Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

Н. А. Широков

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПРИБЛИЖЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ОТРЕЗКОВ

1. Обозначения и формулировки. Целью настоящей работы является характеристика гладкости функции, хорошо приближаемой функциями экспоненциального типа, которая в частном случае дает "правильную" обратную теорему, соответствующую прямой теореме из [1]; кроме того, впервые получено описание пространства Гёльдера на промежутке, меньшем 2π, в терминах скорости приближения тригонометрическими полиномами.

В дальнейшем $E = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} [a_n, b_n]$, где отрезки $[a_n, b_n]$ удовлетворяют условиям $0 < c_1 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_2$, $0 < c_3 \leqslant a_{n+1} - b_n \leqslant c_4$ с постоянными c_j, не зависящими от n. Следуя П. М. Тамразову [2, гл. 1], для функции f, определенной на E, зададим разделенные разности следующим образом:

$$f(z_0, z_1) = \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}, \tag{1.1}$$

$$f(z_0, \dots, z_k) = \frac{f(z_1, \dots, z_k) - f(z_0, \dots, z_{k-1})}{z_k - z_0}, \quad z_\nu \neq z_\mu \quad \text{при} \quad \nu \neq \mu.$$

Как и в [1], нам потребуется масштабирующая функция τ, $\tau(x) = (x - a_n)(b_n - x)$ при $x \in [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассматриваемые классы функций задаются с помощью функции $H(x, s)$, $x \in E$, $s > 0$, обладающей следующими свойствами: при фиксированном s функции $H(x, s)$ ограничены по x; при фиксированном x функция $H(x, s)$ не убывает по s; существуют постоянные c_5, c_6 и постоянные M и q, не зависящие от x, s и t, такие, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &c_5 H(x, s) \leqslant H(y, s) \leqslant c_6 H(x, s), \quad |y - x| \leqslant s, \\ &H(x, ts) \leqslant M t^q H(x, s), \quad t \geqslant 1, \quad s > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-00267.

Положим, далее, $\lambda_\sigma(x) = \sigma^{-1}\sqrt{\tau(x)+\sigma^{-2}}$, $x \in E$, $\sigma > 0$, и обозначим через B_σ класс целых функций экспоненциального типа не выше σ, ограниченных на $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Предположим, что функция f, определенная на E, такова, что существует некоторая постоянная c_f, не зависящая от $x \in E$ и $\sigma > 0$ и такая, что для всякого $\sigma > 0$ найдется функция $\varphi_\sigma \in B_\sigma$, для которой выполнено*

$$|f(x) - \varphi_\sigma(x)| \leqslant c_f H(x, \lambda_\sigma(x)), \quad x \in E. \tag{1.3}$$

Тогда для $k > q$, где q взято из (1.2), и любого множества точек $x_j \in E$, $x_0 < \ldots < x_k$, таких, что $c(x_k - x_0) \leqslant \min\limits_{\nu \neq l} |x_\nu - x_l|$, выполнено соотношение

$$|f(x_0, \ldots, x_k)| \leqslant c_7(f, c, k)\frac{H(x_0, x_k - x_0)}{(x_k - x_0)^k}, \tag{1.4}$$

где величина $f(x_0, \ldots, x_k)$ определена в (1.1).

Для частного случая функции H получается обратное утверждение к тому прямому, которое опубликовано в [1]. Для нецелого $\alpha > 0$ через $\Lambda^\alpha(E)$ обозначим класс функций, ограниченных на E и удовлетворяющих на E условию Гёльдера порядка α.

Теорема 2. *Пусть $H_\alpha(x, s) = s^\alpha$, где $\alpha > 0$, α – нецелое. Тогда, если выполнено условие (1.3) теоремы 1 для функций H_α и f, то $f \in \Lambda^\alpha(E)$.*

С помощью теоремы 2 и основного утверждения в [1] оказывается возможным получить описание пространства Гёльдера $\Lambda^\alpha(-\omega, \omega)$ порядка α на промежутке $[-\omega, \omega]$, $\omega < \pi$, с помощью тригонометрических полиномов.

Теорема 3. *Пусть $0 < \omega < \pi$, $\alpha > 0$, α – нецелое. Для того, чтобы $f \in \Lambda^\alpha(-\omega, \omega)$, необходимо и достаточно, чтобы при $n = 1, 2, \ldots$ нашелся тригонометрический полином T_n степени не выше n такой, что*

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant c_f n^{-\alpha}\left(\sqrt{n^{-2} + \omega^2 - x^2}\right)^\alpha, \quad |x| \leqslant \omega, \tag{1.5}$$

где в (1.5) постоянная c_f не зависит от x и n.

