Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

Е. Ш. Гутшабаш

ЗАМЕЧАНИЯ О МОДЕЛЕ МАГНЕТИКА ИШИМОРИ

1. Модель магнетика Ишимори является естественным обобщением хорошо известной одномерной интегрируемой модели магнетика Гейзенберга в двумерном случае. Она имеет следующий вид [1]:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_{xx} + \alpha^2 \mathbf{S}_{yy}) + u_y \mathbf{S}_x + u_x \mathbf{S}_y, \tag{1a}$$

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = -2\alpha^2 \mathbf{S}(\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \tag{1b}$$

Здесь $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, y, t) = (S_1, S_2, S_3)$ – трехмерный вектор намагниченности, $|\mathbf{S}| = 1$, $u = u(x, y, t)$ – вспомогательное вещественнозначное поле, параметр α^2 принимает значения ± 1. Случай $\alpha^2 = 1$ будем называть моделью магнетика Ишимори-I (MI-I), случай $\alpha^2 = -1$ – моделью (MI-II).

Из уравнения (1b) при $\alpha = 1$, $\xi = (x+y)/2$, $\eta = (x-y)/2$ следует:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \int\limits_{-\infty}^{\eta} \mathbf{S}(\mathbf{S}_\xi \wedge \mathbf{S}_{\eta'}) d\eta' + u_1(\xi, t), \\ u_\eta &= \int\limits_{-\infty}^{\xi} \mathbf{S}(\mathbf{S}_{\xi'} \wedge \mathbf{S}_\eta) d\xi' + u_2(\eta, t), \end{aligned} \tag{1c}$$

где $u_1(\xi, t)$, $u_2(\eta, t)$ – произвольные функции, причем в силу соотношений $u_1(\xi, t) = \lim\limits_{\eta \to -\infty} u_\xi$, $u_2(\eta, t) = \lim\limits_{\xi \to -\infty} u_\eta$ они играют роль граничных значений модели MI-I.

Отметим два характерных частных случая системы (1a)–(1b): a) если $\mathbf{S}$ не зависит от переменной y, а $u = \mathrm{const}$, то мы получаем одномерную интегрируемую модель магнетика Гейзенберга [2]; b) если $\mathbf{S}$ не зависит от t (статический предел), $\alpha^2 = 1$, $u = \mathrm{const}$, мы имеем так называемую нелинейную $O(3)$ – сигма-модель (эллиптическую версию), которая методом обратной задачи рассеяния (с граничными условиями типа спиральных структур) была решена в [3–4].

Важная черта модели (1) – наличие так называемого топологического заряда:

$$Q_T = \frac{1}{4\pi} \int\int dxdy \mathbf{S}(\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \tag{2}$$

Эта величина сохраняется в процессе эволюции системы и представляет собой отображение единичной 2-сферы на 2-сферу: $\widetilde{S}^2 \to \widetilde{S}^2$. Такое отображение, как известно, характеризуется гомотопической группой $\pi_2(\widetilde{S}^2) = Z$, где Z – группа целых чисел, что означает, что величина Q_T должна быть целым числом. Скалярная функция $u = u(x,t)$, согласно уравнению (1b) имеет смысл плотности производства топологического заряда.

Модели (1) посвящено большое число работ. Здесь мы отметим лишь [5–7], где для решения (1) использовались метод задачи Римана (при $\alpha = 1$) и метод $\overline{\partial}$-проблемы (при $\alpha = i$), а также [8], в которой впервые была установлена калибровочная эквивалентность двух интегрируемых $(2+1)$-мерных систем – модели MI-II и системы Деви-Стюартсона-II, и, наконец, работу [9], посвященную анализу модели (1) с точки зрения совместимых граничных условий.

Цель данной работы – применение метода преобразования Дарбу (ПД) к модели (1). Это позволит нам изучить ряд новых дополнительных симметрий задачи и получить некоторые полезные и важные соотношения, характеризующие (1). Заметим, что впервые этот метод применялся к (1) в работе [10], где однако использовалась несколько нестандартная запись ПД и решалась достаточно частная физическая задача. Это связано с тем, что применение стандартного метода ПД к соответствующей ассоциированной линейной задаче, ввиду ее структуры, не приводит к желаемому ответу (разумным "одевающим" формулам). Поэтому здесь, с целью последовательного применения стандартной формы ПД, мы, исходя из результатов работы [8], вначале используем калибровочное преобразование для исходной ассоциированной линейной системы, а уже затем, после явного определения матрицы этого преобразования, проверяем Дарбу-ковариантность откалиброванной системы.

2. Для того, чтобы проиллюстрировать различия в поведении систем MI-I и MI-II, рассмотрим вначале простейший, но важный с точки зрения физики частный случай – волн постоянной амплитуды.

