Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ БАРУТА–ЖИРАРДЕЛЛО ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ГЕГЕНБАУЕРА

1. Введение

Важная роль когерентных состояний [1, 2] в современной квантовой физике (особенно, в квантовой оптике) общеизвестна [3–5]. В частности, когерентные состояний существенно используются при определении и вычислении функциональных интегралов [6, 7]. Важную роль когерентные состояния играют и в квантовой теории поля, например, при исследовании инфракрасных расходимостей в квантовой электродинамике [8]. Концепция когерентных состояний оказалась полезной также в математической физике, в теории представлений и в некоторых других разделах математики. Когерентные состояния впервые были введены в работе Э. Шредингера [9], как нерасплывающиеся волновые пакеты с квази-классическим поведением, и в последующие годы изредка использовались при решении отдельных задач квантовой механики. Ситуация резко изменилась после появления работ Глаубера [10, 11], Клаудера [12] и Сударшана [13], применивших эти состояния к описанию коллективных явлений в квантовой оптике (см., например, [3]). В последующие 40 лет появилось огромное число публикаций посвященных изучению, использованию и многочисленным обобщениям когерентных состояний.

Введённые для бозонного осциллятора (группа Гейзенберга) когерентные состояния в настоящее время определены для широкого класса квантовых физических систем (в том числе и квантово-полевых), а также для систем, связанных с другими группами (в том числе и с супергруппами). Когерентные состояния могут быть определены для квантовых групп, а также при различных деформациях (обобщениях) экспоненты. Обширная и

Это исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ грант No. 00-01-00500.

весьма полная библиография теоретических исследований, относящихся к когерентным состояниям, сжатым состояния и их всевозможным обобщениям, имеется в [14].

В настоящее время известно несколько способов определения когерентных состояний:

1) как собственных состояний оператора уничтожения: $a|z\rangle = z|z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$ (в этом случае их обычно называют *когерентные состояния типа Барута–Жирарделло*, поскольку в работе [15] это определение было перенесено на случай некомпактных групп);

2) как результата действия унитарного оператора сдвига $D(z) = e^{za^\dagger - z^* a}$ на выделенный вектор пространства состояний (обычно вакуум Фока $|0\rangle$): $|z\rangle = D(z)|0\rangle$ (*когерентные состояния типа Переломова*, активно изучавшего эти состояния в исследованиях, суммированных в [1]);

3) как состояний, минимизирующих соотношение неопределенности Гейзенберга (или Гейзенберга–Робертсона);

4) как состояний, удовлетворяющих некоторым естественным условиям (*когерентные состояния типа Клаудера-Газо* [16, 17]).

Все эти определения в случае бозонного осциллятора порождают одно и тоже семейство когерентных состояний, однако это не так в общем случае.

В работах авторов [18–22] развит новый подход к построению когерентных состояний, связанный с конструкцией, предложенной в работе [23], алгебр обобщённых осцилляторов, порождаемых произвольными системами ортонормированных полиномов, которые играют в этом случае ту же роль, что и полиномы Эрмита в случае стандартного бозонного осциллятора. Именно, по заданной системе ортогональных многочленов каноническим образом определяется осцилляторо-подобная система: вводятся операторы координаты, импульса, квадратичный гамильтониан (спектр которого определяется коэффициентами рекуррентных соотношений для этих ортогональных многочленов) и лестничные операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие перестановочным соотношениям деформированной алгебры бозонного осциллятора. Это позволяет, в принципе, осуществить построение когерентных состояний (любым из, указанных выше, четырёх способов) как в случае классических ортогональных многочленов, так и для их различных q-аналогов. В конкретных ситуациях основные осложнения связаны с необходимостью при построении мер решать соответствующие классические проблемы моментов и громоздкостью вычислений требуемых при выражении конкретных результатов через стандартные специальные функции.

Эта схема построения семейств когерентных состояний реализована в работах авторов [18–21] для когерентных состояния типа Барута–Жирарделло и Клаудера–Газо, связанных с полиномами Эрмита, Лагерра, Лежандра и Чебышева. Ключевым моментом в этих исследованиях, так же как и в данной работе, является решение соответствующей классической проблемы моментов [24] (см. также [25]), необходимой для построения меры, участвующей в разложении единицы – одного из важнейших свойств когерентных состояний.

В данной работе мы построим семейство когерентных состояний, связанных с наиболее популярным частным случаем полиномов Якоби – ультрасферическими многочленами $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ (или многочленами Гегенбауера). Будет показано, что при конкретных значениях параметра α воспроизводятся, полученные авторами ранее, результаты, относящиеся к полиномам Лежандра ($\alpha = 0$) [18] и Чебышева ($\alpha = \pm\frac{1}{2}$) [19]. Так как в [19] построение меры, участвующей в формуле разложении единицы для когерентных состояний осциллятора Чебышева, изложено недостаточно подробно мы приведем это построение в §4. Некоторые направления дальнейшего развития полученных результатов будут изложены в последнем параграфе.

