Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

А. И. Виноградов

ОПЕРАТОР ОТРАЖЕНИЯ И КАНОНИЧЕСКИЙ БАЗИС

Памяти А. Г. Изергина

Введение

В теории автоморфных функций существует проблема коммутации оператора отражения T_{-1} с общим оператором Лапласа–Бельтрами. Более подробно об этом общем операторе мы поговорим в конце работы, а здесь покажем, что эта проблема сравнительно просто решается для классического оператора Лапласа:

$$\Delta \equiv \Delta(x, y) = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{0.1}$$

Мы будем работать на верхней полуплоскости H в гильбертовом пространстве автоморфных функций, базисом которого является система дискретной серии собственных функций оператора Лапласа:

$$\Delta \cdot v(z) = \lambda v(z), \qquad \lambda \geqslant \frac{1}{4}. \tag{02}$$

Инвариантной группой автоморфности возьмем группу $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ, т.е. для всех функций (0.2) справедливо равенство:

$$v(\sigma z) = \chi(\sigma) v(z), \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q), \tag{0.3}$$

где

$$\chi(\sigma) = \left(\frac{d}{q}\right) \text{ — символ Лежандра.}$$

Для простоты будем считать, что q – нечетно и бесквадратно. Кроме того условие $\lambda \geqslant 1/4$ в (0.2) означает, что мы приняли гипотезу Сельберга об отсутствии малых собственных значений для конгруэнц-групп $\Gamma_0(q)$. Это условие взято тоже для технического упрощения, чтобы не иметь дела с нулевым коэффициентом Фурье собственных функций $v(z)$, принадлежащих малым собственным значениям $\lambda < 1/4$.

Чтобы ввести оператор отражения T_{-1}, для этого достаточно заметить, что оператор Лапласа Δ симметричен:

$$\Delta \equiv \Delta(x, y) = \Delta(-x; y).$$

Отсюда следует, что равенство (0.2) справедливо так же и для $v(-\overline{z})$:

$$\Delta \cdot v(-\overline{z}) = \lambda \cdot v(-\overline{z}) \tag{0.4}$$

с теми же собственными значениями λ.

Легко проверить, что инвариантное равенство (0.3) справедливо так же и для $v(-\overline{z})$:

$$v(-\overline{\sigma z}) = \chi(\sigma) \cdot v(-\overline{z}). \tag{0.5}$$

Для этого достаточно взять матрицу

$$\widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$$

и убедиться в справедливости транзитивного равенства:

$$v(-\overline{\sigma z}) = v(\widehat{\sigma}(-\overline{z})) = \chi(\widehat{\sigma}) v(-\overline{z}). \tag{0.6}$$

К тому же из определения мультипликатора получаем дополнительное равенство:

$$\chi(\widehat{\sigma}) = \left(\frac{d}{q}\right) = \chi(\sigma).$$

Вместе с равенством (0.6) оно дает равенство (0.5).

Из равенств (0.4) и (0.5) следует, что $v(-\overline{z})$ так же принадлежит базису (0.2). Эта принадлежность может быть тривиальной, если $v(z)$ – собственная функция оператора отражения:

$$T_{-1} v(z) \equiv v(-\overline{z}) = \xi \cdot v(z), \quad \xi = \pm 1. \tag{0.7}$$

И может быть не тривиальной, если $v(z)$ и $v(-\overline{z})$ линейно независимы.

Во втором случае заменим пару функций v-базиса:

$$v(z) \quad \text{и} \quad v(-\overline{z})$$

новой парой e-функций:

$$
\begin{aligned}
e_{+1}(z) &= \frac{1}{2}\big[v(z) + v(-\overline{z})\big]\\
e_{-1}(z) &= \frac{1}{2}\big[v(z) - v(-\overline{z})\big].
\end{aligned}
\tag{0.8}
$$

Новая e-пара функций (0.8) принадлежит тому же собственному числу λ и является парой собственных функций оператора T_{-1}:

$$
\begin{aligned}
\Delta \cdot e_\xi(z) &= \lambda \cdot e_\xi(z)\\
T_{-1} \cdot e_\xi(z) &= \xi \cdot e_\xi(z)
\end{aligned}
\qquad \xi = \pm 1
\tag{0.9}
$$

К тому же из определения (0.8) следует инвариантность e-пары относительно конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$:

$$
e_\xi(\sigma z) = \chi(\sigma) \cdot e_\xi(z), \quad \sigma \in \Gamma_0(q), \quad \xi = \pm 1. \tag{0.10}
$$

Переобозначив через e-функции подмножества v-функций, которые изначально удовлетворяют равенству (0.7), мы получим новый e-базис, инвариантный относительно оператора отражения T_{-1}, который коммутирует с оператором Лапласа на этом базисе:

$$
\Delta \cdot T_{-1} \cdot e(z) = T_{-1}\Delta \cdot e(z). \tag{0.11}
$$

Теперь на e-базисе можно задать систему операторв Гекке.

§1. Операторы Гекке

Мы воспользуемся определениями и символикой операторов Гекке из работы [1]

$$
\{T_n\}_{(n,q)=1} \times \prod_{p|q} \{U_{p^k}\}_{k\geqslant 0}. \tag{1.1}
$$

Все множество операторов Гекке (1.1) разбито на мультипликативные подмножества. Первое состоит из невырожденных операторов T_n все номера n которых взаимнопросты с q, $(n,q) = 1$. Подмножества вырожденных U-операторов на простых делителях q обладают полной мультипликативностью:

$$
U_{p^k} = U_p^k, \quad k \geqslant 0. \tag{1.2}
$$

Поэтому для общего оператора U_{n_q}, где

$$n_q = \prod_{p|q} p^{k_p}, \tag{1.3}$$

справедливо равенство:

$$U_{n_q} = \prod_{p|q} U_p^{k_p}. \tag{1.4}$$

Тем самым U-операторы достаточно задать только на простых $p|q$.