Пусть $\alpha^2 = 1$ (модель MI-I). Полагая $S_+ = S_1 + iS_2$, $S_- = \overline{S}_+$, $S_3 = \mathrm{const}$, $S_+ = \sqrt{1-S_3^2}e^{i(kx+ly-\omega_0 t+\phi)}$, где k, l, ω_0, $\phi \in \mathbb{R}$ – параметры, и подставляя это решение в уравнения, следующие из (1а):

$$S_{+t} = iS_3\triangle S_+ + u_y S_{+y} + u_x S_{+x}, \quad S_-\triangle S_+ = S_+\triangle S_-,$$

с учетом (1с) и при условии $u_1 = u_2 \equiv 0$ найдем:

$$\omega_0 = S_3(l^2 + k^2). \tag{3}$$

Пусть $\alpha^2 = -1$ (модель MI-II). В этом случае имеем:

$$S_{+t} = iS_3(S_{+xx} - S_{+yy}) + u_y S_{+y} + u_x S_{+x},$$

$$S_1(S_{2xx} - S_{2yy}) = S_2(S_{1xx} - S_{1yy}).$$

Используя тот же анзатц (в предположении, что $S_3 = \mathrm{const}$) и те же граничные условия, получим:

$$\omega_0 = S_3(k^2 - l^2). \tag{4}$$

Различие в сигнатурах квадратичных форм дисперсионных соотношений (3) и (4) и указывает на разный характер поведения решений линеаризованных, а, значит, и нелинейных уравнений в зависимости от знака α^2. Формулы (3), (4) обобщают соответствующую формулу для одномерного магнетика Гейзенберга [11] на двумерный случай.

3. Модель (1) является условием совместности ($\Psi_{yt} = \Psi_{ty}$) следующей переопределенной линейной матричной системы:

$$\Psi_y = \frac{1}{\alpha}S\Psi_x, \tag{5а}$$

$$\Psi_t = -2iS\Psi_{xx} + Q\Psi_x, \tag{5б}$$

где $Q = u_y I + \alpha^3 u_x S + i\alpha S_y S - iS_x$, $\Psi = \Psi(x,y,t) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, $S = \sum_{i=1}^{3} S_i\sigma_i$, σ_i – стандартные матрицы Паули, I – единичная 2×2 матрица. В силу своего определения матрица S обладает свойствами: $S = S^*$, $S^2 = I$, $\det S = -1$ (символ $(*)$ означает эрмитовское сопряжение).

Положим

$$\Psi = \Omega\Phi, \tag{6}$$

где $\Phi = \Phi(x, y, t)$, $\Omega = \Omega(x, y, t) \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ и совершим в (5) калибровочное преобразование с матрицей Ω. Тогда будем иметь ($U \equiv S$):

$$\Phi_y = A\Phi_x + B\Phi, \tag{7}$$

$$\Phi_t = L\Phi_{xx} + M\Phi_x + R\Phi, \tag{8}$$

где

$$A = A(x, y, t) = (1/\alpha)\Omega^{-1}U\Omega,$$

$$B = B(x, y, t) = (1/\alpha)\Omega^{-1}U\Omega_x - \Omega^{-1}\Omega_y,$$

$$L = L(x, y, t) = -2i\Omega^{-1}U\Omega,$$

$$M = M(x, y, t) = -4i\Omega^{-1}U\Omega_x + \Omega^{-1}Q\Omega,$$

$$R = R(x, y, t) = -2i\Omega^{-1}U\Omega_{xx} + \Omega^{-1}Q\Omega_x - \Omega^{-1}\Omega_t,$$

A, B, L, M, $R \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, причем $L = -2i\alpha A$, и, кроме того, $A^2 = (1/\alpha^2)I$, $L^2 = -4I$.

Требование совместности (7)–(8) приводит к соотношениям, включающим искомый потенциал и матрицу Ω:

$$[A, L] = 0, \tag{9}$$

$$AL_x - L_y - 2LA_x + [A, M] + [B, L] = 0, \tag{10}$$

$$A_t + [A, M_x] + [A, R] + [B, M] = LA_{xx} + 2LA_x + 2LB_x + M_y, \tag{11}$$

$$AR_x + B_t + [B, R] = R_y + LB_{xx} + MB_x. \tag{12}$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем $A = \mathrm{const}$. Тогда из (10) следует $(L_x = L_y = 0) : M = -2i\alpha B$, и мы получаем замкнутое линейное дифференциальное уравнение в частных производных на матрицу Ω:

$$2i\Omega_x + 2i\alpha U\Omega_y = UQ\Omega. \tag{13}$$

Пусть $\alpha = 1$ (случай MI-I). Тогда уравнение (13) приводится к виду:

$$2i(I + U)\Omega_\xi = (I + U)Q\Omega. \tag{14}$$

Здесь $\det(I + U) = 0$, и использованы характеристические координаты, уже введенные в (1c).