2. Осциллятор Гегенбауера

Известно, что многочлены Якоби $P^{(\alpha,\beta)}(x)$ ($\alpha > -1$; $\beta > -1$) можно определить их выражением через гипергеометрическую функцию

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2}(1-z)\right), \qquad (1)$$

где гипергеометрическая функция ${}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{smallmatrix}a,b\\ c\end{smallmatrix}\,\middle|\,z\right)$ определяется соотношением

$$ {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \qquad (2)$$

а $(a)_n$ – символ Похгаммера (сдвинутый факториал) определён по

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1), \quad (a)_0 = 1; \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Здесь a, b, c – произвольные комплексные параметры, а аргумент z принимает комплексные значения. Заменяя в (1) неотрицательный целочисленный индекс n на произвольное комплексное число ν, получаем функцию

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\, {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}-\nu, \nu+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2}(1-z)\right), \quad (4)$$

которую естественно назвать *функцией Якоби.*

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением частного случая $\alpha = \beta$, так как в общем случае многочленов Якоби $(\alpha \neq \beta)$ доказательство формулы разложения единицы для соответствующих когерентных состояний требует значительно более трудоёмкой и громоздкой техники работы с обобщёнными гипергеометрическими рядами ${}_4\mathrm{F}_3$.

В рассматриваемом случае $(\alpha = \beta)$ многочлены Якоби переходят в ультрасферические полиномы

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}-n, n+2\alpha+1\\ \alpha+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2}(1-x)\right), \quad (5)$$

которые с точностью до нормировки совпадают с полиномами Гегенбауера $C_n^\lambda(x)$:

$$(2\lambda)_n\, P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x) = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n C_n^\lambda(x). \quad (6)$$

Ультрасферические многочлены при $\alpha > -1$ ортогональны на отрезке $[1;-1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) P_m^{(\alpha,\alpha)}(x)(1-x^2)^\alpha \mathrm{d}x = d_n^2 \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0, \quad (7)$$

с нормировочной постоянной

$$d_n^2 = 2^{2\alpha+1}\frac{(\Gamma(n+\alpha+1))^2}{(2n+2\alpha+1)n!\Gamma(n+2\alpha+1)}, \quad n \geq 0. \quad (8)$$

Образуем гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_\alpha = \mathrm{L}^2\bigl([-1,1];\, d_0^{-2}(1-x^2)^\alpha \mathrm{d}x\bigr), \tag{9}$$

натянутое на ортонормированное семейство функций $\bigl\{\psi_n^\alpha(x) \equiv \psi_n(x)\bigr\}_{n=0}^{\infty}$:

$$|n\rangle = \psi_n(x) = \frac{d_0}{d_n} \cdot P_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \quad n \ge 0. \tag{10}$$

Используя известное рекуррентное соотношение для ультрасферических полиномов, получаем

$$x\psi_n(x) = b_n \psi_{n+1}(x) + b_{n-1}\psi_{n-1}(x), \quad n \ge 0; \quad \psi_0(x) = 1, \tag{11}$$

где

$$b_n = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2\alpha+1)}{(2n+2\alpha+1)(2n+2\alpha+3)}}, \quad n \ge 0; \quad b_{-1} = 0. \tag{12}$$

Мы будем рассматривать гильбертово пространство $\mathcal{H}_\alpha$ как пространство Фока для осцилляторо-подобной системы, которую будем называть *осциллятором Гегенбауера*. Оператор координаты X для осциллятора Гегенбауера определим как оператор умножения на аргумент в пространстве $\mathcal{H}_\alpha$. Действие этого оператора X на элементы базиса в пространстве $\mathcal{H}_\alpha$ описывается формулой (11). Известно (см., например, [24]), что оператор X в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\alpha$ существенно самосопряжен. В дальнейшем условимся обозначать самосопряженный оператор $\overline{X}$, являющийся замыканием оператора X, тем же символом X.

Оператор импульса P в $\mathcal{H}_\alpha$ определим соотношением

$$P\psi_n(x) = i\bigl(b_n\psi_{n+1}(x) - b_{n-1}\psi_{n-1}(x)\bigr), \quad n \ge 0. \tag{13}$$

Несложно проверить, что на элементах базиса $\bigl\{|n\rangle = \psi_n(x)\bigr\}_{n=0}^{\infty}$ в $\mathcal{H}_\alpha$ эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X,P]|n\rangle = 2i\bigl({b_n}^2 - {b_{n-1}}^2\bigr)|n\rangle. \tag{14}$$

Далее определим лестничные операторы

$$a^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP), \quad a^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP). \tag{15}$$

которые действуют на элементах базиса $|n\rangle$ в $\mathcal{H}_\alpha$ согласно формулам

$$a^{(+)}|n\rangle = \sqrt{2}b_n|n+1\rangle, \quad a^{(-)}|n\rangle = \sqrt{2}b_{n-1}|n-1\rangle \tag{16}$$

и удовлетворяют на этих элементах соотношениям коммутации

$$\big[a^{(-)}, a^{(+)}\big] = \frac{1}{i}\big[X, P\big]. \tag{17}$$

Определим далее оператор N, нумерующий элементы базиса, и гамильтониан H формулами

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{18}$$

$$H = X^2 + P^2 = a^{(+)}a^{(-)} + a^{(-)}a^{(+)}. \tag{19}$$

Несложно проверить, что гамильтониан H является самосопряженным оператором в пространстве Фока $\mathcal{H}_\alpha$ с собственными значениями

$$\lambda_0 = 2{b_0}^2, \quad \lambda_n = 2\big({b_{n-1}}^2 + {b_n}^2\big), \quad n \geq 1. \tag{20}$$

Итак, осциллятор Гегенбауера полностью определён (см. детали подобных построений в более общем случае произвольного деформированного осциллятора в [23]). Отметим, что рассмотренные нами ранее осцилляторы Лежандра [18] и Чебышева [19] являются частными случаями осциллятора Гегенбауера, при $\alpha = 0$ и $\alpha = -\frac{1}{2}$ (или $\alpha = \frac{1}{2}$), соответственно.