Общий оператор системы выглядит как произведение двух операторов:

$$T_n \cdot U_{n_q}, \quad (n,q)=1, \quad n_q \ \text{ из } (1.3). \tag{1.5}$$

На e-базисе стандартным путем проверяется коммутативность общей системы наших операторов:

$$\Delta \cup T_{-1} \cup \{T_n\}_{(n,q)=1} \times \prod_{p|q} \{U_p^k\}_{k\geqslant 0}. \tag{1.6}$$

В математической физике есть теорема о коммутирующих операторах. Но применять ее можно только в том случае, если все операторы системы являются самосопряженными (одновременно с коммутацией).

Для операторов Гекке T_n и U_{n_q} это условие эквивалентно эрмитовости. Но в нашей системе (1.6) операторы T_n антиэрмитовы на невычетах ($\chi(n)=-1$), т.е. их собственные значения чисто мнимы. Точно также операторы U_p могут быть как эрмитовы, так и антиэрмитовы. Поэтому прежде чем применять теорему о коммутирующих операторах нам следует нормировать операторы Гекке так, чтобы все они стали эрмитовыми. (Отметим, что операторы Δ и T_{-1} являются самосопряженными в нормированном пространстве автоморфных функций, из чего следует вещественность их собственных значений.)

Сначала мы отнормируем операторы T_n. В виду их мультипликативности:

$$\{T_n\}_{(n,q)=1} = \prod_{(p,q)=1} \{T_{p^k}\}_{k\geqslant 0}, \tag{1.7}$$

достаточно нормировать операторы T_{p^k}. При $k=0$ оператор тривиален: $T_{+1}=1$. Для простых p, $(p,q)=1$, положим

$$T_p^* = \eta(p)\cdot T_p, \quad (p,q)=1, \tag{1.8}$$

где

$$\eta(p) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \chi(p)=+1, \\ i=\sqrt{-1}, & \text{если} \quad \chi(p)=-1. \end{cases}$$

Для любой степени простого p^k, $k \geqslant 0$, равенство (1.8) доопределим так:

$$T_{p^k}^* = \eta(p^k)\cdot T_{p^k} = \eta^k(p)\cdot T_{p^k}, \quad (p,q)=1, \tag{1.9}$$

считая справедливым равенство

$$\eta(p^k)=\eta^k(p), \quad k \geqslant 0.$$

Общий нормированный оператор T_n^* для $n=\prod\limits_{p|q} p^{k_p}$, $(n,q)=1$, определим по мультипликативности

$$T_n^* = \prod_{p|q} T_{p^{k_p}}^* = \eta(n)\cdot T_n, \quad (n,q)=1, \tag{1.10}$$

где

$$\eta(n) = \prod_{p|n}\eta(p^{k_p}) = \prod_{p|n}\eta^{k_p}(p). \tag{1.11}$$

Система операторов (1.10) эрмитова. Коммутативность этой системы является следствием коммутативности системы операторов T_n, т. к. нормирующие множители тривиальны с точки зрения коммутации. Из закона композиции для операторов T_n:

$$T_n\cdot T_m = \sum_{d|(n,m)} \chi(d)\cdot T_{\frac{n\cdot m}{d^2}}, \quad (m\cdot n, q)=1,$$

следует закон композиции для нормированных операторов (1.10):

$$T_n^*\cdot T_m^* = \sum_{d|(n,m)} \chi(d)\cdot\eta(d^2)\cdot T_{\frac{n\cdot m}{d^2}}^*. \tag{1.12}$$

Но из определения нормировочного множителя (1.11) следует равенство:

$$\eta(d^2)=\chi(d), \quad (d,q)=1. \tag{1.13}$$

Поэтому закон композиции (1.12) принимает вид:

$$T_n^* \cdot T_m^* = \sum_{d|(n,m)} T^*_{\frac{n\cdot m}{d^2}}, \quad (n\cdot m, q) = 1. \tag{1.14}$$

Этот закон аналогичен закону для конкруэнцгруппы $\Gamma_0(q)$ без мультипликатора, что вполне естественно, т.к. там эти операторы изначально эрмитовы.

Собственные числа нормированных операторов:

$$T_n^* \cdot f = t^*(n) \cdot f \tag{1.15}$$

повторяют закон композиции (1.14):

$$t^*(n) \cdot t^*(m) = \sum_{d|(n,m)} t^*\Big(\frac{n\cdot m}{d^2}\Big),$$

где

$$t^*(n) = \eta(n) \cdot t(n) \quad t(n) \text{ — собственное число оператора } \quad T_n.$$

§2. Теорема о коммутирующих операторах

Операторы Гекке U_p из (1.2) для $p|q$ нормируем условием:

$$U_p^* = \eta(p) \cdot U_p, \tag{2.1}$$

где

$$\eta(p) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad U_p \text{ — эрмитов} \\ +i, & \text{если} \quad U_p \text{ — антиэрмитов.} \end{cases}$$

Оператор U_{p^k} для любого целого $k \geqslant 0$ обладает полной мультипликативностью (1.2). Поэтому нормировку (2.1) обобщим на общий случай степени $k \geqslant 0$ равенством

$$U_{p^k}^* = (U_p^*)^k = \eta^k(p) \cdot U_p^k, \quad k \geqslant 0. \tag{2.2}$$

