Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

Т. А. Болохов

ОСОБЕННОСТИ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ $SU(N)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

В работе [1] предложена самодуальная параметризация $SU(2)$ поля Янга–Миллса. В результате замены переменных плотность лагранжиана содержит модификацию 4-мерной нелинейной σ-модели:

$$L = (\partial_\mu \vec{r})^2 - \Lambda(\vec{r}, \partial_\mu \vec{r} \times \partial_\nu \vec{r})^2 - V(\vec{r}), \tag{1}$$

в которой динамическая переменная $\vec{r}$ принимает значения в двумерной сфере $S^2 \equiv SU(2)/U(1)$. В работах [2], [3] данный лагранжиан исследуется в качестве 4-мерной модели обладающей устойчивыми солитоноподобными решениями.

В данной статье приводится абстрактная схема обобщения этой параметризации на случай $SU(N)$ поля Янга–Миллса. Схема опирается на теоремы о существования матричных объектов размера $N \times N$, явный вид которых достаточно сложен, но может быть получен с помощью компьютерных вычислений для каждого конкретного N.

Результат обобщения включает в себя модификацию плотности лагранжиана (1) для нескольких взаимодействующих между собой полей, принимающих значения в двумерной сфере $S^2 \equiv SU(2)/U(1)$.

Алгебра Ли $su(N)$ имеет ранг $r = N-1$ и размерность $d = N^2-1$. Пусть h_η, $\eta = 1, \dots r$ и $\lambda_k^\pm$, $k = 1, \dots 1/2(d-r)$ это, соответсвенно, базис подалгебры Картана и корневые векторы, в представлении удовлетворяющем условиям:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} h_\eta h_\xi &= 2\delta_{\eta\xi}, \\ \operatorname{tr} \lambda_k^+ \lambda_l^- &= \delta_{kl}, \\ [h_\eta, \lambda_k^\pm] &= \pm v_{\eta k} \lambda_k^\pm, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[\lambda_k^+, \lambda_k^-] = d^{k\eta} h_\eta, \\
&[\lambda_k^+, \lambda_l^-] = f^{klm} \lambda_m^+ + f^{lkm} \lambda_m^-, \\
&[\lambda_k^+, \lambda_l^+] = g^{klm} \lambda_m^+, \\
&[\lambda_k^-, \lambda_l^-] = -g^{klm} \lambda_m^-.
\end{aligned}
$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование, некоторые суммы указаны явно. Поле Янга–Миллса, как вектор принимающий значения в алгебре Ли $su(N)$ допускает разложение

$$A_\mu = \sum_\eta A_\mu^\eta h_\eta + \sum_k B_\mu^k \lambda_k^+ + \sum_k \bar{B}_\mu^k \lambda_k^-,$$

где A_μ^η это вещественные, а B_μ^k — комплексные величины.

В группе калибровочных преобразований можно выбрать абелеву подгруппу, порождаемую экспонентами элементов (с коэфициентами зависящими от координат) подалгебры Картана алгебры Ли $SU(N)$. Действие этой подгруппы на поле A_μ выглядит следующим образом:

$$A_\mu \to e^{i\omega_\eta h_\eta} A_\mu e^{-i\omega_\eta h_\eta} - \partial_\mu \omega_\eta h_\eta. \tag{2}$$

Калибровочные преобразования, производимые такой подгруппой, далее будем называть абелевыми преобразованиями.

В статье [1] лагранжиан $SU(2)$ теории Янга–Миллса выражается через величины инвариантные относительно абелевых преобразований. При определенном выборе новых переменных получающийся лагранжиан содержит в себе слагаемые (1).

Применим эту технику для калибровочной группы $SU(N)$. Из определения (2) следует, что абелевы преобразования действуют на поля A_μ^η, B_μ^k следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&A_\mu^\eta \to A_\mu^\eta - \partial_\mu \omega_\eta, \\
&B_\mu^k \to e^{i\omega_\eta v_{\eta k}} B_\mu^k.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Отсюда видно, что по отношению к этим преобразованиям A_μ^η являются абелевыми калибровочными, а B_μ^k – заряженными полями.