Из соотношения $\overline{Q}(-U,-u) = -\sigma_2 Q(U,u)\sigma_2$ следует инволюция:

$$\Omega(U,u) = \sigma_2 \overline{\Omega}(-U,-u)\sigma_2, \tag{15}$$

и тогда матрица Ω представляется в виде:

$$\Omega(U,u) = \begin{pmatrix} \omega_{11}(U,u) & -\overline{\omega}_{21}(-U,-u) \\ \omega_{21}(U,u) & \overline{\omega}_{11}(-U,-u) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Для решения уравнения (13) предположим, что

$$S \to \sigma_3, \quad u \to 0, \tag{17}$$

и эти пределы достигаются достаточно быстро при $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$.

Для дальнейших рассуждений удобно ввести стереографическую проекцию (зависимость от t здесь и ниже мы опускаем):

$$w = w(\xi,\eta) = \frac{S_+}{1-S_3}. \tag{18}$$

Интегрируя (14), в предположении, что $\Omega(\xi,\eta) \to I$, $u(\xi,\eta) \to 0$ при $\sqrt{\xi^2+\eta^2} \to \infty$, после ряда вычислений найдем ($\Omega = \{\omega_{ij}\}$, $i = 1,2$):

$$\omega_{11}(\xi,\eta) = e^{\sigma_{01}+i\Phi_{01}}, \quad \omega_{21}(\xi,\eta) = \frac{\omega_{11}(\xi,\eta)}{\overline{w}}, \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} \sigma_{01} = \sigma_{01}(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} d\xi' \frac{\overline{w}_{\xi'}}{\overline{w}(|w|^2+1)}, \\ \Phi_{01} = \Phi_{01}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}u(\xi,\eta); \end{gathered} \tag{20}$$

при этом требование совпадения асимптотик функции $\omega_{11}(\xi,\eta)$ при $\xi \to \pm\infty$ приводит к ограничению (связи) для всех $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \frac{\overline{w}_{\xi'}}{\overline{w}(|w|^2+1)} = 0. \tag{21}$$

Выражение для σ_{01} можно переписать в более симметричной форме:

$$\sigma_{01} = \sigma_{01}(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi' d\eta' \theta(\xi-\xi')\delta(\eta-\eta') \frac{\overline{w}_{\xi'}}{\overline{w}(|w|^2+1)}, \tag{22}$$

где $\theta(.)$ – функция Хевисайда.

В результате матрица Ω представляется в виде произведения:

$$\Omega = \Omega^{(11)}\Omega^{(12)} = \begin{pmatrix} e^{\sigma_{01}} & -\frac{1}{w}e^{\overline{\sigma}_{01}} \\ \frac{1}{\overline{w}}e^{\sigma_{01}} & e^{\overline{\sigma}_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi_{01}} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi_{01}} \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Нетрудно также показать, что если $u(\xi,\eta) \not\to 0$ при $\sqrt{\xi^2+\eta^2} \to \infty$ и при этом, вообще говоря, $\Omega \not\to I$, то из требования совпадения асимптотик при $\xi \to \pm\infty$ следует необходимость выполнения равенства (21) и условия $\Phi_{01}(-\infty,\eta) = \Phi_{01}(+\infty,\eta)$ для всех $\eta \in \mathbb{R}$.

Используя уравнение (1b) и переписав выражение для плотности топологического заряда в терминах переменной w, выразим функцию $u(\xi,\eta)$:

$$u(\xi,\eta) = C_1 \int\int d\xi' d\eta'\, G_1\left(\frac{\xi-\xi'}{2}, \frac{\eta-\eta'}{2}\right) \frac{w_{\eta'}\overline{w}_{\xi'} - w_{\xi'}\overline{w}_{\eta'}}{(|w|^2+1)^2}, \qquad (24)$$

где $G_1(\xi,\eta) = (1/2)\big[\theta(\xi) - \theta(\eta)\big]$ – функция Грина волнового уравнения, C_1 – чисто мнимая постоянная, и, следовательно, матрица Ω оказывется зависящей только от переменной w.