По мультипликативности для n_q из (1.3) положим:

$$U_{n_q}^* = \prod_{p|q} U^*_{p^k_p} = \eta(n_q) \cdot U_{n_q}, \tag{2.3}$$

где

$$\eta(n_q) = \prod_{p|q} \eta(p^{k_p}), \quad \eta(p^{k_p}) = \eta^{k_p}(p).$$

При нормировке (2.3) все U-операторы становятся эрмитовыми, а их собственные числа – вещественными:

$$U^*_{n_q} \cdot f = t^*(n_q) \cdot f, \tag{2.4}$$

где

$$t^*(n_q) = \eta(n_q) t(n_q), \; t(n_q) \text{ — собственное число оператора } \quad U_{n_q}.$$

В дальнейшем, для работы с квадратами чисел n_q^2 полезно обобщить понятие мультипликатора χ и на эти числа. Для этого доопределим его на простых $p|q$ условием:

$$\chi(p) = \begin{cases} +1, & U_p \text{ — эрмитов} \\ -1, & U_p \text{ — антиэрмитов.} \end{cases}$$

На любую целую степень p^k перенесем это определение с помощью равенства

$$\chi(p^k) = \chi^k(p), \quad p|q, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На любое n_q – по мультипликативности

$$\chi(n_q) = \prod_{p|q} \chi(p^{k_p}) = \prod_{p|q} \chi^{k_p}(p).$$

В этом случае для нормированного множителя получаем равенство

$$\eta(n_q^2) = \chi(n_q).$$

Поэтому второе равенство (2.4) на квадратах преобразуется в транзитивное равенство:

$$t^*(n_q^2) = \chi(n_q) t(n_q^2) = |t(n_q^2)| = |t(n_q)|^2.$$

Аналогичное равенство для чисел $(n, q) = 1$, т.е. для невырожденных операторов T_n, выглядит сложнее

$$|t(n)|^2 = \chi(n) \cdot t^2(n) = \chi(n) \cdot \sum_{d|n} \chi(d) \cdot t\Big(\Big(\frac{n}{d}\Big)^2\Big).$$

Здесь уже обычный характер $\chi(n) = (n/q)$.

Операторы (1.10) и (2.3) можно объединить по мультипликативности в одном символе для любого целого $m \geqslant 1$. Пусть

$$m = n \cdot n_q, \quad (m, q) = 1, \quad n_q = \prod_{p|q} p^{k_p},$$

тогда общий нормированный оператор Гекке T_m^* определим равенством

$$T_m^* = T_n^* \cdot U_{n_q}^* = \eta(m) T_n \cdot U_{n_q}, \tag{2.5}$$

где

$$\eta(m) = \eta(n) \cdot \eta(n_q).$$

Соответственно объединяются и собственные числа

$$T_m^* \cdot f = t^*(m) \cdot f, \tag{2.6}$$

где

$$t^*(m) = \eta(m) \cdot t(m), \qquad t(m) = t(n) \cdot t(n_q).$$

При $n = 1$ равенство (2.5) означает, что мы переобозначили U-операторы через T-операторы. Путаницы не возникает, т.к. множества чисел n, $(n, q) = 1$ и n_q из (1,3) не пересекаются и определения композиции у этих операторов разные. Поэтому систему операторов (1.1) можно заменить единой нормированной системой $\{T_m^*\}_{m \geqslant 1}$, а полную систему (1.6) – новой нормированной системой

$$\Delta \cup T_{-1} \cup \{T_m^*\}_{m \geqslant 1}, \tag{2.7}$$

где все операторы самосопряжены и коммутируют между собой. Поэтому к системе (2.7) применима теорема о коммутирующих операторах. Из нее мы получаем f-базис $\{f_j\}_{j \geqslant 1}$, каждая функция которого является собственной функцией всех операторов системы (2.7):

$$\begin{aligned} &\Delta \cdot f_j(z) = \lambda_j \cdot f_j(z), && \lambda_j \geqslant \frac{1}{4}, \\ &T_{-1} \cdot f_j(z) = \xi_j \cdot f_j(z), && \xi_j = \pm 1, \\ &T_m^* \cdot f_j(z) = t_j^*(m) \cdot f_j(z), && m \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

В разложении Фурье функции $f_j(z)$ в вершине $\alpha = \infty$:

$$f_j(z) = \sum_{m \neq 0} \rho_j(m) \cdot \sqrt{y} K_{ix_j}(2\pi |m| y) e^{2\pi i m x}, \tag{2.9}$$

коэффициенты Фурье $\rho_j(m)$ при $m \geqslant 1$ связаны с собственными значениями нормированных операторов Гекке T_m^* равенством

$$\rho_j(m) = \rho_j(1) \cdot t_j^*(m). \tag{2.10}$$

Из того, что функция $f_j(z)$ является собственной функцией оператора отражения

$$f_j(-\overline{z}) = \xi_j \cdot f_j(z),$$

получаем линейную зависимость между коэффициентами Фурье разных знаков

$$\rho_j(-m) = \xi_j \rho_j(m). \tag{2.11}$$

Если перейти к аналогичному пространству, где инвариантная группа $\Gamma_0(q)$ имеет тривиальный мультипликатор $\chi \equiv 1$, тогда все операторы Гекке T_n, $(n, q) = 1$ не только самосопряжены (эрмитовы), но к тому же и вещественны, т.е. при переходе от равенства

$$T_n \cdot f_j(z) = t_j(n) \cdot f_j(z) \tag{2.12}$$

к его комплексносопряженному аналогу:

$$\overline{T_n \cdot f_j(z)} = t_j(n) \cdot \overline{f_j(z)} \tag{2.13}$$

черту комплексного сопряжения в левой части (2.13) с оператора $\overline{T}_n$ можно убрать, т.к. $\overline{T}_n = T_n$:

$$T_n \cdot \overline{f_j(z)} = t_j(n) \cdot \overline{f_j(z)}. \tag{2.14}$$

Этого нельзя сделать в случае нормированных операторов T_n^* из системы (2.7). Если n – не вычет, тогда аналог перехода от (2.12) к (2.13) сохраняется, но равенства (2.14) уже нет. Оно заменяется равенством со значением -1

$$T_n^* \cdot \overline{f_j(z)} = -t_j^*(m) \cdot \overline{f_j(z)}.$$

Это связано с нормировочным множителем $\eta(n)$, который делает оператор T_n^* мнимым для невычетов n, поэтому

$$\overline{T_n^*} = -T_n^*, \quad \text{если} \quad \chi(n) = -1.$$

Учитывая эту разницу между пространствами группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором $\chi \not\equiv 1$ и без него ($\chi \equiv 1$), вернемся к равенствам (2.12) и (2.13), когда $\chi \equiv 1$. Чтобы упростить техническую часть, возьмем модуль $q = 1$, т.е. группу $\Gamma_0(1) = \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{Z})$, когда все операторы Гекке не вырождены, эрмитовы и вещественны. Аналоги равенств (2.12) и (2.13) остаются справедливыми и для операторов Δ и T_{-1}. Поэтому аналог канонического базиса (2.8) для $\chi \equiv 1$ содержит вместе с каждой функцией $f_j(z)$ и ее комплексное сопряжение $\overline{f(z)}$. Если $f(z)$ вещественна, тогда f и $\overline{f}$ совпадают. этот случай мы оставим как тривиальный и рассмотрим пару $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ линейно независимых функций базиса. По этой паре построим новую пару

$$U_{+1}(z) = \frac{1}{2}\big[f(z) + \overline{f(z)}\big], \quad U_{-1}(z) = -\frac{i}{2}\big[f(z) - \overline{f(z)}\big]. \tag{2.15}$$

Обе они вещественнозначны и являются собственными функциями всех операторов нашей системы с теми же собственными значениями, что и функция $f(z)$ и $\overline{f(z)}$. Тем самым из f-базиса мы получили новый канонический U-базис, каждая функция которой вещественнозначна. (Мы переобозначим через u-функции подмножество вещественных f-функций.)

В разложении Фурье нового базиса

$$u_j(z) = \sum_{n\neq 0} \psi_j(n)\sqrt{y}K_{ix_j}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx} \tag{2.16}$$

появляется новая информация о коэффициентах Фурье $\psi_j(n)$.

Из вещественности функции $u_j(z)$

$$\overline{u_j(z)} = u_j(z)$$

получаем новое условие на коэффициенты

$$\overline{\psi_j'(-n)} = \psi_j'(n). \tag{2.17}$$

Вместе с аналогом равенства (2.11)

$$\psi_j(-n) = \xi_j\psi_j(n) \tag{2.18}$$

из (2.17) следует третье равенство

$$\overline{\psi_j(n)} = \xi_j\psi_j(n). \tag{2.19}$$

При $n = 1$ получаем условие для нормировочного коэффициента

$$\overline{\psi_j(1)} = \xi_j\psi_j(1) \to \xi_j = \overline{\psi_j(1)}/\psi_j(1). \tag{2.20}$$

Из мультипликативности коэффициентов Фурье и вещественности собственных чисел операторов Гекке $t_j(n)$ получаем

$$\begin{aligned} \psi_j(n) &= \psi_j(1)\cdot t_j(n), \qquad n \geqslant 1, \\ \psi_j(-n) &= \xi_j\psi_j(1)\cdot t_j(n), \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Подставляя равенства (2.19) в (2.16), получаем

$$u_j(z) = \psi_j(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{2\pi i n x} + \xi_j e^{-2\pi i n x} \right] t_j(n) \sqrt{y} K_{ix_j}(2\pi n x). \qquad (2.22)$$

Из равенства (2.20) получаем условие

$$\psi_j(1) \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } \ \xi_j = +1, \\ i\mathbb{R}, & \text{если } \ \xi_j = -1. \end{cases}$$

Это условие согласуется с вещественностью функции $u_j(z)$.

Такой точной информации о коэффициентах Фурье нельзя получить для f-базиса группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором $\chi \not\equiv 1$.

§3. Общий оператор отражения

Из введения следует, что для определения оператора отражения T_{-1} существенна инвариантность оператора Лапласа $\Delta(x, y)$ при замене x на $-x$, т.е. его симметрия:

$$\Delta(x, y) = \Delta(-x, y). \qquad (3.1)$$

Поэтому мы разделим все операторы Лапласа–Бельтрами на два класса. К первому из них отнесем те операторы, для которых выполняется аналог условия (3.1). Ко второму, – гду это условие не выполняется.

В дополнение к оператору Лапласа Δ рассмотрим из первого класса оператор Казимира:

$$\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(x, y, \theta) = -\Delta(x, y) + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{5}{4} \ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \qquad (3.2)$$

где $\Delta(x, y)$ – оператор Лапласа

$$\Delta(x, y) = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

θ – третья координата в разложении Ивасавы:

$$g = (n(x)a(y)k(\theta), \quad g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \quad z = x + iy.$$

Если $\sigma \in \Gamma$ – (инвариантная дискретная подгруппа). тогда разложение Ивасавы для произведения матриц $\sigma \cdot g$ определяется равенством:

$$\sigma \cdot g = n(x') \cdot a(y') \cdot k(\theta'), \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z' = x' + i \cdot y', \quad \theta' = \theta + \arg(cz+d). \tag{3.3}$$

Оператор Казимира самосопряженный. Поэтому все его собственные значения дискретной серии вещественны (но на этот раз отрицательны из-за обратной нормировки оператора Лапласа Δ в (3,2)), и мы можем рассмотреть пространство, базисом которого является его дискретная серия собственных функций:

$$\mathcal{D} \cdot v = \lambda \cdot v, \quad v \equiv v(z, \theta). \tag{3.4}$$

Чтобы преобразовать v-базис (3.4) к новому базису, в котором бы действовал обобщенный оператор отржаения T_{-1}, для этого надо заметить, что уравнение (3.4) сохраняется, если функцию $v(z,\theta)$ заменить на $v(-\overline{z}, -\theta)$. Это свойство является следствием обобщенной симметрии оператора Казимира:

$$\mathcal{D}(x, y, \theta) = \mathcal{D}(-x, y, -\theta).$$

Дальнейшее построение нового e-базиса, в котором действует обобщенный оператор отражения

$$T_{-1} \cdot e(z, \theta) \equiv e(-\overline{z}, -\theta) = \xi \cdot e(z, \theta), \quad \xi = \pm 1$$

происходит точно так же, как во введении, но природа этих функций другая.