3. Когерентные состояния типа Барута–Жирарделло для осциллятора Гегенбауера

Для осциляторподобных систем когерентные состояния типа Барута–Жирарделло определяются как собственные состояния оператора уничтожения (понижения):

$$a^{(-)}|z\rangle = z|z\rangle. \tag{21}$$

В случае осциллятора Гегенбауера имеем

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\sqrt{2}b_{n-1})!}|n\rangle, \tag{22}$$

где

$$|n\rangle = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2(\alpha+1))\Gamma(n+\alpha+1)}\times$$
$$\times\sqrt{n!(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \quad n\geq 0. \tag{23}$$

Отметим, что здесь, и далее в аналогичных выражениях, символ $(\sqrt{2}b_{n-1})!$ обозначает "факториал по индексу":

$$(\sqrt{2}b_{n-1})! = (\sqrt{2}b_{n-1})\cdot(\sqrt{2}b_{n-2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}b_0).$$

Нормирующий множитель равен

$$\mathcal{N}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!}. \tag{24}$$

Учитывая (12), имеем

$$(2b_{n-1}^{\,2})! = 2^{-n}n!\frac{(2\alpha+1)_n}{(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha+\frac{3}{2})_n}, \quad n\geq 1, \tag{25}$$

так что радиус сходимости ряда в формуле (24) равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$$\mathcal{N}^2 = {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle|2|z|^2\right). \tag{26}$$

Заметим, что для осциллятора Лежандра [18] ($\alpha=0$)

$${}^{\mathrm{Legendre}}b_n^2 = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}, \quad n\geq 0, \quad {}^{\mathrm{Legendre}}b_{-1} = 0. \tag{27}$$

и

$$\mathcal{N}^2_{\mathrm{Legendre}} = {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\middle|2|z|^2\right). \tag{28}$$

Аналогично, для осциллятора, связанного с полиномами Чебышева 2-рода [19] ($\alpha=\frac{1}{2}$), имеем, соответственно

$${}^{\mathrm{Chebyshev}}b_n^2 = \frac{1}{4}, \quad n\geq 0, \tag{29}$$

и

$$\mathcal{N}^2_{\mathrm{Chebyshev}} = {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1,2\\ 2\end{matrix}\middle|2|z|^2\right) = \frac{1}{1-2|z|^2}. \tag{30}$$

Явный вид когерентных состояний (типа Барута–Жирарделло) для осциллятора Гегенбауера получаем подставляя (26) в (22)

$$|z\rangle = \frac{1}{\left(1 - xz\sqrt{2}\right)^{(\alpha+\frac{3}{2})}} \cdot \frac{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\\ \alpha+1\end{matrix}\middle| \frac{2z^2(x^2-1)}{\left(1-xz\sqrt{2}\right)^2}\right)}{\sqrt{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle| 2|z|^2\right)}}. \tag{31}$$

Для сравнения приведём полученные нами ранее выражения для когерентных состояний осцилляторов Лежандра и Чебышева

$$|z\rangle_{\text{Legendre}} = \frac{1}{\left(1 - xz\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\\ 1\end{matrix}\middle| \frac{2z^2(x^2-1)}{\left(1-xz\sqrt{2}\right)^2}\right)}{\sqrt{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 2|z|^2\right)}}, \tag{32}$$

$$|z\rangle_{\text{Chebyshev}} = \frac{1}{\left(1 - xz\sqrt{2}\right)^{2}} \cdot \frac{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1, \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\middle| \frac{2z^2(x^2-1)}{\left(1-xz\sqrt{2}\right)^2}\right)}{\sqrt{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1, 2\\ 2\end{matrix}\middle| 2|z|^2\right)}}, \tag{33}$$

В силу (30) и, учитывая, что

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1, \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\middle| \frac{2z^2(x^2-1)}{\left(1-xz\sqrt{2}\right)^2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2z^2(x^2-1)}{(1-\sqrt{2}xz)^2}\right]^n = \\ &= \frac{(1-\sqrt{2}xz)^2}{1-2\sqrt{2}xz+2z^2},\end{aligned} \tag{34}$$

соотношение (33) можно записать в виде

$$|z\rangle_{\text{Chebyshev}} = \frac{\sqrt{1-2|z|^2}}{1-2xz\sqrt{2}+2z^2}. \tag{35}$$

Следующая задача состоит в построении меры

$$\mathrm{d}\mu(|z|^2) = W(|z|^2)\mathrm{d}^2 z \tag{36}$$

в разложении единицы

$$\iint\limits_{\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}} W(|z|^2)|z\rangle\langle z|\mathrm{d}^2 z = 1, \tag{37}$$

где $\mathrm{d}^2z = \mathrm{d}(Re\,z)\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,z)$. Известно, (см., например, [26]), что для этого следует решить классическую проблему моментов, имеющую в нашем случае вид

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^n W(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}(2b_{n-1}^{\,2})!, \quad n \geq 0. \tag{38}$$

Используя (25), перепишем (38) в виде

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^n W(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n!(2\alpha+1)_n}{2^n(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha+\frac{3}{2})_n}, \quad n \geq 0. \tag{39}$$

Замена переменных $\tau = 2t$ даёт

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \tau^n W\Big(\frac{1}{2}\tau\Big)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}{\Gamma(2\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}. \tag{40}$$

Обозначив

$$\widetilde{W}(\tau) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} W(\frac{1}{2}\tau), \tag{41}$$

перепишем (40) в виде

$$\int_0^1 \tau^n \widetilde{W}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}. \tag{42}$$