Преобразования (2) порождают абелевы ковариантные производные:

$$\nabla_\mu B_\nu^k = \big((\partial_\mu + iA_\mu^\eta h_\eta \cdot) A_\mu\big)_k = (\partial_\mu + iv_{\eta k} A_\mu^\eta) B_\nu^k.$$

Запишем плотность лагранжиана поля Янга-Миллса через компоненты A^η_μ и B^k_μ:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\operatorname{tr}\left([\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu]\right)^2 \\
&= 2\sum_\eta \left(\partial_\mu A^\eta_\nu - \partial_\nu A^\eta_\mu + id^{j\eta}(B^j_\mu \bar{B}^j_\nu - \bar{B}^j_\mu B^j_\nu)\right)^2 \\
&\quad + 2\sum_k |\nabla_\mu B^k_\nu - \nabla_\nu B^k_\mu \\
&\quad + if^{lmk}(B^l_\mu \bar{B}^m_\nu - \bar{B}^l_\mu B^m_\nu) + ig^{lmk}(B^l_\mu B^m_\nu - B^l_\nu B^m_\mu)|^2 \\
&= 2\sum_\eta (\partial_\mu A^\eta_\nu - \partial_\nu A^\eta_\mu)^2 + 4i\sum_{\eta,k} d^{k\eta}(\partial_\mu A^\eta_\nu - \partial_\nu A^\eta_\mu)(B^k_\mu \bar{B}^k_\nu - \bar{B}^k_\mu B^k_\nu) \\
&\quad - \sum_\eta \left(d^{j\eta}(B^j_\mu \bar{B}^j_\nu - \bar{B}^j_\mu B^j_\nu)\right)^2 + 4\sum_k |\nabla_\mu B^k_\nu|^2 - 4\sum_k \nabla_\mu B^k_\nu \bar{\nabla}_\nu \bar{B}^k_\mu \\
&\quad + 2\sum_k (f^{lmk}(B^l_\mu \bar{B}^m_\nu - \bar{B}^l_\mu B^m_\nu) + g^{lmk}(B^l_\mu B^m_\nu - B^l_\nu B^m_\mu))^2 \\
&\quad + 4i\sum_k \nabla_\mu B^k_\nu (f^{lmk}(B^l_\mu \bar{B}^m_\nu - \bar{B}^l_\mu B^m_\nu) \\
&\quad + g^{lmk}(B^l_\mu B^m_\nu - B^l_\nu B^m_\mu)) + \text{к.с.}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Для того чтобы избавиться от слагаемых

$$4\sum_k \nabla_\mu B^k_\nu \bar{\nabla}_\nu \bar{B}^k_\mu$$

наложим следующие калибровочные условия [4]:

$$\nabla_\mu B^k_\mu = (\partial_\mu + iv_{\eta k} A^\eta_\mu) B^k_\mu = 0.$$

После добавления к лагранжиану суммы квадратов выражений стоящих в левой части этих условий получим

$$
\begin{aligned}
&4\int \sum_k (-\nabla_\mu B^k_\nu \bar{\nabla}_\nu \bar{B}^k_\mu + |\nabla_\mu B^k_\mu|^2) \\
&= 4i\int \sum_{\eta,k} d^{k\eta}(\partial_\mu A^\eta_\nu - \partial_\nu A^\eta_\mu)(B^k_\mu \bar{B}^k_\nu - \bar{B}^k_\mu B^k_\nu).
\end{aligned}
$$

Это выражение дает добавку ко второму слагаемому лагранжиана (4).

Рассмотрим слагаемые $|\nabla_\mu B_\nu^k|^2$, играющие роль кинетической энергии в лагранжиане поля Янга-Миллса. Преобразуем их с помощью формулы для ковариантной производной:

$$\sum_k |\nabla_\mu B_\nu^k|^2 = \sum_k |(\partial_\mu + iv_{\eta k} A_\mu^\eta) B_\nu^k|^2 =$$
$$= \sum_k |\partial_\mu B_\nu^k|^2 + iv_{\eta k} A_\mu^\eta (\partial_\mu \bar{B}_\nu^k B_\nu^k - \partial_\mu B_\nu^k \bar{B}_\nu^k) + A_\mu^\eta v_{\eta k} \rho_k^2 v_{\xi k} A_\mu^\xi,$$

где

$$\rho_k^2 = B_\nu^k \bar{B}_\nu^k.$$

Введем обозначения

$$J_\mu^k = i\rho_k^{-1} (\partial_\mu \bar{B}_\nu^k B_\nu^k - \partial_\mu B_\nu^k \bar{B}_\nu^k),$$
$$\Omega_{\eta\xi} = v_{\eta k} \rho_k^2 v_{\xi k}. \tag{5}$$