Из второго класса операторов Лапласа–Бельтрами возьмем инвариантный оператор $\Delta_{\pm k}$ для пространства автоморфных функци веса $\pm k \neq 0$;

$$\mathcal{D}_{;\pm k} = \Delta_0 \pm i \cdot k \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.5}$$

где Δ_0 – оператор Лапласа

$$\Delta_0 = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Здесь мы снабдим его индексом 0, чтобы отличать от общего оператора $\Delta_{\pm k}$ из (3.5).

В качестве конкретного примера рассмотрим вес $k = 1/2$, т.к. этому пространству принадлежит классическая тэта-функция Якоби от удвоенного аргумента:

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(2\pi i z n^2). \tag{3.6}$$

Вес k удобно заменить мультипликатором в пространстве нулевого веса. Для этого надо нормировать наши функции. Для $k = 1/2$ вместо θ-функции (3.6) удобно ввести функцию

$$\vartheta(z) = \sqrt[4]{y} \cdot \theta(z). \tag{3.7}$$

В этом случае автоморфность $\vartheta(z)$ на инвариантной группе $\Gamma = \Gamma_0(q)$ задается равенством

$$\vartheta(\sigma z) = \varepsilon(\sigma, z) \cdot \vartheta(z), \quad \sigma \in \Gamma, \tag{3.8}$$

где

$$\varepsilon(\sigma, z) = \frac{\theta(\sigma z)}{\theta(z)} \cdot \left(\frac{y(\sigma z)}{y}\right)^{1/4}.$$

Под отношением тэта-функций в последнем равенстве мы понимаем модулярный коэффициент σ-преобразования тэта-функции.

Если в уравнении (3.7) сделать замену аргумента $z \to (-\overline{z})$

$$\vartheta(-\overline{z}) = \sqrt[4]{y} \cdot \theta(-\overline{z}), \tag{3.9}$$

тогда мы получим функцию из другого пространства, которое определяется оператором Δ_{-k}, $k = 1/2$. Легко видеть, что равенство (3.9) можно записать как сопряженное к равенству (3.7)

$$\overline{\vartheta(z)} = \sqrt[4]{y} \cdot \overline{\theta(z)}.$$

При этом равенство (3.8) так же заменяется комплексно-сопряженным

$$\overline{\vartheta(\sigma z)} = \overline{\varepsilon} \cdot (\sigma, z) \cdot \overline{\vartheta(z)}, \quad \sigma \in \Gamma.$$

В пространствах веса $k \neq 0$ аналоги функций $\vartheta(z)$ и $\vartheta(-\overline{z})$ принадлежат разным пространствам. В этом и состоит трудность задания оператора T_{-1} в этом случае. Этот оператор переводит функции пространства оператора Δ_{+k} в пространство оператора Δ_{-k}. Но оператор комплексного сопряжения снова возвращает их в пространство оператора Δ_{+k}. Этим мы и воспользуемся.

Рассмотрим пространство, базис которого состоит из собственных функций дискретной серии оператора Δ_{+k}

$$\Delta_{+k} f(z) = \lambda f(z), \quad \lambda \geqslant \frac{1}{4}, \quad k = \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Операторы $\Delta_{\pm k}$ самосопряженные, поэтому $\lambda > 0$. Для веса $k = +1/2$ сейчас доказана гипотеза Сельберга [2].

Оператор комплексного сопряжения, примененный к равенству (3.10), дает базис оператора Δ_{-k}

$$\Delta_{-k} \cdot \overline{f(z)} = \lambda \cdot \overline{f(z)}. \tag{3.11}$$

При $k = 1/2$ оба базиса инвариантны относительно группы $\Gamma = \Gamma_0(q)$ с выбросом мультипликатора:

$$\begin{aligned} f(\sigma z) &= \varepsilon(\sigma, z) \cdot f(z) \quad (\Delta_{+k}), \\ \overline{f}(\sigma z) &= \overline{\varepsilon}(\sigma, z) \cdot \overline{f}(z) \quad (\Delta_{-k}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда ясно, что, если к равенству (3.10) применить сначала операцию отражения $z \to (-\overline{z})$, а затем комплексного сопряжения, тогда равенство (3.10) останется инвариантным относительно оператора Δ_{+k}

$$\Delta_{+k}\overline{f}(-\overline{z}) = \lambda \cdot \overline{f}(-\overline{z}). \tag{3.13}$$

Тем самым, в равенстве (3.13) мы определили оператор отражения T_{-1} для оператора Δ_{+k}:

$$T_{-1} \cdot f(z) \equiv \overline{f}(-\overline{z}) \quad (\Delta_{+k}). \tag{3.14}$$

В пространстве оператора Δ_{-k} он задается сопряженным равенством:

$$T_{-1} \cdot \overline{f}(z) \equiv f(-\overline{z}) \quad (\Delta_{-k}). \tag{3.15}$$

Если пара функций $f(z)$ и $\overline{f}(-\overline{z})$ линейно зависима

$$\overline{f}(-\overline{z}) = \xi \cdot f(z), \quad \xi = \pm 1, \tag{3.16}$$

тогда базис оператора Δ_{+k} содержит только одну из них.