Для решения указанной проблемы моментов рассмотрим интеграл (7.512.4) из [27]

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\nu,\beta\\ \gamma\end{matrix}\Big| x\right)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma+\rho-\nu-\beta)}{\Gamma(\gamma+\rho-\nu)\Gamma(\gamma+\rho-\beta)}, \tag{43}$$

где предполагается, что

$$\mathrm{Re}\,\gamma > 0, \quad \mathrm{Re}\,\rho > 0, \quad \mathrm{Re}(\gamma+\rho-\nu-\beta) > 0.$$

Выбирая следующие значения параметров

$$\gamma = 1, \quad \rho = n + 2\alpha + 1, \quad \nu = \alpha - \frac{1}{2}, \quad \beta = \alpha + \frac{3}{2}, \tag{44}$$

и осуществляя замену переменных $x = 1 - \tau$ в этом интеграле, при $\alpha > -\frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 \tau^{n+2\alpha} {}_2\mathrm{F}_1 \left(\begin{matrix} \alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \Big| 1 - \tau \right) \mathrm{d}\tau = \\ &\qquad = \frac{\Gamma(1)\Gamma(n + 2\alpha + 1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n + \alpha + \frac{5}{2})\Gamma(n + \alpha + \frac{1}{2})}. \end{aligned} \tag{45}$$

Поскольку (см. формулу (2))

$$\begin{aligned} &P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha + 0 + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha + 1)\Gamma(0+1)} {}_2\mathrm{F}_1 \left(\begin{matrix} \alpha - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha + 2\alpha + 1 \\ 1 \end{matrix} \Big| \frac{1}{2}(1-x) \right) = \\ &\qquad = {}_2\mathrm{F}_1 \left(\begin{matrix} \alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \Big| \frac{1}{2}(1-x) \right), \end{aligned} \tag{46}$$

интеграл (45) принимает вид

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 \tau^{n+2\alpha} P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau - 1)\mathrm{d}\tau = \\ &\qquad = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{(n + \alpha + \frac{3}{2})\Gamma(n + \alpha + \frac{1}{2})\Gamma(n + \alpha + \frac{3}{2})}. \end{aligned} \tag{47}$$

Учитывая, что

$$P^{(\alpha,\beta)}_\nu(1) = \frac{\Gamma(\nu + \alpha + 1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{так, что} \quad P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(1) = 1, \tag{48}$$

имеем

$$\lim_{\tau \to 1^-} \tau^{\alpha - \frac{1}{2}} P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau - 1) = 1. \tag{49}$$

Определим функцию $q(t)$ положив

$$\tau^{\alpha - \frac{1}{2}} P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau - 1) - 1 = \int\limits_\tau^1 q(t)\mathrm{d}t. \tag{50}$$

Дифференцируя это соотношение по τ, найдём функцию $q(\tau)$ на отрезке $[0,1]$

$$q(\tau) = -\left(\tau^{\alpha-\frac{1}{2}}\, P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau-1)\right)'_{\tau} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau^{\alpha-\frac{3}{2}}\, P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau-1) - \tau^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau-1\right)'_{\tau}. \qquad (51)$$

Учитывая формулу для производной гипергеометрической функции

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|z\right) = \frac{a\,b}{c}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a+1,b+1\\c+1\end{matrix}\middle|z\right), \qquad (52)$$

получаем

$$P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau-1)'_{\tau} = \left(\alpha+\frac{3}{2}\right)P^{(1,2\alpha+1)}_{-\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau-1). \qquad (53)$$

Подставляя (53) в (51) имеем

$$q(\tau) = \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau^{\alpha-\frac{3}{2}}P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\tau-1)-$$

$$-\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\tau^{\alpha-\frac{1}{2}}P^{(1,1+2\alpha)}_{-\alpha-\frac{1}{2}}(2\tau-1). \qquad (54)$$

Применительно к случаю осциллятора Лежандра [18] ($\alpha=0$) получаем:

$$q_{\mathrm{Legendre}}(\tau) = \frac{1}{2}\tau^{-\frac{3}{2}}P^{(0,0)}_{\frac{1}{2}}(2\tau-1) - \frac{3}{2}P^{(1,1)}_{-\frac{1}{2}}(2\tau-1). \qquad (55)$$

При выводе функции $q_{\mathrm{Legendre}}(\tau)$ в [18] использовалась формула (8.832.1) из [27]:

$$(z^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P_\nu(z) = (\nu+1)\big[P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)\big], \qquad (56)$$

из которой следует

$$P_{\frac{1}{2}}(2\tau-1)'_{\tau} = \frac{3}{(2\tau-1)^2-1}\Big[P_{\frac{3}{2}}(2\tau-1) - (2\tau-1)P_{\frac{1}{2}}(2\tau-1)\Big], \qquad (57)$$

что даёт эквивалентное представление функции $q_{\mathrm{Legendre}}(\tau)$:

$$q_{\mathrm{Legendre}}(\tau) = \frac{(8\tau-5)P_{\frac{1}{2}}(2\tau-1) - 3P_{\frac{5}{2}}(2\tau-1)}{2\tau^{\frac{3}{2}}(\tau-1)}. \qquad (58)$$

Возвращаясь к случаю осциллятора Гегенбауера из (47) и (50) получаем

$$\int\limits_0^1 \tau^{n+\alpha+\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\tau^1 q(t)t \Big) \mathrm{d}\tau + \int\limits_0^1 \tau^{n+\alpha+\frac{1}{2}} \tau =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{(n+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(n+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}. \tag{59}$$

