Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

П. Н. Бибиков

R-МАТРИЦЫ ДЛЯ $SU(2)$-ИНВАРИАНТНЫХ СДВОЕННЫХ СПИНОВЫХ ЦЕПОЧЕК

1. Введение

Сдвоенные спиновые цепочки или спиновые лестницы (two-leg spin ladders) активно изучались в последние годы как простейший пример квазидвумерных магнитных систем. Гамильтониан такой цепочки для периодической N-узельной модели представляет собой $4^N \times 4^N$ матрицу:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N-1} H_{n,n+1} + H_{N,1}, \tag{1}$$

действующую в пространстве $(\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$. При этом с каждой "перекладиной" такой лестницы ассоциируется пространство $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, по $\mathbb{C}^2$ на верхний и нижний узлы. Плотность гамильтониана $H_{n,n+1}$ нетривиально действует только на соответствующем тензорном произведении $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ отвечающем паре соседних перекладин:

$$H_{n,n+1} = I_4^{\otimes(n-1)} \otimes H \otimes I_4^{\otimes(N-n-1)}. \tag{2}$$

Здесь H является 16×16 матрицей плотности гамильтониана, а I_M будет обозначать единичную $M \times M$ матрицу. Последний член в (1) связан с периодичностью цепочки и также может быть выражен через матрицу H.

С физической точки зрения наибольший интерес представляют $SU(2)$-инвариантые гамильтонианы. При этом генеаторы глобальной $SU(2)$ алгебры задаются $4^N \times 4^N$ матрицами:

$$E^i = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^i + \tau_n^i), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где σ_n^i и τ_n^i это матрицы Паули на верхнем и нижнем узлах перекладины.

Такие гамильтонианы описывают как чисто гейзенберговское взаимодействие соседних спинов, так и трёх- и четырёхспиновые члены. В этой статье мы не будем касаться трёхспинового взаимодействия [2], а ограничимся только гейзенберговским и четырёхспиновым. Соответствующая матрица плотности гамильтониана зависит от восьми параметров и имеет вид:

$$
\begin{aligned}
H_{n,n+1} = \frac{a_1}{2}((\sigma_n,\tau_n)+(\sigma_{n+1},\tau_{n+1})) + a_2(\sigma_n,\sigma_{n+1}) + a_3(\tau_n,\tau_{n+1})+ \\
+ a_4(\sigma_n,\tau_{n+1}) + a_5(\tau_n,\sigma_{n+1}) + a_6(\sigma_n,\tau_n)(\sigma_{n+1},\tau_{n+1})+ \\
+ a_7(\sigma_n,\sigma_{n+1})(\tau_n,\tau_{n+1}) + a_8(\sigma_n,\tau_{n+1})(\tau_n,\sigma_{n+1}). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Первые пять членов в (4) отвечают гейзенберговскому взаимодействию, а последние три четырёхспиновому, также много обсуждавшемуся в последнее время [3–4].

Основная цель этой статьи получить интегрируемые гамильтонианы с матрицами плотности вида (4). Вообще говоря, полный список таких гамильтонианов довольно велик и включает в себя большое количество вырожденных случаев, не представляющих физического интереса. Для того, чтобы избавиться от них следует наложить дополнительные условия на коэфиценты a_i. Например, следующее условие:

$$a_1(a_2^2+a_3^2) \neq 0. \qquad (5)$$

гарантирует невырожденность гейзенберговского взаимодействия как в продольном, так и в поперечном направлениях. Мы также предполагаем, что все параметры a_i, $i = 1\ldots 8$ должны быть вещественным, обеспечивая тем самым эрмитовость нашего гамильтониана.

Гамильтониан $\hat{H}$ из формулы (1) будет интегрируемым в том случае, если 16×16 матрица H, задающая согласно (2) его плотность, может быть представлена в специальном виде:

$$H = \frac{\partial R(\lambda)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}, \qquad (6)$$

где матрица $R(\lambda)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера [5]:

$$R_{12}(\lambda-\mu)R_{23}(\lambda)R_{12}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{12}(\lambda)R_{23}(\lambda-\mu), \qquad (7)$$

и условию регулярности:

$$R(0) = C\,I. \qquad (8)$$

(где C нормировочная постоянная). Здесь для произвольной матрицы X матрицы X_{12} и X_{23} определены как $X_{12} = X \otimes I_M$, $X_{23} = I_M \otimes X$.