Если эта пара линейно независима, тогда базис содержит обе функции: $f(z)$ и $\overline{f}(-z)$. По этой паре построим новую пару:

$$u_{+1}(z) = \frac{1}{2}\Big[f(z) + \overline{f}(-\overline{z})\Big], \quad u_{-1}(z) = \frac{1}{2}\Big[f(z) - \overline{f}(-\overline{z})\Big]. \tag{3.17}$$

Из определения оператора отражения (3.14) следует, что обе функции (3.17) являются собственными функциями оператора T_{-1}:

$$T_{-1} \cdot u_\xi(z) = \xi \cdot u_\xi(z), \quad \xi = \pm 1, \quad (\Delta_{+k}). \tag{3.18}$$

Равенства (3.11) и (3.13) показывают, что новая пара так же удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{+k} u_\xi(z) = \lambda \cdot u_\xi(z), \quad \xi = \pm 1,$$

т.е. обе они являются функциями нового u-базиса, на котором коммутируют операторы Δ_{+k} и T_{-1}. При этом множество f-функций, удовлетворяющих равенству (3.16) изначательно, мы тоже переобозначим через u-функции. Для оператора Δ_{-k} таким базисом является комплексное сопряжение u-базиса.

§4. Свертки Ранкина

Нормированная свертка Ранкина $R_j^*(s)$ для j-ой собственной функции f-базиса (2.8) определяется равенством

$$R_j^*(s) = \iint\limits_{\Pi} |f_j(z)|^2 \cdot y^s \, d\mu(z), \tag{4.1}$$

где Π – единичная полоса на верхней полуплоскости H:

$$\Pi = \Big\{ z = x + iy, |x| \leqslant \frac{1}{2}, y > 0 \Big\},$$

$d\mu(z)$ – инвариантная мера:

$$d\mu(z) = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Подставляя в (4.1) ряд Фурье j-ой собственной функции (2.9) и меняя порядки интегрирования и суммирования (что законно в области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > 1$), получаем явный вид свертки (4.1):

$$R_j^*(s) = \Gamma_j(s) \cdot R_j(s), \tag{4.2}$$

где

$$\Gamma_j(s) = \frac{1}{4}\pi^{-s} \cdot \Gamma^{-1}(s)\Gamma^2\Big(\frac{s}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{s}{2} + i\varkappa_j\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2} - i\varkappa_j\Big),$$

$$R_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_j(m)|^2 m^{-s}. \tag{4.3}$$

Законы композиции собственных чисел операторов Гекке дают мультипликативное разложение свертки Ранкина (4.3):

$$R_j(s) = \overline{\rho_j(1)} \cdot \zeta_q(s) \cdot L_j(s, \chi), \quad \operatorname{Re} s > 1, \tag{4.4}$$

где

$$\zeta_q(s) = \prod_{p \nmid q} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1} = \zeta(s) \cdot \prod_{p | q} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big),$$

$$L_j(s,\chi) = \rho_j(1)\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\cdot t_j(m^2)\cdot m^{-s}. \tag{4.5}$$

В свертке Ранкина (4.3) коэффициентами являются квадраты модулей коэффициентов Фурье:

$$\rho_j(m) = \rho_j(1)\cdot t_j^*(m) = \rho_j(1)\cdot\eta(m)\cdot t_j(m). \tag{4.6}$$

Из определения нормировачных коэффициентов $\eta(m)$ в (2.5) следует, что их модули равны 1

$$|\eta(m)| = 1. \tag{4.7}$$

Поэтому квадраты модулей коэффициентов Фурье (4.6) от η-нормировки не зависят

$$|\rho_j(m)|^2 = |\rho_j(1)|^2\cdot|t_j(m)|^2. \tag{4.8}$$

Следовательно, в ядре интеграла (4.1) можно изъять η-множители из собственных функций $f_j(z)$ и вновь полученные функции (без η-нормировки) обозначим через $\varphi_j(z)$:

$$R_j^*(s) = \iint\limits_{\Pi}|\varphi_j(z)|^2\cdot y^s\,d\mu(z), \tag{4.9}$$

где

$$\varphi_j(z) = \sum_{m\neq 0}\psi_j(m)\cdot\sqrt{y}\cdot K_{i\varkappa_j}(2\pi|m|\cdot y)e^{2\pi imx}$$

$$\psi_j(m) = \rho_j(1)\cdot t_j(m), \quad \psi_j(-m) = \xi_j\cdot\psi_j(m).$$

Хотя интегралы (4.1) и (4.9) совпадают в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,s > 1$, тем не менее они существенно отличаются в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,s \leqslant 1$. Интеграл (4.9) нельзя аналитически продолжить влево как функцию s, т.к. $\varphi_j(z)$ не принадлежит нашему пространству и вообще не автоморфна, поэтому сворачивать единичную полосу (4.9) на фундаментальую область F_q нельзя. В то же время с интегралом (4.1) все это проделать можно, т.к. $f_j(z)$ автоморфна и принадлежит нашему пространству. Поэтому, сворачивая единичную полосу (4.1) на фундаментальную область F_q, получаем равенство:

$$R_j^*(s) = \iint\limits_{E_q}|f_j(z)|^2\cdot E(z,s)\cdot d\mu(z). \tag{4.1$^{\mathrm{a}}$}$$

В ядре интеграла $(4.1)^{\mathrm{a}}$ символ $E(z,s)$ означает ряд Эйзенштейна группы $\Gamma_0(q)$ в вершине $\alpha=\infty$.