Аналогично при $\alpha = i$ (случай MI-II), полагая $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, из (13) получим уравнение:

$$4i\,(I+U)\,\Omega_{\overline{z}} = (I+U)\,Q\Omega, \qquad (25)$$

причем в силу инволюции

$$\Omega(U,u) = \sigma_2\overline{\Omega}(U,u)\sigma_2, \qquad (26)$$

следующей из соотношения симметрии $Q(U,u) = \sigma_2\overline{Q}(U,u)\sigma_2$, матрица Ω приобретает вид:

$$\Omega(U,u) = \begin{pmatrix} e^{\sigma_{02}(z,\overline{z})} & -\frac{1}{w}e^{\overline{\sigma}_{02}(z,\overline{z})} \\ \frac{1}{\overline{w}}e^{\sigma_{02}(z,\overline{z})} & e^{\overline{\sigma}_{02}(z,\overline{z})} \end{pmatrix} e^{\Phi_{02}}, \qquad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{02}(z,\overline{z}) = \ln\omega_{11} = \int\int \frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{2\pi i} \frac{\overline{w}_{\overline{\zeta}}(\zeta,\overline{\zeta})\overline{w}^{-1}(\zeta,\overline{\zeta})}{(z-\zeta)(1+|w(\zeta,\overline{\zeta})|^2)}, \\ \Phi_{02} = \Phi_{02}(z,\overline{z}) = -\frac{1}{2}u(z,\overline{z}). \end{aligned} \qquad (28)$$

Соотношение (27) получено в предположении $\Omega \to I$, $u(r) \to 0$ при $r \to \infty$, где $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, и применении при интегрировании уравнения (25) техники $\overline{\partial}$-проблемы (см. например, [7, 12]).

Аналогично случаю MI-I, из (27) можно исключить функцию $u(z,\overline{z})$, использовав (1b):

$$u(z,\overline{z}) = C_2 \int\int \frac{dz' \wedge d\overline{z}'}{2i} G_2(z-z', \overline{z}-\overline{z}') \frac{w_{\overline{z}'}\overline{w}_{z'} - \overline{w}_{\overline{z}'} w_{z'}}{(|w|^2+1)^2}, \qquad (29)$$

где $G_2(z,\overline{z}) = (1/\pi)\ln|z|$ – функция Грина оператора Лапласа, C_2 – вещественная постоянная, так что матрица Ω зависит только от переменной w.

Выражение для Ω^{-1} для системы MI-II, как уже отмечалось, впервые несколько другим способом было получено в [8]. Оно не содержит второго сомножителя в (27), что связано с тем, в [8], в отличие от данной работы, предполагалась известной ассоциированная линейная система для калибровочно эквивалентного партнера (уравнение Деви-Стюартсона-II). Кроме того, из соотношения $S = \Omega\sigma_3\Omega^{-1}$, используемого в [8] при установлении калибровочной эквивалентности, следует, что матрица Ω определена с точностью до умножения справа на диагональную матрицу. Таким образом, в случае системы MI-II соотношения (27)–(28) обобщают результат, полученный в [8], а для системы MI-I соответствующие выражения (19)–(24) являются новыми. Калибровочная эквивалентность систем MI-I и Дэви-Стюартсона-I отсутствует (как было показано в [7], оно имеет место только для эффективно одномерных моделей), и, значит, свойства их решений, строго говоря, могут быть совершенно различными.

4. Перейдем к проверке Дарбу-ковариантности системы (7)–(8). Положим

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_x - \tau_1\Phi, \quad \tau_1 = \Phi_{1x}\Phi_1^{-1}, \qquad (30)$$

где Φ_1 – некоторое фиксированное решение этой системы при $S = S_1$, а S_1 – фиксированное решение (1). Тогда требование ковариантности (7)–(8) относительно преобразования (30) приводит к следующим одевающим соотношениям:

$$\widetilde{A} = A,\ \widetilde{B} = B + [A,\tau_1],\ \widetilde{B} = \tau_1 B\tau_1 + (-B_x + \tau_{1y} - A\tau_{1x})\tau_1^{-1}, \quad (31)$$

$$\widetilde{M} = M + [L,\tau_1],\ \widetilde{L} = L,\ \widetilde{R} = R + M_x + 2\widetilde{L}\tau_{1x} + \widetilde{M}\tau_1 - \tau_1 M. \quad (32)$$

Заметим, что при применении ПД (30) матрица Ω, причем $\Omega = \Omega(U)$, также преобразуется: $\Omega \to \widetilde{\Omega}$, где $\widetilde{\Omega} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$,

$\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}(\widetilde{U})$. Это означает, что (31)–(32), наряду с $\widetilde{U}$ и уже вычисленной матрицей Ω, содержат и неизвестную матрицу $\widetilde{\Omega}$, поэтому получение информации о новых решениях модели (1) из этой системы затруднено.

Можно, однако, поступить следующим образом. Предположим, что

$$\widetilde{\Omega}=K\Omega, \tag{33}$$

где $K=K(x,y,t)\in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, тогда из первого из соотношений (31) немедленно получим:

$$\widetilde{U}=KUK^{-1}. \tag{34}$$

Сравнивая это выражение с формулой восстановления потенциала для случая (одномерной) модели магнетика Гейзенберга [2] в солитонном секторе задачи, нетрудно видеть, что матрица K играет роль множителя Бляшке, причем она удовлетворяет обобщенным условиям унитарности (см. ниже).