Определитель матрицы $\Omega_{\eta\xi}$ является симметричной формой плотностей ρ_a порядка r с положительными коэфициентами. Данный определитель больше нуля при положительных плотностях ρ_a, в этом случае можно выполнить следующее преобразование:

$$\sum_k |\nabla_\mu B_\nu^k|^2 = \sum_k |\partial_\mu B_\nu^k|^2 + \rho_k v_{\eta k} A_\mu^\eta J_\mu^k + A_\mu^\eta \Omega_{\eta\xi} A_\mu^\xi =$$
$$= \sum_k |\partial_\mu B_\nu^k|^2 + \Omega_{\eta\xi} (A_\mu^\eta + 1/2 \Omega_{\eta\zeta}^{-1} v_{\zeta k} \rho_k J_\mu^k)(A_\mu^\xi + 1/2 \Omega_{\xi\kappa}^{-1} v_{\kappa l} \rho_l J_\mu^l) -$$
$$- 1/4 J_\mu^k \rho_k v_{\zeta k} \Omega_{\zeta\kappa}^{-1} v_{\kappa l} \rho_l J_\mu^l.$$

Здесь возникает естественная замена переменных

$$\mathcal{A}_\mu^\eta = A_\mu^\eta + 1/2 \Omega_{\eta\zeta}^{-1} v_{\zeta k} \rho_k J_\mu^k. \tag{6}$$

Покажем, что новые поля $\mathcal{A}_\mu^\eta$ являются абелево-инвариантными. Для этого рассмотрим действие преобразований (3) на токовые поля J_μ^k:

$$J_\mu^k \to J_\mu^k + 2\rho_k v_{\eta k} \partial_\mu \omega_\eta. \tag{7}$$

Воспользовавшись определением (5) матрицы Ω получим

$$\mathcal{A}_\mu^\eta \to A_\mu^\eta - \partial_\mu \omega_\eta + 1/2 \Omega_{\eta\zeta}^{-1} v_{\zeta k} \rho_k J_\mu^k + \Omega_{\eta\zeta}^{-1} v_{\zeta k} \rho_k^2 v_{\xi k} \partial_\mu \omega_\xi = \mathcal{A}_\mu^\eta. \tag{8}$$

После добавления и вычитания квадратов $(J_\mu^k)^2$ запишем исходную сумму $|\nabla_\mu B_\nu^k|^2$ в следующем виде

$$|\nabla_\mu B_\nu^k|^2 = |\partial_\mu B_\nu^k|^2 - 1/4 (J_\mu^k)^2 + \mathcal{A}_\mu \Omega \mathcal{A}_\mu + 1/4 J_\mu^k (\delta_{kl} - \rho_k v_{\zeta k} \Omega_{\zeta\kappa}^{-1} v_{\kappa l} \rho_l) J_\mu^l.$$

Матрица

$$P_{kl} = (\delta_{kl} - \rho_k v_{\zeta k} \Omega^{-1}_{\zeta\kappa} v_{\kappa l} \rho_l)$$

симметрична, совпадает со своим квадратом, и, как легко увидеть, является проектором на ортогональное дополнение к линейной оболочке векторов (по индексу к, без суммирования)

$$\rho_k v_{\eta k}, \quad \eta = 1, \dots r.$$

Спектральная теорема для ортогонального проектора позволяет ввести в этом дополнении ортонормированный вещественный базис

$$p^s_k, \quad s = 1, \dots 1/2(d-r) - r,$$

такой, что

$$P_{kl} = \sum_s p^s_k p^s_l,$$

следовательно

$$\sum_k |\nabla_\mu B^k_\nu|^2 = \sum_k (|\partial_\mu B^k_\nu|^2 - 1/4 (J^k_\mu)^2) + \mathcal{A}_\mu \Omega \mathcal{A}_\mu + \sum_s (p^s_k J^k_\mu)^2. \quad (9)$$

Каждая из сумм $p^s_k J^k_\mu$ является абелево-инвариантной величиной. Для проверки этого воспользуемся формулой (7):

$$p^s_k J^k_\mu \to p^s_k J^k_\mu + 2 p^s_k v_{\eta k} \rho_k \partial_\mu \omega_\eta,$$

второе слагаемое здесь равно нулю так как по построению векторы p^s_k и $\rho_k v_{\eta k}$ ортогональны при любых $s = 1, \dots 1/2(d-r) - r$, $\eta = 1, \dots r$.