Как известно, для большого числа моделей представление (6) вместе с (7) и (8) даёт неплохой шанс для изучения гамильтониана (1) с помощью квантового метода обратной задачи [6, 7].

Также нас будут интересовать следующие гамильтонианы:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \Delta\hat{H}, \tag{9}$$

где матрица H_0 может быть получена из некоторой R-матрицы с помощью формулы (6) и, кроме того,

$$[\hat{H}_0, \Delta\hat{H}] = 0. \tag{10}$$

Если оператор $\Delta\hat{H}$ пропорционален $\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n, \tau_n)$, то из уравнения (10) следует, что:

$$a_3 = a_2, \quad a_5 = a_4, \quad a_8 = a_7 + a_4 - a_2. \tag{11}$$

В этом случае мы можем заменить формулу (5) более слабым условием:

$$a_2^2 + a_3^2 \neq 0. \tag{12}$$

Как впервые было замечено в [8], соотношения (6)–(8) приводят к, так назывемым условиям Решетихина на матрицу H:

$$[(H_{12} + H_{23}), [H_{12}, H_{23}]] = K_{23} - K_{12}, \tag{13}$$

где K новая матрица определённая уравнением (13), представляющим, по сути, первое условие интегрируемости для матрицы H. Оно может быть выведено из системы (6)–(8) разложением R-матрицы в степенной ряд по спектральному параметру λ.

Подставляя явное выражение (4) для матрицы плотности гамильтониана в уравнение (13) мы получаем систему кубических уравнений на коэфиценты a_i. Решая их в соответствии с условиями (5) или (11), (12) с помощью методов компьютерной алгебры мы нашли восемь различных решений и для каждого построили соответствующую R-матрицу.

Если матрица плотности гамильтониана удовлетворяет условию Решетихина (13), то, скорее всего, для неё найдётся соответствующая R-матрица. Для того, чтобы найти её, полезно изучить несколько первых членов её разложения в ряд Маклорена. Как было показано в [9, 10] это разложение может быть построено исходя из матрицы H. Для всех известных к настоящему времени R-матриц частное двух любых её элементов является достаточно простой (рациональной, тригонометрической или эллиптической) функцией от параметра λ. Ещё в работе [11] была высказана гипотеза, что информации, содержащейся в нескольких первых членах степенного разложения для частного двух элементов R-матрицы достаточно для их полного нахождения. Непосредственно этот подход был реализован в работе [10].

Статья построена по следующему плану. В разделе 2 коротко обсуждается способ нахождения R-матрицы с помощью разложения её в степенной ряд, предложенный в работе [10]. В разделе 3 мы приводим полный список из 8 классов матриц плотностей гамильтониана удовлетворяющих условию Решетихина (13), а также условиям (5) или (11), (12). В разделе 4 мы вводим $SU(2)$ ковариантный базис в пространстве $\mathbb{C}^4$. Используя его затем в разделе 5 мы находим соответствующие R-матрицы. Первые четыре из них давно известны, но мы приводим их поскольку соответствующие модели представляют физический интерес. Последние четыре R-матрицы, новые. В разделе 6 мы показываем, что одна из полученных R-матриц является квантовой формой хорошо известной классической r-матрицы.

Автор выражает признательность П. П. Кулишу за полезные дискуссии, а также Ю. Б. Фарфоровской, за обсуждение вопросов, связанных с решением функциональных уравнений с помощью степенных рядов.

2. Формулы для коэффициентов степенного ряда

Степенной ряд для R-матрицы:

$$R(\lambda) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} R^{(n)} \lambda^n. \tag{14}$$

будет согласован с уравнением (7), если коэффициенты $R^{(n)}$ имеют специальный вид. Точные формулы для $n \leq 6$ были получены в [9, 10]:

$$R^{(1)} = H, \tag{15}$$
$$R^{(2)} = H^2, \tag{16}$$
$$R^{(3)} = H^3 + K, \tag{17}$$
$$R^{(4)} = H^4 + 2(HK + KH), \tag{18}$$
$$R^{(5)} = H^5 + L + 2(KH^2 + H^2K) + 6HKH, \tag{19}$$
$$R^{(6)} = H^6 + KH^3 + H^3K + 9(H^2KH + HKH^2)+ \\ + 10K^2 + 3(HL + LH). \tag{20}$$

Матрица L может быть найдена из второго условия интегрируемости:

$$L_{23} - L_{12} = [H_{12}^3 + H_{23}^3 + 3(K_{12} + K_{23}), [H_{12}, H_{23}]]+ \\ +3(H_{12}[[H_{12}, H_{23}], H_{12}]H_{12} + H_{23}[[H_{12}, H_{23}], H_{23}]H_{23})+ \\ (H_{12}H_{23} + H_{23}H_{12})(K_{23} - K_{12}) + (K_{23} - K_{12})(H_{12}H_{23} + H_{23}H_{12})- \\ -2(H_{12}(K_{23} - K_{12})H_{23} + H_{23}(K_{23} - K_{12})H_{12}). \tag{21}$$

Как и условие (13) оно также следует из уравнения (7) [9, 10].