2. Геометрические свойства функции Б. Я. Левина для множества E**.** Пусть множество E удовлетворяет условиям п. 1. Б. Я. Левиным в [3] была определена функция $g_E(x)$ со следующими свойствами:

1) $g_E(z)$ гармонична в $\mathbb{C}\setminus E$, $g_E(z)>0$, $z\in\mathbb{C}\setminus E$;
2) $g_E(x)=0$, $x\in E$, $\lim\limits_{|y|\to+\infty} g_E(x+iy)\cdot|y|^{-1}=1$.

Пусть $L_n(\rho)$, $0<\rho^2<c_3/4$, – эллипс с фокусами в точках a_n и b_n и проходящий через точки $a_n-\rho^2$ и $b_n+\rho^2$.

Лемма 1. *Существует постоянная* c_8*, зависящая лишь от* c_j*,* $1\leqslant j\leqslant 4$*, такая, что при* $z\in L_n(\rho)$ *выполнены оценки*

$$g_E(z)\leqslant c_8\rho. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть L_n – эллипс, софокусный эллипсу $L_n(\rho)$ и проходящий через точки $a_n-c_3/2$, $b_n+c_3/2$, и пусть функция $w=\psi_n(z)$ отображает двухсвязную область, ограниченную эллипсом L_n и отрезком $[a_n,b_n]$, на кольцо $k_n=\{w:1<|w|<R_n\}$. В силу наших предположений о множестве E существуют такие постоянные c_j, не зависящие от n, что $|\operatorname{Im} z|\leqslant c_9$, если $z\in L_n$, и $1<c_{10}\leqslant R_n\leqslant c_{11}$. Из теоремы Левина [3] следует, что существует постоянная c_{12}, зависящая лишь от c_j, $1\leqslant j\leqslant 4$, $j=9$, такая, что $g_E(x)\leqslant c_{12}$, если $|\operatorname{Im} z|\leqslant c_9$. В частности, $g_E(z)\leqslant c_{12}$ при $z\in L_n$. Рассмотрим функцию $u_n(w)=g_E(\psi_n^{-1}(w))$, определенную в кольце k_n и непрерывную вплоть до граничных окружностей кольца k_n. Функции u_n гармоничны в k_n, и в силу цитированных свойств функции $g_E(z)$ удовлетворяют условиям $u_n(w)=0$ при $|w|=1$, $u_n(w)\leqslant c_{12}$, $|w|=R_n$. По принципу максимума мы получаем оценку $u_n(w)\leqslant c_{12}(\log R_n)^{-1}\log|w|\leqslant c_{12}(\log c_{10})^{-1}\log|w|$. Анализ формулы, задающей отображение ψ_n, показывает, что с некоторой постоянной c_{13}, не зависящей от n, выполнено $|\psi_n(z)|\leqslant 1+c_{13}\rho$, $z\in L_n(\rho)$. Соединяя две последние оценки, получаем (2.1). □

3. Доказательство теорем 1 и 2.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi\in B_\sigma$*,* $\sigma\geqslant 1$*, и при* $x\in E$ *в обозначениях п. 1 выполняется условие*

$$|\varphi(x)|\leqslant H(x,\lambda_\sigma(x)). \tag{3.1}$$

Тогда существует постоянная c_{14}, зависящая от c_j, $1 \leqslant j \leqslant 13$, такая, что справедливы оценки

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant c_{14} H\big(x, \lambda_\sigma(x)\big) \cdot \lambda_\sigma^{-k}(x), \quad x \in E. \tag{3.2}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия (1.2) при $|y-x| = ts$, $t > 1$, влекут

$$H(y,s) \leqslant H(y,ts) \leqslant c_6 H(x,ts) \leqslant$$
$$\leqslant c_6 M t^q H(x,s) = c_6 M \left(\frac{|y-x|}{s}\right)^q H(x,s),$$

и потому при $s_1 = t_1 s$, $t_1 > 1$, имеем

$$H(y,s_1) \leqslant M t_1^q H(y,s) \leqslant c_6 M^2 \left(\frac{s_1}{s}\right)^q \left(\frac{|y-x|}{s}\right)^q H(x,s). \tag{3.3}$$