В случае общего положения каждая пара векторов B^k_μ, $\bar{B}^k_\mu$ определяет плоскость в четырехмерном пространстве-времени. Пусть комплексные векторы $\mathbf{e}^k_\mu$, $\bar{\mathbf{e}}^k_\mu$ задают базис в этой плоскости, то есть подчиняются условиям:

$$\mathbf{e}^k_\mu, \bar{\mathbf{e}}^k_\mu : \quad \mathbf{e}^k_\mu \mathbf{e}^k_\mu = 0, \quad \mathbf{e}^k_\mu \bar{\mathbf{e}}^k_\mu = 1. \quad (10)$$

Тогда, используя плотности ρ_k, для векторов B^k_μ можно записать следующие разложения:

$$B^k_\mu = \rho_k e^{i v_{\eta k} \omega'_k + i \rho_k^{-1} p^s_k \tau_s} (\cos \alpha_k e^{i\gamma_k} \mathbf{e}^k_\mu + \sin \alpha_k e^{-i\gamma_k} \bar{\mathbf{e}}^k_\mu). \quad (11)$$

Нетрудно заметить, что абелевы калибровочные преобразования (3) дают добавки к углам ω', а поворот базиса $\mathbf{e}^k_\mu$, $\bar{\mathbf{e}}^k_\mu$ приводит к изменению угла γ_k. С данными поворотами связан еще один набор калибровочных полей

$$\Gamma^k_\mu = i\mathbf{e}^k_\nu \partial_\mu \bar{\mathbf{e}}^k_\nu.$$

Пары (α_k, γ_k) являются углами Эйлера для векторов $\vec{t}_k$, принимающих значение в единичной сфере S^2:

$$\vec{t}_k = \begin{pmatrix} \sin 2\alpha_k \cos 2\gamma_k \\ -\sin 2\alpha_k \sin 2\gamma_k \\ \cos 2\alpha_k \end{pmatrix}, \; t^+_k = \frac{1}{2}\sin 2\alpha_k e^{2i\gamma_k}, \; t^-_k = \frac{1}{2}\sin 2\alpha_k e^{-2i\gamma_k}.$$

В статье [1] показано, что первая сумма в правой части выражения (9) может быть записана в следующем виде:

$$\sum_k \left((\partial_\mu\rho_k)^2 + \rho_k^2(|\partial_\mu \mathbf{e}^k_\nu|^2 - (\Gamma^k_\mu)^2 + t^+_k(\partial_\mu \mathbf{e}^k_\nu)^2 + t^-_k(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}^k_\nu)^2) + \rho_k^2(\nabla_\mu \vec{t}_k)^2\right), \tag{12}$$

где

$$(\nabla_\mu \vec{t}_k)_m = \sum_n (\delta^{mn}\partial_\mu + 2\varepsilon^{mn3}\Gamma^k_\mu)(t_k)^n.$$

Подставим разложение (11) в токовые величины J^k_μ, тогда для суммы $p^r_k J^k_\mu$ получится следующее выражение:

$$\begin{aligned} p^s_k J^k_\mu &= 2\sum_k \left(p^s_k \rho_k \cos 2\alpha_k \partial_\mu \gamma_k - p^s_k p^t_k \partial_\mu \tau_s\right) \\ &= 2\sum_k p^s_k \rho_k \cos 2\alpha_k (\partial_\mu \gamma_k + \Gamma^k_\mu) - 2\partial_\mu \tau_s. \end{aligned} \tag{13}$$

В результате подстановки замены переменных (6) в первые слагаемые лагранжиана (4) возникают тензоры

$$H^\eta_{\mu\nu} = 1/2(\partial_\mu \Omega^{-1}_{\eta\zeta} v_{\zeta k}\rho_k J^k_\nu - \partial_\nu \Omega^{-1}_{\eta\zeta} v_{\zeta k}\rho_k J^k_\mu),$$

которые, как следует из формулы (8), являются абелево-инвариантными величинами. Более того, раскрытие токовых величин J^k_μ показывает, что вследствии ортогональности векторов p^r_k и $v_{\eta k}\rho_k$ тензоры $H^\eta_{\mu\nu}$ также не зависят и от углов τ_s:

$$H^\eta_{\mu\nu} = 1/2\Omega^{-1}_{\eta\zeta} v_{\zeta k}\rho_k^2 \left(t^k_3(\partial_\mu \Gamma^k_\nu - \partial_\nu \Gamma^k_\mu) + (\vec{t}_k, \nabla_\mu \vec{t}_k \times \nabla_\nu \vec{t}_k)\right). \tag{14}$$

При выводе этой формулы предполагается, что плотности ρ_k, по сравнению с переменными $\vec{t}_k$ и $\mathbf{e}_\mu^k$, являются медленно меняющимися величинами.

