{\log\left(\frac{1-q_1}{2}\right)}} \cdot \alpha_n =$$

$$C\alpha_n^{\left(1-\log\left(\frac{2}{1-q_1}\right)\right)} \le C a_0 q_1^{n\left(1-\log\left(\frac{2}{1-q_1}\right)\right)}.$$

Вернемся к оценке суммы в целом:

$$\sum_{n\ge N} q^{-n} \sum_{k\in K_n} 2^k \beta_k \le C a_0 \sum_{n\ge N} q^{-n} q_1^{n\left(1-\log\left(\frac{2}{1-q_1}\right)\right)}.$$

Последнюю сумму можно записать в виде $\sum_{n\ge N} q^{n\sigma}$, где $\sigma = \left(\Delta\cdot\log\left(\frac{1}{1-q_1}\right) - 1\right)/\log\frac{2}{1-q_1}$. Второе из условий (8) гарантирует, что $\sigma > 0$, и вновь сумма оценивается через первое слагаемое $q^{N\sigma} = q^{-N} q^{N(1+\Delta)\left(1-\log\left(\frac{2}{1-q_1}\right)\right)}$. Остается заметить, что число N

выбрано так, что $q^{N(1+\Delta)\left(1-\log\left(\frac{2}{1-q_1}\right)\right)} \asymp |J|$ и $q^{-N} \asymp \omega(|J|)$. С учетом этих замечаний мы получаем оценку $\int_J \frac{|dz|}{\omega(\mathrm{dist}(z,E))} \le C\frac{|J|}{\omega(|J|)}$. □

Неравенство (7) фактически доказано, так как для любого ω-пористого множества соглсано предложению 3 $\sigma_\omega(J,E) \le \sigma_\omega(J,E_*)$, а правая часть неравенства допускает нужную оценку по предложению 6. Теорема 2 полностью доказана.

Литература

1. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions.* — Amer. Math. J., **80** (1958), 547– 553.
2. W. Rudin, *Boundary values of continious analytic functions.* — Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 345–357.
3. А. М. Коточигов, *Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **30** (1972), 167–169.
4. А. М. Коточигов, *Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы,* II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **47** (1974), 170–171.
5. Е. М. Дынькин, *Множества свободной интерполяции для классов Гёльдера.* — Мат. сб., **109** (1979), 107–128.
6. Н. А. Широков, *Свободная интерполяция в пространствах $C^A_{r,\omega}$.* — Мат. сб., **117** (1982), 337–358.
7. А. М. Коточигов, *Интерполяция в пространствах аналитических функций, определяемых модулем непрерывности.* — Теор. функц., функц. анализ и их прилож., вып. 41 (1984), 77–91.

Kotochigov A. M. Structure of free interpolation sets for analytic function spaces determined by a modulus of continuity.

We describe how of boundary interpolation sets changes between the disk-algebra and Hölder spaces of analytic functions. For the disk-algebra, an interpolation set is a set of zero measure, and for Hölder classes of order α it is a porous set. For the Hölder-type classes corresponding to a modulus of continuity ω, a certain condition of ω-porosity turns out to be necessary for free interpolation. Every set of zero measure is ω-porous for some ω. We prove also a Muckehoupt-type inequality that may be of use for the proof of the sufficiency of the ω-porosity condition.

СПбГЭТУ

Поступило 23 октября 2002 г.

E-mail: kam@peterlink.ru