После интегрирования по частям первого интеграла в левой части соотношения (59) получаем

$$\int\limits_0^1 \tau^{n+\alpha+\frac{3}{2}} q(\tau)\mathrm{d}\tau + 1 = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}. \tag{60}$$

Из сравнения этой формулы и (42) следует, что

$$\widetilde{W}(\tau) = \tau^{\alpha+\frac{3}{2}} q(\tau) + 2\delta(\tau-1). \tag{61}$$

С учетом соотношения

$$\Gamma(2\alpha+1) = 2^{2\alpha}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\alpha+\frac{1}{2}\Big)\Gamma(\alpha+1) \tag{62}$$

при $t = 2\tau$, принимающем значения из промежутка $[0, \frac{1}{2})$, имеем

$$W(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} \Big(2^{\alpha+\frac{3}{2}} t^{\alpha+\frac{3}{2}} q(2t) + 2\delta(2t-1) \Big), \tag{63}$$

или, принимая во внимание формулу (54), получаем

$$W(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} \Big[\Big(\frac{1}{2}-\alpha\Big) 2^{2\alpha} t^{2\alpha} P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(4t-1) -$$

$$- \Big(\alpha+\frac{3}{2}\Big) 2^{2\alpha+1} t^{2\alpha+1} P^{(1,2\alpha+1)}_{-\frac{1}{2}-\alpha}(4t-1) + 2\delta(2t-1) \Big]. \tag{64}$$

Из этого следует, что мера $\mathrm{d}\mu$ в разложении единицы (37) равна

$$\mathrm{d}\mu(|z|^2) = \frac{2\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)} \Big\{ \Big[\Big(\frac{1}{2}-\alpha\Big) |z|^{4\alpha} P^{(0,2\alpha)}_{\frac{1}{2}-\alpha}(4|z|^2-1) -$$

$$-2\Big(\frac{3}{2}+\alpha\Big) |z|^{4\alpha+2} P^{(1,2\alpha+1)}_{-\frac{1}{2}-\alpha}(4|z|^2-1) \Big] + 2\delta(2|z|^2-1) \Big\} \mathrm{d}^2 z. \tag{65}$$

Для осциллятора Лежандра ($\alpha = 0$) это соотношение переходит в

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Legendre}}(|z|^2) = \left[\frac{1}{2}P^{(0,0)}_{\frac{1}{2}}(4|z|^2-1)- \right.$$

$$\left. -3|z|^2 P^{(1,1)}_{-\frac{1}{2}}(4|z|^2-1) + 2\delta(2|z|^2-1)\right]\mathrm{d}^2 z. \qquad (66)$$

Это выражение, как нетрудно заметить, эквивалентно выражению

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Legendre}}(|z|^2) = \qquad (67)$$

$$= \left[\frac{(16|z|^2-5)P_{\frac{1}{2}}(4|z|^2-1) - -3P_{\frac{3}{2}}(4|z|^2-1)}{2(2|z|^2-2)} + 2\delta(2|z|^2-1)\right]\mathrm{d}^2 z,$$

полученному в [18]. (Напомним, что $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{Re}\, z)\mathrm{d}(\mathrm{Im}\, z)$.)

Вычисляя перекрытие когерентных состояний, получаем

$$\langle z_1 | z_2\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\overline{z}_1 z_2)^n(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha+\frac{3}{2})_n}{(2\alpha+1)_n n!}}{\sqrt{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle| 2|z_1|^2\right){}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle| 2|z_2|^2\right)}} =$$

$$= \frac{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle| 2\overline{z_1} z_2\right)}{\sqrt{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle| 2|z_1|^2\right){}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}\\ 2\alpha+1\end{matrix}\middle| 2|z_2|^2\right)}}. \qquad (68)$$

Соответствующее выражение в случае осциллятора Лежандра получается при $\alpha = 0$ и совпадает с аналогичным результатом из [18].

Отметим что соотношение (45), справедливое при $\alpha > -\frac{1}{2}$ исключает из рассмотрения случай полиномов Чебышева 1-рода ($\alpha = -\frac{1}{2}$). Поэтому для полноты изложения мы приведём здесь построение соответствующей меры для осциллятора Чебышева, недостаточно подробно изложенное в [19].

4. Когерентные состояния для осциллятора Чебышева

В этом параграфе мы определим когерентные состояния типа Барута–Жирарделло для осцилляторoподобных систем, связанных с полиномами Чебышева первого и второго рода. Напомним, что многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$ определены при $x \in [-1;1]$ соотношением

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \theta = \arccos x. \tag{69}$$

Они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{70}$$

Многочлены $T_n(x)$ ортогональны на отрезке $[-1;1]$ с весовой функцией

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sin\theta}, \quad x \in (-1;1). \tag{71}$$

Многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ определены при $x \in [-1;1]$ соотношением

$$\begin{gathered} U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \\ n = 0, 1, \ldots, \quad \theta = \arccos x. \end{gathered} \tag{72}$$

Они удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \tag{73}$$

и ортогональны на отрезке $[-1;1]$ с весовой функцией

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} = \sin\theta, \qquad x \in [-1;1]. \tag{74}$$

Рассмотрим гильбертовы пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}} &= \mathrm{L}^2\left([-1,1]; \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right) \\ \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} &= \mathrm{L}^2\left([-1,1]; \frac{2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x}{\pi}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