Используя теперь выражения для M и $\widetilde{M}$, $\widetilde{Q}$ через матрицы Ω и $\widetilde{\Omega}$ соответственно, и вычисляя следы матриц $\widetilde{M}$ и $\widetilde{Q}$, из первого из равенств (32) с учетом (33)–(34) найдем[1]

$$\widetilde{u}_y(x,y,t)=u_y+2i\,\mathrm{Sp}\,\left(UK^{-1}K_x\right). \tag{35a}$$

Соотношения (34), (35a) дают решение системы (1), при условии, что матрица K найдена.

Построим одевающее соотношение в терминах матрицы K для топологического заряда (2), считая, что при применении ПД $Q_T\to\widetilde{Q}_T$. Для этого, с учетом тождества $\mathbf{S}(\mathbf{S}_x\wedge\mathbf{S}_y)=(1/(2i))\,\mathrm{Sp}\,(SS_xS_y)$ перепишем (2) в виде:

$$Q_T=\frac{1}{8\pi i}\int\int dxdy\,\mathrm{Sp}\,\left(SS_xS_y\right). \tag{36}$$

Используя (33)–(34), для $\widetilde{Q}_T$ будем иметь:

$$\widetilde{Q}_T=\frac{1}{4\pi i}\iint dxdy\,\mathrm{Sp}\,\left\{K^{-1}K_x[U,K^{-1}K_y]\right\}. \tag{37a}$$

Выясним теперь некоторые свойства матрицы K.

[1]Более явное выражение для $\widetilde{u}$ будет приведено ниже.

Из одевающего соотношения (31) для $\widetilde{B}$ с учетом (33)–(34) имеем уравнение:

$$UK^{-1}K_x - \alpha K^{-1}K_y = \alpha\Omega[A, \tau_1]\Omega^{-1},$$

или, принимая во внимание выражение для матрицы A:

$$UK^{-1}K_x - \alpha K^{-1}K_y = [U, \Omega\tau_1\Omega^{-1}]. \tag{38a}$$

Умножая обе части этого уравнения справа на матрицу K^{-1}, получаем замкнутое линейное уравнение на матрицу $\widehat{K} \equiv K^{-1}$:

$$U\widehat{K}_x - \alpha\widehat{K}_y = [U, \Omega\tau_1\Omega^{-1}]\widehat{K}. \tag{38b}$$

Учитывая определение τ_1 и формулу (6), будем иметь:

$$U\widehat{K}_x - \alpha\widehat{K}_y = -[U, \Psi_{1x}\Psi_1^{-1} - \Omega_x\Omega^{-1}]\widehat{K}, \tag{39}$$

где Ψ_1 – некоторое фиксированное решение (5).

Уравнение (38a) позволяет переписать формулу (35a) после интегрирования по y в следующем виде:

$$\widetilde{u}(x,y,t) = u(x,y,t) + 2i\alpha \ln \det K + f(x,t), \tag{35b}$$

где предполагается, что $f(x,t)$ – вещественнозначная функция, которая должна определяться с учетом граничных условий типа (1c) и асимптотики матрицы K при $y \to \pm\infty$. Отсюда следует, что требование вещественности $\widetilde{u}$ в случае модели MI-I приводит к ограничению: $\ln|\det K| = 0$, и, значит, тогда

$$\widetilde{u}(x,y,t) = u(x,y,t) - 2\arg\det K + f(x,t). \tag{35c}$$

Используя легко проверяемое тождество

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\left[(K_yK^{-1})_y - \alpha^2(K_xK^{-1})_x\right] \\ &= -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Sp}\left[U(K^{-1})_xK_y - U(K^{-1})_yK_x\right], \end{aligned} \tag{40}$$

находим:

$$\widetilde{Q}_T = \frac{i\alpha}{4\pi}\int\!\!\int dxdy[(\partial_{yy} - \alpha^2\partial_{xx})\ln\det K]. \tag{37b}$$

Вещественность этой величины для случая MI-I следует из замечания, сделанного выше.

Необходимо отметить, что соотношения (34), (35) и (37) согласуются с аналогичными соотношениями, выведенными другими методами – $\overline{\partial}$-одевания и обратной задачи рассеяния – в [5–7].