В частности, учитывая определение функции $\lambda_\sigma(x)$ и (3.3), получаем, что с некоторой постоянной M_1, не зависящей от x, y и σ, справедливы неравенства

$$H(y, \lambda_\sigma(y)) \leqslant c_6 M^2 \left(\frac{\lambda_\sigma(y)}{\lambda_\sigma(x)} + 1\right)^q \left(\frac{|y-x|}{\lambda_\sigma(x)} + 1\right)^q H\big(x, \lambda_\sigma(x)\big) \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \left(\frac{|y-x|}{\lambda_\sigma(x)} + 1\right)^{2q} H\big(x, \lambda_\sigma(x)\big), \quad x \in E. \tag{3.4}$$

Обозначим через $v_\sigma(x)$ гармоническую в $\mathbb{C} \setminus E$ функцию, обладающую тем свойством, что $v_\sigma(x) \leqslant c \log(1+|x|)$ и

$$v_\sigma(x) = \log H(x, \lambda_\sigma(x)), \quad x \in E. \tag{3.5}$$

Такая функция существует и единственна.

Лемма Тамразова [2, гл. 2] и (3.4) влекут, что с некоторой постоянной A, не зависящей от x и z, справедливо неравенство

$$v_\sigma(z) \leqslant \log\left(A \frac{|x-z|}{\lambda_\sigma(x)} + 1\right)^q + v_\sigma(x), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad x \in E. \tag{3.6}$$

Условие $\varphi \in B_\sigma$ влечет соотношение $\log|\varphi(x+iy)| \leqslant \sigma|y| + \mathrm{const}$, потому из принципа максимума находим, что

$$\log|\varphi(z)| \leqslant v_\sigma(z) + \sigma g_E(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{3.7}$$

Если положить $\rho = 1/\sigma$, то из леммы 1, (3.5) и (3.6), (3.7) получаем оценку

$$\log|\varphi(z)| \leqslant \log H(x_0, \lambda_\sigma(x_0)) + c_{15}, \quad z \in E_n(\rho), \tag{3.8}$$

где в (3.8) x_0 – ближайшая к z точка на $[a_n, b_n]$. Поэтому при $\rho = 1/\sigma$ из (3.8) и (3.4) заключаем, что

$$|\varphi(z)| \leqslant c_{15} M_1 \left(\frac{|y - x_*|}{\lambda_\sigma(x_*)} + 1\right)^{2q} H(x_*, \lambda_\sigma(x_*)),$$
$$z \in E_n(\rho), \quad x_* \in [a_n, b_n]. \tag{3.9}$$

Если в соотношении (3.9) зафиксировать $x_* \in [a_n, b_n]$ и опять применить к функции φ, рассматриваемой внутри эллипса $E_n(\rho)$, лемму Тамразова [2, гл. 2] и неравенство (3.9), то найдем, что справедлива оценка

$$|\varphi(\xi)| \leqslant c_{16}(x_*, \lambda_\sigma(x_*)), \quad |\xi - x_*| = \lambda_\sigma(x_*). \tag{3.10}$$

Теперь требуемые неравенства (3.2) являются следствиями оценки (3.10) и формулы Коши для $\varphi^{(k)}$, что и заканчивает доказательство леммы 2. □

Доказательство теоремы 1. Поскольку функция f ограничена на E, можно рассматривать лишь случай, когда $x_0, \dots, x_k \in [a_n, b_n]$. Пусть $x_k - x_0 = \delta$, тогда $x_{j+1} - x_j \geqslant c\delta$. Выберем σ из равенства $\lambda_\sigma(x_0) = \delta$. Ограниченность функции f позволяет полагать, не умаляя общности, что $\sigma \geqslant 2$ (иначе $\delta \geqslant \delta_0(c, c_j) > 0$, и неравенства (1.4) заведомо выполнены). Пусть $\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma/2}, \dots, \varphi_{\sigma/2^L}$ – функции, удовлетворяющие соотношениям (1.3), выбраны так, что $2^L \leqslant \sigma < 2^{L+1}$, $\psi_\nu = \varphi_{\sigma/2^{\nu-1}} - \varphi_{\sigma/2^\nu}$, $\nu = 1, \dots, L$. Тогда $\varphi_\sigma = \sum\limits_{\nu=1}^{L} \psi_\nu + \varphi_{\sigma/2^L}$,

$$f(x_0, \dots, x_k) = (f - \varphi_\sigma)(x_0, \dots, x_k) + \varphi_\sigma(x_0, \dots, x_k) =$$
$$= (f - \varphi_\sigma)(x_0, \dots, x_k) + \sum_{\nu=1}^{L} \psi_\nu(x_0, \dots, x_k) + \varphi_{\sigma/2^L}(x_0, \dots, x_k) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} T + \sum_{\nu=1}^{L} s_\nu + R. \tag{3.11}$$