с базисами порождаемыми многочленами Чебышева 1-го и 2-го рода

$$\Psi_n^{(-\frac{1}{2})}(x) = \sqrt{2}T_n(x), \ \ n \geq 1; \quad \Psi_0^{(-\frac{1}{2})}(x) = T_0(x) = 1; \tag{76}$$

$$\Psi_n^{(+\frac{1}{2})}(x) = U_n(x), \qquad n \geq 0, \tag{77}$$

соответственно. Перепишем рекуррентные соотношения (70) и (73) в виде ($j = \mp\frac{1}{2}$)

$$x\Psi_n^{(j)}(x) = b_n^{(j)}\Psi_{n+1}^{(j)}(x) + b_{n-1}^{(j)}\Psi_{n-1}^{(j)}(x), \quad n \geq 0, \quad b_{-1}^{(j)} = 0; \tag{78}$$

где

$$\Psi_0^{(j)}(x) = 1; \quad b_n^{(j)} = \frac{1}{2}, \quad \text{при} \quad n \geq 1, \quad b_0^{(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_0^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}. \tag{79}$$

Рекуррентные соотношения (78) определяют в пространствах $\mathcal{H}_{\mp\frac{1}{2}}$ действие на элементы базиса оператора “координаты” $X_{\mp\frac{1}{2}}$.

Указанным выше способом (см. §2), определим в пространствах $\mathcal{H}_{\mp\frac{1}{2}}$ соответствующие операторы “импульса” $P_{\mp\frac{1}{2}}$ и квадратичные “гамильтонианы” (операторы энергии)

$$H_{\mp\frac{1}{2}} = X_{\mp\frac{1}{2}}^2 + P_{\mp\frac{1}{2}}^2 \tag{80}$$

В соответствии с (20) спектр этих операторов энергии имеет вид

$$\lambda_0^{-\frac{1}{2}} = 1, \quad \lambda_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_n^{\mp\frac{1}{2}} = 1, \, n \geq 1. \tag{81}$$

Рассматривая гильбертовы пространства $\mathcal{H}_{\mp\frac{1}{2}}$ как пространства Фока для соответствующих “осцилляторов Чебышева,” введём в них операторы рождения и уничтожения $a_{\mp\frac{1}{2}}^{\pm}$ и оператор номера состояния $N_{\mp\frac{1}{2}}$

$$a_{\mp\frac{1}{2}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{\mp\frac{1}{2}} \mp iP_{\mp\frac{1}{2}}\right), \quad N_{\mp\frac{1}{2}}\Psi_n^{(\mp\frac{1}{2})}(x) = n\Psi_n^{(\mp\frac{1}{2})}(x). \tag{82}$$

Когерентные состояния типа Барута–Жирарделло (т.е. собственные состояния оператора уничтожения) для осциллятора Чебышева 1-рода в пространстве $\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}$ определяются равенством

$$|z\rangle_{(\mathrm{I})} = \mathcal{N}_{(\mathrm{I})}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sqrt{2}^n T_n(x), \tag{83}$$

где нормирующий множитель равен

$$\mathcal{N}_{(\mathrm{I})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!} =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}|z|\right)^{2n} = \frac{1-|z|^2}{1-2|z|^2}, \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{84}$$

Используя производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n T_n(x) = \frac{1-rx}{1-2rx+r^2}, \quad |r|<1 \tag{85}$$

для полиномов Чебышева 1-го рода получаем, при $r=\sqrt{2}z$,

$$|z\rangle_{(\mathrm{I})} = \sqrt{\frac{1-2|z|^2}{1-|z|^2}}\,\frac{1-\sqrt{2}zx}{1-2\sqrt{2}zx+2z^2}, \quad |z|<\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{86}$$

Отметим, что этот явный вид когерентного состояния для осциллятора Чебышева 1-рода может быть получен из общей формулы (31) при $\alpha=-\frac{1}{2}$ и формальной заменой ${}_2\mathrm{F}_1\left({0,1 \atop 0}\middle|2|z|^2\right)$ на $\frac{1-|z|^2}{1-2|z|^2}$.

Аналогично, когерентные состояния типа Барута–Жирардело для осциллятора Чебышева 2-рода в пространстве $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ определяются равенством

$$|z\rangle_{(\mathrm{II})} = \mathcal{N}_{(\mathrm{II})}^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} z^n \sqrt{2}^{\,n-1} U_n(x)\right), \tag{87}$$

с нормирующим множителем

$$\mathcal{N}_{(\mathrm{II})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}|z|\right)^{2n} = \frac{1}{1-2|z|^2}, \quad |z|<\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{88}$$

Используя производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_n(x) = \frac{1}{1-2rx+r^2}, \quad |r|<1, \tag{89}$$

для полиномов Чебышева 2-го рода получаем, при $r=\sqrt{2}z$, явный вид когерентного состояния в этом случае

$$|z\rangle_{(\mathrm{II})} = \frac{\sqrt{1-2|z|^2}}{1-2\sqrt{2}zx+2z^2}, \quad |z|<\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{90}$$

Для построения мер участвующих в формулах разложения единицы (37), связанных с полученными когерентными состояниями, надо, как и выше, решить соответствующие проблемы моментов. Так как из (79) следует, что

$$\begin{gathered}\left(2\left(b_n^{(-\frac{1}{2})}\right)^2\right)! = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n=0 \\ 2^{1-n} & \text{при} \quad n \geq 1 \end{cases}; \\ \left(2\left(b_n^{(\frac{1}{2})}\right)^2\right)! = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 0, \end{gathered} \tag{91}$$