Обозначив $\Phi[0] = \Phi$, $\Phi[1] = \widetilde{\Phi}$, $\Phi[2] = \tilde{\tilde{\Phi}}, \ldots, \Omega[0] = \Omega$, $\Omega[1] = \widetilde{\Omega}$, $\Omega[2] = \tilde{\tilde{\Omega}}, \ldots$, $K_0 = K$, $\Omega[i+1] = K_i \Omega[i]$, $i = 0, 1, \ldots$, при последующих применениях преобразования Дарбу тогда будем иметь одевающие цепочки вида: $\Phi[0] \to \Phi[1] \to \Phi[2] \ldots$, $\Omega[0] \to \Omega[1] \to \Omega[2] \ldots$, $K_0 \to K_1 \to K_2 \ldots$.

Таким образом, при N-кратном повторении процедуры одевания, из соотношений (34), (35), (37) мы можем без труда выписать формулы, описывающие N-солитонные решения ($U[N] \equiv S[N]$)[2]:

$$U[N] = (\prod_{j=0}^{N} K_{N-j}) U \left(\prod_{j=0}^{N} K_{N-j} \right)^{-1}, \tag{41}$$

$$u[N] = u + 2i\alpha \ln \left(\prod_{j=0}^{N} \det K_j \right) + \sum_{i=1}^{N} f[i], \tag{42}$$

$$Q_T[N] = \frac{i\alpha}{4\pi} \int\int dxdy \Big[(\partial_{yy} - \alpha^2 \partial_{xx}) \ln \det K_N \Big]. \tag{43}$$

Другое – эволюционное – уравнение для матрицы K можно найти, подставляя анзац (34) в (1a). Ограничиваясь для простоты затравочным решением[3] $S = \sigma_3$, с учетом тождества: $(K\sigma_3 K^{-1})_x = \left[K_x K^{-1}, K\sigma_3 K^{-1} \right]$ и формулы (35b), найдем:

$$\begin{gathered} K_t K^{-1} + \frac{1}{2i} \left\{ (K_{xx} + \alpha^2 K_{yy}) \sigma_3 K^{-1} + K\sigma_3 \left[(K^{-1})_{xx} + \alpha^2 (K^{-1})_{yy} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{i} \left[K_x \sigma_3 (K^{-1})_x + \alpha^2 K_y \sigma_3 (K^{-1})_y \right] \\ -(u + 2i\alpha \ln \det K)_y K_x K^{-1} - (u + 2i\alpha \ln \det K)_x K_y K^{-1} = 0. \end{gathered} \tag{44}$$

В заключение этого раздела заметим, что в нашем распоряжении оказываются, таким образом, два, вообще говоря, независимых способа решения системы (1).

[2] Подчеркнем, особо, что в данной работе спектральная задача, в отличие от [5–7] не решалась.

[3] В ином случае такое уравнение просто будет более громоздким.

Первый состоит в том, что задавшись некоторым затравочным решением системы (5), мы находим, решая уравнение (13), матрицу Ω, затем из (39) определяем матрицу $\widehat{K}$ (или K) и, согласно построенным одевающим соотношениям, получаем новые решения (1).

Второй способ связан с непосредственным решением уравнения (44) (хотя в общем случае это и чрезвычайно трудно, но, видимо, возможно в простейших частных случаях), и с последующим использованием одевающих соотношений.

5. Пусть $\alpha = 1$. Тогда из (39) после перехода к характеристическим переменным следует линейное уравнение:

$$(I-U)\widehat{K}_\xi+(U+I)\widehat{K}_\eta = -\left[U,(\Psi_{1\xi}+\Psi_{1\eta})\Psi_1^{-1}-(\Omega_\xi+\Omega_\eta)\Omega^{-1}\right]\widehat{K}. \quad (45)$$

Кроме того, из (15) получаем:

$$K(U,u) = \sigma_2\overline{K}(-U,-u)\sigma_2, \quad (46)$$

и такое же соотношение для матрицы $\widehat{K}$.

Из (45) нетрудно показать, что уравнения для столбцов матрицы $\widehat{K}$ сводятся к гиперболической системе уравнений.

Принимая во внимание (34) и (46), найдем явные представления для компонент $\widetilde{S} \equiv \widetilde{U}$ в терминах матричных элементов матрицы K и для произвольного затравочного решения S:

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_3 = {} & \frac{k_{11}(S,u)\overline{k}_{11}(-S,-u)-k_{21}(S,u)\overline{k}_{21}(-S,-u)}{\det K}S_3- \\ & -\frac{\overline{k}_{21}(-S,-u)\overline{k}_{11}(-S,-u)S_+ + k_{11}(S,u)k_{21}(S,u)S_-}{\det K},\end{aligned} \quad (47)$$

$$\widetilde{S}_+ = \frac{2k_{21}(S,u)\overline{k}_{11}(-U,-u)S_3+\overline{k}_{11}^2(-S,-u)S_+ - k_{21}^2(S,u)S_-}{\det K},$$

где $\det K = k_{11}(S,u)\overline{k}_{11}(-S,-u)+k_{21}(S,u)\overline{k}_{21}(-S,-u)$, причем как было уже показано, необходимо, чтобы выполнялось условие $|\det K| = 1$.