Оценка члена T. В силу свойств функции H имеем

$$H(x_j, \lambda_\sigma(x_j)) \leqslant c_{17} H(x_0, \lambda_\sigma(x_0)). \tag{3.12}$$

Так как

$$|u(x_0, \dots, x_k)| \leqslant \frac{2^k}{\min\limits_{0 \leqslant j \leqslant k-1} (x_{j+1} - x_j)^k} \max_{0 \leqslant \nu \leqslant k} |u(x_\nu)|, \tag{3.13}$$

то (1.3), (3.12), (3.13) влекут оценку

$$|T| \leqslant c_{18}(f, c, k) \frac{H(x_0, x_k - x_0)}{(x_k - x_0)^k}. \tag{3.14}$$

Оценка суммы $\sum_{\nu=1}^{L} s_\nu$. Из того, что $\psi_\nu = (\varphi_{\sigma/2^{\nu-1}} - f) - (\varphi_{\sigma/2^\nu} - f)$, и из (1.3) находим, что

$$|\psi_\nu(x)| \leqslant c_{19} H\big(x, \lambda_{\sigma/2^\nu}(x)\big), \quad x \in E. \tag{3.15}$$

Так как справедливо неравенство (см. [2, гл. 1])

$$|u(x_0, \dots, x_k)| \leqslant \text{const} \max_{y \in [x_0, x_k]} |u^{(k)}(y)|,$$

то (3.2), (1.2) влекут

$$|s_\nu| \leqslant c_{20}(k, c) \max_{y \in [x_0, x_k]} \frac{H(y, \lambda_{\sigma/2^\nu}(y))}{(\lambda_{\sigma/2^\nu}(y))^k} \leqslant$$

$$\leqslant c_{21} \frac{(\delta^{-1} \lambda_{\sigma/2^\nu}(x_0))^q H(x_0, \delta)}{\lambda^k_{\sigma/2^\nu}(x_0)} = c_{21} \left(\frac{\lambda_{\sigma/2^\nu}(x_0)}{\lambda_\sigma(x_0)} \right)^{q-k} \frac{H(x_0, \delta)}{\delta^k} \leqslant$$

$$\leqslant c_{22} 2^{-\nu(k-q)} \frac{H(x_0, \delta)}{\delta^k},$$

и поэтому

$$\left| \sum_{\nu=1}^{L} s_\nu \right| \leqslant c_{23} \frac{H(x_0, x_k - x_0)}{(x_k - x_0)^k}. \tag{3.16}$$

Оценка члена R. В силу выбора L имеем $1 \leqslant \sigma/2^L < 2$. Ограниченность функции f и соотношение (1.3) влекут оценку

$$\big|\varphi_{\sigma/2^L}(x)\big| \leqslant c_{24}, \quad x \in E. \tag{3.17}$$

Из (3.17) и теоремы Левина [3] находим, что

$$|\varphi(x)| \leqslant c_{25}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Теперь (3.16), (3.17) и классическая теорема С. Н. Бернштейна [4, гл. 4] влекут

$$\left|\varphi_{\sigma/2^L}(x_0, \dots, x_k)\right| \leqslant \text{const} \max_{y \in [x_0, x_k]} \left|\varphi^{(k)}_{\sigma/2^L}(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{26} \left(\frac{\sigma}{2^L}\right)^k \leqslant c_{27}. \tag{3.19}$$

Соотношения (3.11), (3.14), (3.17) и (3.19) доказывают теорему 1. □

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 и того обстоятельства, что соотношение (1.4) при $k > \alpha$ влечет $f \in \Lambda^\alpha(E)$. □

4. Доказательство теоремы 3.

Достаточность. Положим $a_n = -\omega + 2\pi n$, $b_n = \omega + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и пусть $E_0 = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} [a_n, b_n]$. Множество E_0 удовлетворяет условиям теоремы 1. Распространим функцию f на все множество E_0 2π-периодически. Тогда любой тригонометрический полином T_n – это 2π-периодическая функция из B_n, и соотношения (1.5) означают, что справедливы оценки приближения, записанные в виде

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant c_1' \lambda_n^\alpha(x), \quad x \in E_0. \tag{4.1}$$

Теперь в обозначениях доказательства теоремы 1 при $k > \alpha$ находим n из соотношения $\lambda_{n+1}(x_0) < \delta \leqslant \lambda_n(x_0)$ и полагаем $\psi_\nu = T_{[n/2^{\nu-1}]} - T_{[n/2^\nu]}$, $\nu = 1, \dots, L$. Далее доказательство в силу наличия (4.1) проводится в точности как в (3.11)–(3.19) и дает неравенство $|f(x_0, \dots, x_k)| \leqslant c_2'(x_k - x_0)^{\alpha - k}$, что эквивалентно (см. [2, гл. 1]) условию $f \in \Lambda^\alpha(E_0)$, т.е. $f \in \Lambda^\alpha([-\omega, \omega])$.