3. Решения уравнения Решетихина

Уравнение (13) на матрицу H определённую согласно (4) и условиям (5) или (11), (12) (с вещественными a_i) изучалось с помощью пакета Gröbner системы компьютерной алгебры Maple V. Были найдены восемь независимых решений: $S_1, \dots S_8$. Каждое из них мы представим в виде набора: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$.

$$S_1 = \{0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0\}, \tag{22}$$
$$S_2 = \{2\beta, \alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, \beta, \alpha, -\alpha\}, \tag{23}$$
$$S_3 = \{\beta, \alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha, 0, \alpha, -\alpha\}, \tag{24}$$
$$S_4 = \{2, 2, 2, 0, 0, -1, 2, 0\}, \tag{25}$$
$$S_5 = \{1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, -1\}, \tag{26}$$
$$S_6 = \{10, 4, 4, 0, 0, 1, 0, -4\}, \tag{27}$$

$$S_7 = \{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, -1, -1, -2 \mp \sqrt{3}, -2 \mp \sqrt{3}, \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, 1, 2 \pm \sqrt{3}\}, \tag{28}$$
$$S_8 = \{4\alpha^2, \beta^2 - \alpha^2, \beta^2 - \alpha^2, (\alpha + \beta)^2, (\alpha - \beta)^2, 0, \beta^2 - \alpha^2, \alpha^2 - \beta^2\}. \tag{29}$$

Модели, отвечающие (22) и (25) изучались в [12], а соответствующая (23) в [13].

4. $SU(2)$-ковариантный базис

В каждом из пространств $\mathbb{C}^4$ удобно перейти к $SU(2)$-ковариантному базису:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Все приводимые ниже R-матрицы будут рассматриваться в базисе пространства $\mathbb{C}^{16}$, порожденном следующими векторами

$$\begin{aligned} &f_{3(i-1)+j} = e_i \otimes e_j, \quad f_{i+9} = e_4 \otimes e_i, \\ &f_{i+12} = e_i \otimes e_4, \quad f_{16} = e_4 \otimes e_4, \end{aligned} \tag{31}$$

где $i,\, j = 1 \ldots 3$.

5. R-матрицы сдвоенных цепочек

Мы будем представлять R-матрицы, отвечающие $S_1, \ldots , S_8$ в блочной форме:

$$R_k(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(\lambda) & B_{k,1}(\lambda) & B_{k,2}(\lambda) & B_{k,3}(\lambda) \\ C_{k,1}(\lambda) & A_{k,2}(\lambda) & B_{k,4}(\lambda) & B_{k,5}(\lambda) \\ C_{k,2}(\lambda) & C_{k,4}(\lambda) & A_{k,3}(\lambda) & B_{k,6}(\lambda) \\ C_{k,3}(\lambda) & C_{k,5}(\lambda) & C_{k,6}(\lambda) & A_{k,4}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Здесь $A_{k,1}(\lambda)$ это 9×9 матрица, действующая в тензорном произведении состояний спина 1. Матрицы $B_{k,1}(\lambda)$ и $B_{k,2}(\lambda)$ имеют размерность 9×3. Матрица $B_{k,3}(\lambda)$ это 9-мерный вектор-столбец и т.д.