Приведем еще уравнение вида (44), которое формально можно переписать в виде системы уравнений ($u_\xi = u_\eta = 0$):

$$
\begin{aligned}
&K_t + \frac{1}{4i}(K_{\xi\xi} + K_{\eta\eta})\sigma_3 + \frac{1}{4i}K\sigma_3(\widehat{K}_{\xi\xi} + \widehat{K}_{\eta\eta})K + \frac{1}{2i}K_\xi\sigma_3\widehat{K}_\xi K \\
&\quad + \frac{1}{2i}K_\eta\sigma_3\widehat{K}_\eta K - i(\ln \det K)_\xi K_\xi + i(\ln\det \mathrm{K})_\eta K_\eta = 0, \\
&\widehat{K}_t - \frac{1}{4i}\sigma_3(\widehat{K}_{\xi\xi} + \widehat{K}_{\eta\eta}) - \frac{1}{4i}\widehat{K}(K_{\xi\xi} + K_{\eta\eta})\sigma_3\widehat{K} - \frac{1}{2i}\widehat{K}K_\xi\sigma_3\widehat{K}_\xi \\
&\quad - \frac{1}{2i}\widehat{K}K_\eta\sigma_3\widehat{K}_\eta - i(\ln\det K)_\xi\widehat{K}_\xi + i(\ln\det \mathrm{K})_\eta\widehat{K}_\eta = 0.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Пусть $\alpha = i$. Тогда из (39), переходя к переменным $z, \overline{z}$, имеем:

$$
(U+I)\widehat{K}_z + (U-I)\widehat{K}_{\overline{z}} = -\big[U, (\Psi_z + \Psi_{\overline{z}})\Psi^{-1} - (\Omega_z + \Omega_{\overline{z}})\Omega^{-1}\big]\,\widehat{K}, \tag{49}
$$

причем для матрицы $\widehat{K}$ имеет место соотношение симметрии:

$$
\widehat{K}(z,\overline{z},t) = \sigma_2\overline{\widehat{K}}(z,\overline{z},t)\sigma_2. \tag{50}
$$

Уравнение (49), очевидно, может быть сведено к эллиптической системе уравнений.

Кроме того, из (34) и (50) получаем одевающие соотношения вида:

$$
\widetilde{S}_3(z,\overline{z},t) = \frac{(|k_{11}|^2 - |k_{21}|^2)S_3 - k_{11}k_{21}S_- - \overline{k}_{21}\overline{k}_{11}S_+}{\det K}, \tag{51}
$$

$$
\widetilde{S}_+(z,\overline{z},t) = \frac{2\overline{k}_{11}k_{21}S_3 + \overline{k}_{11}^2 S_+ - k_{21}^2 S_-}{\det K}, \tag{52}
$$

где $\det K = |k_{11}|^2 + |k_{21}|^2$.

Заметим, что уравнение (44) в этом случае можно также переписать в виде системы нелинейных уравнений ($u_z = u_{\overline{z}} = 0$):

$$
\begin{aligned}
&K_t + \frac{1}{i}(K_{zz} + K_{\overline{zz}})\sigma_3 + \frac{1}{i}K\sigma_3(\widehat{K}_{zz} + \widehat{K}_{\overline{zz}})K \\
&\quad -2i(K_z\sigma_3\widehat{K}_z + K_{\overline{z}}\sigma_3\widehat{K}_{\overline{z}})K \\
&\quad +4i\big[(\ln\det K)_z\, K_z - (\ln\det K)_{\overline{z}}K_{\overline{z}}\big] = 0, \\
&\widehat{K}_t - \frac{1}{i}\widehat{K}(K_{zz} + K_{\overline{zz}})\sigma_3\widehat{K} - \frac{1}{i}\sigma_3(\widehat{K}_{zz} + \widehat{K}_{\overline{zz}}) \\
&\quad +2i\widehat{K}(K_z\sigma_3\widehat{K}_z + K_{\overline{z}}\sigma_3\widehat{K}_{\overline{z}}) \\
&\quad -4i\widehat{K}\left[(\ln\det k)_z K_z - (\ln\det K)_{\overline{z}}K_{\overline{z}}\right]\widehat{K} = 0.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Несмотря на сложность и громоздкость уравнений (48) и (53), они могут быть полезны в качестве источников некоторых решений модели (1).