Из представления $(4.1)^{\mathrm{a}}$ уже стандартным путем следует аналогическое продолжение свертки Ранкина в левую полуплоскость $\operatorname{Re}s\leqslant 1$.

Используя разложение Фурье в разных вершинах для $f_j(\sigma_\alpha z)$, получаем обобщение представления свертки Ранкина $(4.1)^{\mathrm{a}}$ на любую вершину α:

$$R^*_{j,\alpha}(s)=\iint\limits_{E_q}|f_j(z)|^2\cdot E_\alpha(z,s)\cdot d\mu(z), \tag{4.1^{b}}$$

где $E_\alpha(z,s)$ – ряд Эйзенштейна группы $\Gamma_0(q)$ вершины α.

Система равенств $(4.1)^{\mathrm{b}}$ дает нам функциональное уравнение векторно-матричного типа для сверток Ранкина всех вершин α фундаментальной области F_q. Ситуация аналогична и для рядов Ранкина $L_j(s,\chi)$ из (4.5). Без η-нормировки ряд Ранкина (4.5) можно записать в виде интегральной свертки

$$\Gamma_j(s)\cdot L_j(s,\chi)=\iint\limits_{\Pi}\overline{\varphi_j(z)}\cdot\theta(z,\chi)\cdot y^{\frac{s+1}{2}}\,d\mu(z), \tag{4.10}$$

где $\varphi_j(z)$ – функция из (4.9), $\Gamma_j(s)$ – нормировочный Γ-множитель

$$\Gamma_j(s)=\xi\cdot\Big(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big)\cdot\frac{\Gamma(s/2+i\varkappa_j)\cdot\Gamma(s/2-i\varkappa_j)}{\Gamma\big(\frac{s+1}{2}\big)},$$

$$\xi=\frac{\overline{\rho_j(1)}}{\rho_j(1)}$$ — собственное число оператора отражения,

$\theta(z,\chi)$ – тэта-функция Якоби с характером

$$\theta(z,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\cdot\exp(2\pi i n^2 z).$$

Для простоты мы здесь взяли четный характер χ. Представление (4.10) чисто формальное, из него нельзя получить аналитического продолжения и регулярности ряда Ранкина в критической полосе по тем же причинам, о которых упоминалось выше для равенства (4.9). С учетом η-нормировки можно получить другое представление для ряда Ранкина, отличное от (4.10). Для этого надо заметить, что между характером χ и нормировкой η существует простая зависимость:

$$\chi(m) = \eta^2(m) = \eta(m^2). \tag{4.11}$$

Второе равенство в (4.11) является следствием полной мультипликативности η-нормировки. Поэтому транзитивное равенство (4.11) можно переписать как простое равенство

$$\chi(m) = \eta(m^2). \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в (4.5), получаем новый вид ряда Ранкина

$$L_j(s,\chi) = \rho_j(1)\sum_{m=1}^{\infty}\eta(m^2)\cdot t_j(m^2)\cdot m^{-s}. \tag{4.13}$$

С учетом равенства (4.13), получаем новое интегральное представление ряда Ранкина

$$\Gamma_j(s)\cdot L_j(s,\chi) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi}\overline{f_j(z)}\cdot\theta(z)\cdot y^{\frac{s+1}{2}}\cdot d\mu(z), \tag{4.14}$$

где $\Gamma_j(s)$ та же Γ-нормировка, что и в (4.10), $f_j(z)$ – функция базиса (2.8), $\theta(z)$ – классическая функция Якоби удвоенного аргумента из §3. Единичную полосу Π в (4.14) уже можно свернуть по автоморфности на фундаментальную область E_q группы Γ_q с мультипликатором и получить из (4.14) аналитическое продолжение и регулярность ряда Ранкина $L_j(s,\chi)$ в критической полосе в комбинации с множителем $\zeta(2s)$ как и для самой свертки Ранкина. Все это обеспечивает нам автоморфная теория на метаплектической группе [3].

Из представления (4.14) уже нельзя получить делимость ряда Ранкина на классический ряд Дирихле $L(s,\chi)$. Правда, опровергнуть эту делимость тоже нельзя. Но можно доказать отсутствие этой делимости в среднем по спектральному параметру $\varkappa_j$. Для этого мы воспользуемся укороченным функциональным уравнением для ряда Ранкина $L_j(s,\chi)$ [4, 5]. Но предварительно надо получить сельберговское функциональное уравнение векторно-матричного типа для этих рядов. А из него уже стандартным путем получается укороченное уравнение для $L_j(s,\chi)$ в критической полосе.

Для того, чтобы упростить техническую часть доказательства, будем считать конгруэнц-модуль q простым числом. В этом случае фундаментальная область F_q имеет только две независимые вершины $\alpha = 0, \infty$. В обеих вершинах ряды Фурье базиса (2.8)

$$f_j(\sigma_\alpha \cdot z) = \sum_{m\neq 0} \rho_{j,\alpha}(m)\sqrt{y}K_{i\varkappa_j}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx}$$

имеют коэффициенты Фурье с мультипликативной структурой:

$$\rho_{j,\alpha}(m) = \rho_{j,\alpha}(1)t^*_{j,\alpha}(m), \quad m \geqslant 1.$$

Феномен мультипликативной структуры в вершине $\alpha = 0$ объясняется следующим образом (это объяснение принадлежит проф. А. Б. Венкову). Если для собственного числа λ_j выписать множество всех собственных функций этого числа

$$\Big\{f_{j,1}, \dots, f_{j,k}(z)\Big\}, \quad k \geqslant 1 \text{ — кратность } \lambda_j$$

и подействовать на них матрицей σ_0

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{q}} \\ -\sqrt{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0(\infty) = 0,$$

то в результате мы получим то же самое множество функций числа λ_j с точностью до перестановки. Это означает, что σ_0 является автоморфизмом этого множества. Отсюда следует феномен мультипликативной структуры вершины $\alpha = 0$, если она есть в вершине $\alpha = \infty$.