Теперь объединим формулы (12), (13), (14) и в результате первые три слагаемые плотности лагранжиана (4) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}2\sum_\eta(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu^\eta-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu^\eta-H_{\mu\nu}^\eta)^2\\+8i\sum_{\eta,k}d^{k\eta}(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu^\eta-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu^\eta-H_{\mu\nu}^\eta)t_k^3(\mathbf{e}_\mu^k\bar{\mathbf{e}}_\nu^k-\mathbf{e}_\nu^k\bar{\mathbf{e}}_\mu^k)\\-2\sum_\eta\big(\sum_k t_k^3(\mathbf{e}_\mu^k\bar{\mathbf{e}}_\nu^k-\mathbf{e}_\nu^k\bar{\mathbf{e}}_\mu^k)\big)^2+\sum_s\big(p_k^s\rho_k\cos2\alpha_k(\partial_\mu\gamma_k+\Gamma_\mu^k)-\partial_\mu\tau_s\big)^2\\\sum_k\big((\partial_\mu\rho_k)^2+\rho_k^2(|\partial_\mu\mathbf{e}_\nu^k|^2-(\Gamma_\mu^k)^2+t_k^+(\partial_\mu\mathbf{e}_\nu^k)^2\\+t_k^-(\partial_\mu\bar{\mathbf{e}}_\nu^k)^2)+\rho_k^2(\nabla_\mu\vec{t}_k)^2\big)\,.\end{gathered}\tag{15}$$

Данное выражение содержит следующее обобщение модельного лагранжиана (1):

$$\begin{gathered}1/2\sum_\eta\big(\Omega_{\eta\zeta}^{-1}v_{\zeta k}\rho_k^2(\vec{t}_k,\nabla_\mu\vec{t}_k\times\nabla_\nu\vec{t}_k)\big)^2\\-2\sum_\eta\Omega_{\eta\zeta}^{-1}v_{\zeta k}\rho_k^2(\vec{t}_k,\nabla_\mu\vec{t}_k\times\nabla_\nu\vec{t}_k)\big(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu^\eta-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu^\eta+4it_k^3(\mathbf{e}_\mu^k\bar{\mathbf{e}}_\nu^k-\mathbf{e}_\nu^k\bar{\mathbf{e}}_\mu^k)\big)\\+\sum_k\rho_k^2(\nabla_\mu\vec{t}_k)^2+\sum_s\big(p_k^s\rho_k\cos2\alpha_k(\partial_\mu\gamma_k+\Gamma_\mu^k)-\partial_\mu\tau_s\big)^2+V(\vec{t}_k).\end{gathered}\tag{16}$$

Особенностью калибровочной группы $SU(N)$ при $N>2$ является зависимость лагранжиана от углов τ_s и квадратов токовых величин $p_k^sJ_\mu^k$.

К недостаткам настоящей статьи можно отнести отсутствие исследования последних двух сумм лагранжиана (4). Предполагается, что они дают вклад только в потенциальную энергию $V(\vec{t}_k)$ и не оказывают существенного влияния на решения порождаемые плотностью лагранжиана (16).

Автор выражает благодарность Л. Д. Фаддееву за предложенную для исследования задачу.

Литература

1. L. D. Faddeev, A. Niemi, *Aspects of electric-magnetic duality in SU(2) Yang–Mills theory.* — Phys. Lett. **B525** (2002), 195–200.
2. L. D. Faddeev, *Quantization of solitons.* — Preprint IAS print-75-QS70 (1975).
3. L. D. Faddeev, A. Niemi, — Nature **387**, (1997), 58.
4. G. 't Hooft, — Nucl. Phys. **B190** (1981), 455;
   Nucl. Phys. **B138** (1978), 1;
   A. M. Polyakov, — Nucl. Phys. **B120** (1977), 429.

Bolokhov T. A. On decomposition of the SU(N) Yang–Mills field.

Several aspects of extension of the Faddeev–Niemi decomposition for the SU(2) Yang–Mills field to the case of SU(N) gauge group are discussed.

Поступило 8 декабря 2002 г.