Необходимость. Множество E_0 определено выше, функция f распространена на него 2π-периодично. По теореме из [1] для всякого n существует функция $\varphi_n \in B_n$ такая, что

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant c_3' \lambda_n^\alpha(x), \quad x \in E_0. \tag{4.2}$$

Отметим, что $\lambda_n(x \pm 2\pi) = \lambda_n(x)$, $x \in E_0$, поэтому (4.2) и 2π-периодичность функции f влекут

$$|f(x) - \varphi_n(x \pm 2\pi)| = |f(x \pm 2\pi) - \varphi_n(x \pm 2\pi)| \leqslant \\ \leqslant c_3' \lambda_n^\alpha(x \pm 2\pi) = c_3' \lambda_n^\alpha(x), \quad x \in E_0. \tag{4.3}$$

Пусть

$$U_{n,M}(x) = \frac{1}{2M+1} \sum_{\nu=-M}^{M} \varphi_n(x + 2\nu\pi).$$

Так как

$$\big\|\varphi_n(x)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \big\|\varphi_n(x \pm 2\pi)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \text{то}$$

$$\big\|U_{n,M}(x)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2M+1} \sum_{\nu=-M}^{M} \big\|\varphi_n(x+2\nu\pi)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \big\|\varphi_n\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{4.4}$$

Кроме того, $U_{n,M} \in B_n$, что вместе с (4.4) показывает, что $U_{n,M}$ образуют по M нормальное семейство функций, следовательно, можно выделить последовательность M_l такую, что $U_{n,M_l} \to T(z)$, $z \in \mathbb{C}$, при этом вновь из (4.4) находим, что

$$|T(z)| = \lim_{l\to\infty} |U_{n,M_l}(z)| \leqslant e^{n|\operatorname{Im} z|} \varlimsup_{l\to\infty} \big\|U_{n,M_l}\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \\ \leqslant e^{n|\operatorname{Im} z|} \big\|\varphi_n(x)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Значит, $T(z) \in B_n$. Далее

$$U_{n,M}(x+2\pi) - U_{n,M}(x) = \\ = \frac{1}{2M+1} \sum_{\nu=-M+1}^{M+1} \varphi_n(x+2\nu\pi) - \frac{1}{2M+1} \sum_{\nu=-M}^{M} \varphi_n(x+2\nu\pi) = \tag{4.6} \\ = \frac{1}{2M+1}\Big(\varphi_n\big(x+2(M+1)\pi\big) - \varphi_n\big(x - 2M\pi\big)\Big) \to 0, \quad M \to \infty.$$

Итак, (4.6) влечет $T(x+2\pi) = T(x)$; вместе с (4.5) это означает, что T – тригонометрический полином степени не выше n. Теперь из (4.3) находим, что

$$\big|f(x) - U_{n,M_l}(x)\big| = \frac{1}{2M_l+1}\left| \sum_{\nu=-M_l}^{M_l} \big(f(x+2\nu\pi) - \varphi_n(x+2\nu\pi)\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2M_l+1}(2M_l+1)c_3'\lambda_n^\alpha(x) = c_3'\lambda_n^\alpha(x). \tag{4.7}$$

Переходя в (4.7) к пределу $l \to \infty$, находим, что

$$|f(x) - T(x)| \leqslant c_3'\lambda_n^\alpha(x), \quad x \in E_0. \tag{4.8}$$

В частности, неравенства (4.8) справедливы при $x \in [-\omega, \omega]$, что и требовалось. Необходимость доказана. □

Литература

1. Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на бесконечной системе отрезков.* — Тр. СПб матем. об-ва **9** (2001), 191–198.
2. П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приложения.* Наукова думка, Киев 1975.
3. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций.* — Теор. функц., функц. анализ и их приложения **52** (1983), 3–33.
4. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, М. 1965.

Shirokov N. A. Inverse approximation theorem on an infinite union of segments.

Let $E = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} [a_n, b_n]$, where a_n and b_n satisfy $0 < c_1 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_2$, $0 < c_3 \leqslant a_{n+1} - b_n \leqslant c_4$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Denote by B_σ the class of all entire functions of exponential type $\leqslant \sigma$ bounded on the real axis. Under certain assumptions on the rate of approximation on E of a bounded function f by functions in B_σ (σ varies), we get some information about the smoothness of f.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 25 октября 2002 г.