Поэтому свертки Ранкина $R^*_{j,\alpha}(s)$ для обеих вершин $\alpha = 0, \infty$ имеют мультипликативную структуру (4.4)

$$R^*_{j,\alpha}(s) = \overline{\rho_{j,\alpha}(1)}\Gamma_j(s)\zeta_q(s)L_{j,\alpha}(s),$$

где

$$L_{j,\alpha}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j,\alpha}(n^2)\chi(n)n^{-s}.$$

Поэтому в функциональном уравнении для сверток Ранкина

$$\widetilde{R}^*_j(s) = \Phi(s)\widetilde{R}^*_j(1-s), \tag{4.15}$$

где

$$\widetilde{R}^*_j(s) = \Big[R^*_{j,\infty}(s), R^*_{j,0}(s)\Big]^t,$$

$\Phi(s)$ – матрица перехода Сельберга. Мы можем сократить левый вектор (4.10) на вектор

$$\widetilde{\xi}_j(s) = \Big[\overline{\rho_{j,\infty}(1)} \cdot \xi(s), \overline{\rho_{j.0}(1)} \cdot \xi(s)\Big]^t, \tag{4.16}$$

а правый вектор (4.10) – на $\widetilde{\xi}_j(1-s)$, используя при этом функциональное уравнение для дзета-функции Римана в нормированной форме:

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \text{где} \quad \xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \cdot \zeta(s).$$

Строго это можно сделать, используя правое умножение равенства (4.15) на обратный вектор (4.11), т.к. $\rho_{j,\infty}(1) \neq 0$ и $\rho_{j,0}(1) \neq 0$.

В результате получается функциональное уравнение для рядов Ранкина:

$$\widetilde{L}_j^*(s,\chi) = \Phi(s)\widetilde{L}_j^*(1-s,\chi), \tag{4.17}$$

где

$$\widetilde{L}_j^* = \Big[L_{j,\infty}^*, L_{j,0}^*\Big]^t,$$

$$L_{j,\alpha}^* \equiv L_{j,\alpha}(s,\chi)\Gamma_j^*(s)\Pi_{p|q}\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big),$$

$$\Gamma_j^*(s) = \pi^{s/2}\Gamma^{-1}\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma_j(s), \quad \Gamma_j(s) \text{ — из (4.2).}$$

Получив функциональное уравнение (4.17), уже можно получить стандартным путем укороченное уравнение [4, 5] для $L_{j,\infty}(s,\chi)$ в критической полосе и вычислить асимптотику квадратичного среднего при $N \to \infty$ для суммы вида:

$$W_N(s,\chi) = \sum_{j=1}^{\infty} \big|L_{j,\infty}(s,\chi)\big|^2 \exp\Big[-\Big(\frac{\varkappa_j}{N}\Big)^2\Big]. \tag{4.18}$$

Для правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ получается асимптотическое равенство:

$$W_N(x,\chi) = c\zeta(2\sigma)N^2 + O(N^{3/2}) \tag{4.19}$$

с некоторой константой $c > 0$.

Из явного вида коэффициента $c > 0$ в правой части (4.19) видно, что он не содержит множителя $|L(s,\chi)|^2$ (квадрата модуля классического ряда Дирихле), который в нем обязательно появился бы, если бы каждый ряд Ранкина $L_j(s,\chi)$ делился на ряд Дирихлу $L(s,\chi)$. (Делимость одного ряда на другой означает, что их отношение является целой функцией в рассматриваемой области.) Этот эффект легко объяснить в области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > 2$ для ряда Ранкина $L_{j,\infty}(s,\chi)$, где не нужно укороченное уравнение. В этом случае достаточно заметить, что главный член в (4.19) получается на диагонали квадрата модуля ряда Ранкина [6], на которой квадрат характера равен единице. Поэтому характера в главном члене (4.19) вообще нет, следовательно, не может быть и классического L-ряда Дирихле и тем более квадрата его модуля.

В более общем случае правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ этот эффект диагонали так же работает, только в более тонком варианте, с использованием укороченного функционального уравнения для $L_j(s,\chi)$ [4, 5].

Для классических конечномерных пространств аналог асимптотики (4.19) получается после подключения усреднения по всем целым четным весам $2k$, $k \geqslant 1$ [7].

В заключении хочу выразить искреннюю признательность своим коллегам Н. Абаренковой, Н. Боголюбову, М. Семеному-Тян-Шанскому за консультации по математической физике, связанные с теоремой о коммутирующих операторах, а также Н. Кузнецову и П. Кулишу за предварительный просмотр рукописи и за ряд замечаний, которые были учтены в окончательном тексте.

Литература

1. H. Jwaniec, *Laplacian for* $\Gamma_0(N)$. — Acta Arithmetica **56**, No. 1 (1990), 65–82.
2. A. Vinogradov, Internet www pdmi ras ru /preprint/ index html No. 18.
3. S. Gelbart, *Weil's representation and the spectrum of the metaplectic group.* — L. N. M. **510** (1976).
4. А. Ф. Лаврик, *Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле.* — Изв АН СССР, Сер. мат. **32**, No. 1 (1968), 134–185.
5. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **74** (1978), 124–158.
6. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* — Мат. сб. No. 3 (1980), 330–383.
7. J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70**, No. 2 (1982), 219–288.

Vinogradov A. I. The reflection operator and canonical bases.

A canonical bases in Hilbert space of automorphic functions is constructed, the invariance group of which has a nontrivial multiplicator.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 октября 2000 г.