Все полученные R-матрицы оказались симметричными:

$$A^t_{k,m}(\lambda) = A_{k,m}(\lambda), \quad B^t_{k,m}(\lambda) = C_{k,m}(\lambda). \tag{33}$$

Матрица, отвечающая S_1 это хорошо известная GL(4)-инвариантная R-матрица: $R_1(\lambda, \eta) = \eta I_{16} + \lambda P_4$, где P_M обозначает оператор перестановки в тензорном произведении $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M$.

$$R_2(\lambda, \eta) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\lambda+\eta) I_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\eta I_3 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & \mathrm{sh}\eta I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}(\lambda+\eta) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Имеются два вырожденных рациональных случая (отвечающие $\alpha = \pm\beta$ в (22)):

$$R_{2\pm}(\lambda,\eta) = \begin{pmatrix} (\lambda+\eta)I_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta I_3 & \pm\lambda I_3 & 0 \\ 0 & \pm\lambda I_3 & \eta I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\eta \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$$R_3(\lambda,\eta) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\lambda+\eta)I_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\eta I_3 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & \mathrm{sh}\eta I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{sh}(\lambda-\eta) \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Матрицы $R_2(\lambda,\eta)$ и $R_3(\lambda,\eta)$ легко получаются из XXZ и градуированной XXZ R-матриц [5].

$$R_4(\lambda,\eta) = \begin{pmatrix} \lambda P_3+\eta I_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta I_3 & \lambda I_3 & 0 \\ 0 & \lambda I_3 & \eta I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta-\lambda \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Эта R-матрица является градуированным аналогом $R_1(\lambda,\eta)$ [5].

Далее нам понадобится следующая 9×9 матрица:

$$A(\lambda,\eta) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f-g & 0 & g & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & f-g & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 & g & 0 & f-g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где $f = \mathrm{sh}(\lambda+\eta)$ и $g = \mathrm{sh}\lambda$. В точке золотого сечения:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\eta_0}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{39}$$

она удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера и описывает биквадратичную цепочку спина 1. Как отмечалось в [11] эта матрица имет вид:

$$A(\lambda,\eta) = fI_9 - 3gP^{(0)}, \tag{40}$$

где $P^{(0)}$ – проектор на состояние нулевого спина в тензорном произведении $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Матрица $A(\lambda, \eta)$ удовлетворяет простому характеристическому уравнению:

$$(A - f)(A - f + 3g) = 0, \tag{41}$$

и её определитель равен $f^8(f-3g)$. Одномерное подпространство отвечающее собственному значению $f-3g$ порождено оператором $P^{(0)}$. С помощью $A(\lambda, \eta)$ мы можем представить матрицы $R_5(\lambda)$, $R_6(\lambda)$ и $R_7(\lambda)$ в следующем виде:

$$R_5(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda, \eta_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\eta_0 I_3 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & \mathrm{sh}\eta_0 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}(\lambda + \eta_0) \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$R_6(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda, \eta_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\eta_0 I_3 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\lambda I_3 & \mathrm{sh}\eta_0 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}(\eta_0 - \lambda) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$R_{7\pm}(\lambda) =$$
$$\begin{pmatrix} A(2\lambda, \ln 3) & 0 & 0 & \pm B_{7,3}(\lambda) \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{sh}(2\lambda + \ln 3) I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{sh}(2\lambda + \ln 3) I_3 & 0 \\ \pm C_{7,3}(\lambda) & 0 & 0 & \mathrm{sh}(\ln 3) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Здесь

$$B_{7,3}(\lambda) = \mathrm{e}^{-(\lambda + \frac{\ln 3}{2})}\mathrm{sh}(2\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Для матрицы $R_8(\lambda)$ мы отдельно выпишем элементы блок-матрицы (32).

$$A_{8,1}(\lambda) = \tag{46}$$

$$\begin{pmatrix} f+h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g+h & 0 & f-g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & h & 0 & f-g-h & 0 & 0 \\ 0 & f-g & 0 & g+h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & f & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g+h & 0 & f-g & 0 \\ 0 & 0 & f-g-h & 0 & h & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f-g & 0 & g+h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f+h \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f &= 1 + (1+2\gamma^2)\lambda + (1+3\gamma^2)\lambda^2 + 2\gamma^2\lambda^3 + \gamma^2\lambda^4, \\ g &= 1 + 2\gamma^2\lambda + 2\gamma^2\lambda^2, \quad h = \lambda g. \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} A_{8,2}(\lambda) &= A_{8,3}(\lambda) = (1+\lambda)I_3, \\ A_{8,4}(\lambda) &= 1 + (1-2\gamma^2)\lambda + (1-\gamma^2)\lambda^2 + 2\gamma^2\lambda^3 + \gamma^2\lambda^4. \end{aligned} \tag{48}$$

$$B_{8,1}(\lambda) = B_{8,2}(\lambda) = \gamma\lambda(1+\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{8,3}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} B_{8,4}(\lambda) &= \lambda(1+\lambda)(1-2\gamma^2+\gamma^2\lambda+\gamma^2\lambda^2)I_3, \\ B_{8,5}(\lambda) &= B_{8,6}(\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

При этом $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$.