то соответствующие проблемы моментов имеют вид ($\tau = 2t$)

$$\int_0^1 \tau^n W^{(-\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}\tau)\tau = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & \text{при} \quad n=0 \\ \dfrac{4}{\pi} & \text{при} \quad n \geq 1 \end{cases}; \tag{92}$$

$$\int_0^1 \tau^n W^{(\frac{1}{2})}\Big(\frac{1}{2}\tau\Big)\mathrm{d}\tau = \frac{2}{\pi} \quad \text{при} \quad n \geq 0. \tag{93}$$

Для осциллятора Чебышева 1-рода решение проблемы моментов имеет вид

$$W^{(-\frac{1}{2})}(t) = \frac{8}{\pi}\delta(2t-1) - \frac{4}{\pi}\delta(2t), \quad (t = \frac{1}{2}\tau); \tag{94}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{d}\mu^{(-\frac{1}{2})}(|z|^2) = \\ = \left(\frac{8}{\pi}\delta(2|z|^2-1) - \frac{4}{\pi}\delta(2|z|^2)\right)\mathrm{d}(\operatorname{Re} z)\mathrm{d}(\operatorname{Im} z), \quad (t = |z|^2).\end{gathered} \tag{95}$$

Аналогично, для осциллятора Чебышева 2-рода имеем

$$W^{(\frac{1}{2})}(t) = \frac{4}{\pi}\delta(2t-1), \quad \Big(t = \frac{1}{2}\tau\Big); \tag{96}$$

$$\mathrm{d}\mu^{(\frac{1}{2})}(|z|^2) = \frac{4}{\pi}\delta(2|z|^2-1)\mathrm{d}(\operatorname{Re} z)\mathrm{d}(\operatorname{Im} z), \quad (t = |z|^2). \tag{97}$$

В завершение этого параграфа вычислим перекрытие когерентных состояний для этих осцилляторов. В случае осциллятора Чебышева 1-рода

$$\begin{aligned}{}_{(\mathrm{I})}\langle z_1|z_2\rangle_{(\mathrm{I})} &= \sqrt{\frac{(1-2|z_1|^2)(1-2|z_1|^2)}{(1-|z_2|^2)(1-|z_2|^2)}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}_1{}^n z_2{}^n}{(2(b_{n-1}^{-1/2})^2)!} = \\ &= \sqrt{\frac{(1-2|z_1|^2)(1-2|z_1|^2)}{(1-|z_2|^2)(1-|z_2|^2)}} \cdot \frac{1-\overline{z}_1 z_2}{1-2\overline{z}_1 z_2}.\end{aligned} \tag{98}$$

Для осциллятора Чебышева 2-рода перекрытие можно получить непосредственно из соотношения (68) при $\alpha = \frac{1}{2}$

$$
{}_{(\mathrm{II})}\langle z_1 | z_2 \rangle_{(\mathrm{II})} = \frac{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1,2\\2\end{matrix}\middle| 2\overline{z}_1 z_2\right)}{\sqrt{{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1,2\\2\end{matrix}\middle| 2|z_1|^2\right){}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1,2\\2\end{matrix}\middle| 2|z_2|^2\right)}}. \tag{99}
$$

Используя (30), имеем окончательно

$$
{}_{(\mathrm{II})}\langle z_1 | z_2 \rangle_{(\mathrm{II})} = \frac{\sqrt{(1-2|z_1|^2)(1-2|z_2|^2)}}{1-2\overline{z}_1 z_2}. \tag{100}
$$

5. Заключение

Данная работа в определенном смысле ставит точку в построении когерентных состояний типа Барута–Жирарделло для осцилляторподобных систем, связанных с классическими многочленами. Стандартные когерентные состояния бозонного осциллятора, как известно, связаны с полиномами Эрмита. До недавнего времени когерентные состояния, связанные с другими классическими полиномами не исследовались. Лишь в работах [28, 29] обсуждались когерентные состояния, связанные с многочленами Лагерра[1]. Развитый нами подход позволил определить когерентные состояния для всех "классических" ортогональных многочленов – Эрмита, Лежандра [18], Чебышева [19], Лагерра [20, 21]. Целью настоящей работы было построение когерентных состояний для оставшегося широкого класса классических ортогональных многочленов – полиномов Якоби. Точнее, в данной работе был рассмотрен наиболее важный ("симметрическая схема" в терминологии работы [23]) случай многочленов Якоби – случай ультрасферических полиномов $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ (многочленов Гегенбауера). Общий случай ("несимметрическая схема" в терминологии работы [23]) многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ с $\alpha \neq \beta$, также может быть рассмотрен в рамках данного подхода. Однако, он связан с обобщенным гипергеометрическим рядом ${}_4\mathrm{F}_3$ и требует более громоздкой техники вычислений.

[1] Укажем также на работы [30, 31] в которых с других позиций обсуждается связь когерентных состояний с ортогональными многочленами.

Предложенный подход допускает распространение на случай других гипергеометрических полиномов (схема Аски–Вильсона [32]), а также на базисные гипергеометрические ряды [33], возникающие при построении когерентных состояний, связанных с деформированными осцилляторами [34, 35] и квантовыми группами [36, 37]. Соответствующие результаты наших исследований в этом направлении будут приведены в дальнейших публикациях.

Благодарности. Авторы признательны проф. П. П. Кулишу за внимание к работе и полезные обсуждения. Мы также выражаем глубокую благодарность проф. В. М. Бабичу и участникам руководимого им семинара на котором обсуждались некоторые результаты данной работы.