6. Установим связь развитого здесь подхода со спектральным. Для этого необходимо ввести в систему (5) спектральный параметр. Положим в (5a) $\Psi = \psi \exp[(i/\lambda)xI - i\sigma^{(1)}y/(\alpha\lambda) + 2iUt/\lambda^2)]$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ - спектральный параметр, $\sigma^{(1)} = \sigma^{(1)}(x,y,t)$, $\psi = \psi(x,y,t)$, $\sigma^{(1)}$, $\psi \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, причем предполагая, что $[\sigma^{(1)}, U] = 0$. Тогда функция ψ должна удовлетворять уравнению:

$$\psi_y - \frac{i}{\alpha\lambda}\psi\sigma^{(1)} = \frac{1}{\alpha}U\psi_x + \frac{i}{\alpha\lambda}U\psi. \tag{54}$$

Представляя ψ в виде $\psi = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k\lambda^k$, при $|\lambda| \to 0$ из (54), в частности, найдем: $-\psi_0\sigma^{(1)} = U\psi_0$.

Аналогично для системы (7), полагая $\Phi = \varphi \exp[(i/\lambda)xI - i\sigma^{(1)}y/(\alpha\lambda) + 2iUt/\lambda^2]$, получим уравнение:

$$\varphi_y - \frac{i}{\alpha\lambda}\varphi\sigma^{(1)} = A\varphi_x + \frac{i}{\lambda}A\varphi + B\varphi. \tag{55}$$

Положив $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\lambda^k$, $|\lambda| \to 0$, будем иметь:

$$A = -(1/\alpha)\varphi_0\sigma^{(1)}\varphi_0^{-1} = (1/\alpha)\Omega^{-1}U\Omega.$$

Таким образом, $\sigma^{(1)} = -U$, $\psi_0 = \Omega\varphi_0$, а из равенств для матрицы A находим: $\phi_0 = \Omega^{-1}$, и, значит, $\psi_0 = I$.

7. В заключение отметим, что в данной работе основной акцент был сделан на специфике применения ПД к модели (1) без предъявления явных решений, поскольку достаточно широкий набор и классификация этих решений приведена в [5–7]. С другой стороны, в работах [13–15] была предложена серия интегрируемых моделей (магнетики Мурзакулова), которые являются некоторыми модификациями (или обобщениями) модели Ишимори. Но в связи с тем, что соответствующие ассоциированные линейные системы этих моделей близки, то использованная выше схема применения ПД вполне приложима и к указанной серии, хотя это и может привести к изменению матриц калибровочного преобразования. По-видимому, также представляет интерес и дифференциально-геометрическая интерпретация ряда приведенных соотношений.

Автор благодарен П. П. Кулишу за поддержку.

Литература

1. Y. Ishimori, — Progr. Theor. Phys. **72** (1984), 33.
2. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М., Наука (1986).
3. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, — ТМФ **90**, No. 2 (1992), 175.
4. Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, — ТМФ **104**, No. 3(1995), 513.
5. V. G. Dubrovsky, B. G. Konopelchenko, *Coherent structures for the Ishimori equation. 1. Localized solitons with the stationary boundaries.* — Preprint No. 90–76. Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1990).
6. V. G. Dubrovsky, B. G. Konopelchenko, *Coherent structures for the Ishimori equation. 2. Time-depend boundaries.* — Preprint No. 91–29. Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1990).
7. B. G. Konopelchenko, — Solitons in Multidimensions. World Scientific (1993).
8. В. Д. Липовский, А. В. Широков, — Функц. анализ и прилож. **104**, No. 3 (1989), 65.
9. И. Т. Хабибуллин, — ТМФ **91**, No. 3 (1992), 363.
10. K. Imai, K. Nozaki, — Progr. Theor. Phys, **96**, (1996) 521.
11. H. C. Fogedby, — J. Phys. A, **13**, (1980) 1467.
12. M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations, and Inverse Scattering.* Cambridge University Press (1991).
13. R. Murzakulov, *On some integrable and nonintegrable soliton equations of magnets.* — Preprint KSU, Alma-Ata (1987).
14. G. N. Nugmanova, *The Murzakulov equatuions: the Gauge equivalent counteparts and soliton solutions.* — Preprint KSU, Alma-Ata (1992).
15. N. K. Bliev, G. Nugmanova, R. N. Syzdukova, R. Murzakulov, *Soliton equations in 2+1 dimensions: reductions, bilinearizations and simplest solutions.* — Preprint CNLP No. 1997-05, Alma-Ata (1997); solv/int 990214.

Gutshabash E. Sh. Some note on Ishimori's magnet model.

Gauge transformation properties for an associated linear system of model Ishimori's magnet model have been discussed. Implicit formulas for the gauge transformation matrix have been obtained. Darboux Transformation has been suggested and appropriate dressing relations have been found.

НИИ Физики
С.-Петербургского
государственного
университета

Поступило 25 октября 2002 г.