6. Классическая r-матрица, ассоциированная с $R_8(\lambda)$

Мы можем ввести параметр η в матрицу $R_8(\lambda)$, используя следующую подстановку:

$$R_8(\lambda) \to R_8(\lambda, \eta) = \frac{\eta^4}{\lambda^4} R_8(\lambda/\eta). \qquad (50)$$

Новая матрица $R_8(\lambda, \eta)$ будет квазиклассической:

$$R_8(\lambda, 0) = P_4. \qquad (51)$$

В соответствии с [5] она отвечает классической r-матрице:

$$r(\lambda) = P_4 \frac{\partial}{\partial \eta} R(\lambda, \eta)|_{\eta=0}, \qquad (52)$$

удовлетворяющей классическому уравнению Янга–Бакстера:

$$[r_{12}(\lambda - \mu), r_{13}(\lambda) + r_{23}(\mu)] + [r_{13}(\lambda), r_{23}(\mu)] = 0. \qquad (53)$$

Это хорошо известная r-матрица:

$$r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(2I + 2\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} + \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} + \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}), \qquad (54)$$

где $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ являются стандартными $sl(2)$ генераторами:

$$[\mathcal{H}, \mathcal{E}] = \mathcal{E}, \qquad [\mathcal{H}, \mathcal{F}] = -\mathcal{F}, \qquad [\mathcal{E}, \mathcal{F}] = 2\mathcal{H}, \qquad (55)$$

представленными в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (56)$$

Как легко заметить, эти операторы, действуя в приводимом представлении алгебры Ли $sl(2)$, аннулируют подпространство спина ноль в тензорном произведении двух пространств спина одна вторая.

Литература

1. E. Dagotto, *Experiments on ladders reveal a complex interplay between a spin-gapped normal state and superconductivity.* — Rep. Progr. Phys. **62** (1999), 1525–1571.
2. V. Yu. Popkov and A. A. Zvyagin, *Antichiral" exactly solvable effectively two-dimensional quantum spin model.* — Phys. Lett. A **175** (1993), 295–298.
3. S. Brehmer, H.-J. Mikeska, M. Müller, N. Nagaosa, and S. Uchida, *Effects of biquadratic exchange on the spectrum of elementary excitations in spin ladders.* — Phys. Rev. B **60** (1999), 329–334.
4. A. A. Nersesyan and A. M. Tsvelik, *One-dimensional spin-liquid without magnon excitations.* — Phys. Rev. Lett **78** (1997), 3939–3942.
5. П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, *О решениях уравнения Янга–Бакстера.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **95** (1980), 129–160.
6. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe Ansatz works for integrable models.* Quantum symmetries/Symmetries quantique, Proceedings of the Les Houches summer school Session LXIV, eds. A. Connes, K. Gawedzki and J. Zinn-Justin Horth-Holland (1998).
7. В. Е. Корепин, А. Г. Изергин, Н. М. Боголюбов, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М. (1992).
8. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* Proc. Symp. on Integrable Quantum Fields Lecture Notes in Physics 151 ed. J. Hietarinta and C. Montonen Springer (1982).
9. K.-H. Mütter and A. Schmitt, *Solvable spin-1 models in one dimension.* — J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), 2265–2276.
10. P. N. Bibikov, *How to solve Yang-Baxter equation using the Taylor expansion of R-matrix.* nlin.SI/0112001.
11. T. Kennedy, *Solutions of the Yang–Baxter equation for isotropic quantum spin chains.* — J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992), 2809–2817.
12. Y. Wang, *Exact solution of a spin-ladder model.* — Phys. Rev. B **60** (1999), 9236–9239.
13. S. Albeverio, S.-M. Fei, and Y. Wang, *An exactly solvable model of generalized spin ladder.* — Europhys. Lett. **47** (1999), 364–370.

Bibikov P. N. R-matrices for $SU(2)$-invariant two-leg spin ladders

The list of R-matrices for the set of eight integrable spin ladders is presented. The four of them are new. All the results were obtained using a special algorithm based on the derivation of the R-matrix from its local Hamiltonian density. The concrete calculations were realized on the base of the computer algebra system MAPLE V.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bibikov@PB7855.spb.edu

Поступило 25 июля 2002 г.