Литература

1. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* Наука, М. (1987).
2. J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam, (eds.), *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics.* World Scientific, Singapore (1985).
3. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики.* Мир, М. (1970).
4. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.* 2-е изд., Наука, М. (1971).
5. Сб. *Когерентные состояния в квантовой теории,.* Новости фундаментальной физики, вып. 1, Мир, М. (1972).
6. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.* Атомиздат, М. (1980).
7. В. Н. Попов, В. С. Ярунин, *Когерентные коллективные явления в сверхпроводимости и нелинейной оптике.* СПбГУ, СПб (1994).
8. П. П. Кулиш, Л. Д. Фаддеев, *Асимптотические условия и инфракрасные расходимости.* — Теор. матем. физ. **4**, No. 2, (1970) 153–170.
9. E. Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Macromechanik.* — Naturwissenshaften **14**, (1926) 644–666.
10. R. J. Glauber, *The Quantum Theory of Optical Coherence.* — Phys. Rev. **130**, (1963) 2529–2539.
11. R. J. Glauber, *Coherent and incoherent states of radiation field.* — Phys. Rev. **131**, (1963) 2766–2788.
12. J. R. Klauder, *The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers.* — Ann. Phys. **11** (1960), 123– 168.
13. E. C. G. Sudarshan, *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams.* — Phys. Rev. Lett. **10**, (1963) 277-279.
14. V. V. Dodonov, *“Nonclassical” states in quantum optics: a “squeezed” review of the first 75 years.* — J. Opt. B. **4**, No. 1, (2002) R1-R33.

15. A. O. Barut, L. Girardello, *New "Coherent States" Associated with Non-Compact Groups.* Commun. Math. Phys. **21**, No. 1, (1972) 41–55.
16. J-P. Gazeau, J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum.* J. Phys. A., **32**, No. 1, (1999) 123–132.
17. J-P. Antoine, J-P. Gazeau, P. Monceau, J. R. Klauder, K. A. Penson, *Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl–Teller potentials.* — J. Math. Phys. **42**, (2001), 2349–2386 math-ph/0012044.
18. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния для осциллятора Лежандра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **285**, (2002) 39–52.
19. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния и полиномы Чебышева.* — В кн.: Сб. трудов международной конференции "Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания" Обнинск, 14–18 мая 2002 г.
20. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Когерентные состояния и ортогональные многочлены.* — Тезисы докладов конференции "День Дифракции 2002", СПб. (2002).
21. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Generalized coherent states: Novel approach.* — Конференция памяти В. Ф. Лазуткина, СПб. (2002).
22. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Realization of the annihilation operator for generalized oscillator-like system by a differential operator.* — Preprint SPBU-IP-00-25; Integral Transf. and Special Funct. **13**, (2002) 1–8.
23. V. V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras,.* Integral Transf. and Special Funct. **12**, No. 2, (2001) 115–138.
24. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* ФМ, М. (1961).
25. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, *Construction of the spectral measure for the deformed oscillator position operator in the case of undetermined Hamburger moment problem.* — Reviews in Math. Phys., **12**, No. 5, (2000) 691–710.
26. J-M. Sixdenierrs, K. A. Penson, A. I. Solomon, *Mittag-Leffler coherent states.* J. Phys. A., **32**, No. 43, (1999) 7543–7563.
27. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик,, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Изд. 5-е, Наука, М. (1971)..
28. A. H. El Kinani, M. Daoud, *Coherent states á la Klauder-Perelomov for the Pöschl–Teller potentials.* — Phys. Lett. A., **283**, No. 5/6, (2001) 291–299.
29. A. Jellal, *Coherent States for Generalized Laguerre Functions.* hep-th/0109028.
30. A. Odzijewicz, M. Horowski, A. Tereszkiewicz, *Integrable multi-boson systems and orthogonal polynomials.* — J. Phys. A., **34**, No. 20, (2002) 4353–4376.
31. A. Odzijewicz, M. Horowski, A. Tereszkiewicz, *Some Integrable Systems in Nonlinear Quantum Optics.* — math-ph/0207031.
32. R. Askey, J. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials.* — Mem. Am. Math. Soc., **54**, No. 319, (1985) 1–55.
33. Дж. Гаспер, М. Рахман, *Базисные гипергеометрические ряды.* Мир, М. (1993).
34. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *Деформированные осцилляторы и их приложения.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **189**, (1991) 39–74.

35. E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, *Irreducible representations of deformed oscillator algebra and q-special functions.* — Intern. J. Mod. Phys. **A12**, No. 1, (1996) 153–158, q-alg/9610002.

36. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Квантование групп и алгебр Ли.* Алгебра и Анализ **1**, No. 1 (1989) 178–206.

37. V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups.* Cambridge University Press, Cambridge (1994).

V. V. Borzov, and E. V. Damaskinsky. Barut–Girardello Coherent states for the Gegenbauer oscillator.

For the Gegenbauer oscillator, which definition is suggested in this paper, for which the Gegenbauer (ultraspherical) polynomials plays the same role as the Hermite polynomials in the case of usual boson oscillator, we define the family of Barut–Girardello coherent states (the eigenstates of the relevant anihilation operator). We shaw the validity of unity resolution for this states and evaluate their overlaping. We also shaw that the given results reproduce the analogous results, obtained early, for the cases of Legendre and Chebyshev polynomials. In the later case we also construct the measure which participate in the unity resolution.

Санкт-Петербургский
Университет Телекоммуникаций
E-mail: vadim@VB6384.spb.edu
Военный Инженерный
Технический Университет
E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Поступило 25 октября 2002 г.