Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов

СОВМЕСТНОЕ КВАНТОВАНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ БИАЛГЕБР

1. Введение

В настоящей работе мы обсудим процедуру совместного многопараметрического квантования набора трехмерных алгебр Ли, включающего алгебру Гейзенберга $h(3)$, алгебры Ли групп движений евклидовой $e(2)$ и псевдоевклидовой $p(2)$ плоскостей и алгебру $su(2)$. Такое квантование возможно, так как каждая из этих алгебр L по отдельности образует пару Дринфельда (L, L^*) [1] с одной и той же разрешимой алгеброй L^*, определяемой коммутационными соотношениями

$$L^* \equiv j(3) = \{e^1, e^2, e^3| \quad [e^1, e^2] = e^2, \quad [e^1, e^3] = e^3, \quad [e^2, e^3] = 0.\} \tag{1}$$

Более того, все эти алгебры (кроме простой алгебры $su(2)$) являются биалгебрами у которых структуры и коструктуры определяются соответствующими r-матрицами. Несколько примеров биалгебр с таким свойством были приведены в работе [2] и названы там би-r-матричными.

Для удобства напомним несколько определений. Классическая r-матрица появляется в теории биалгебр Ли [1, 3] следующим образом. Рассмотрим конечномерную алгебру Ли L с генераторами $\{e_i\}$, $i = 1, ..., n$ и перестановочными соотношениями

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k, \tag{2}$$

где C_{ij}^k – структурные постоянные. Обозначим L^* пространство, дуальное к L. Фиксируем базис в L^* условием

$$e^i(e_j) \equiv < e^i, e_j >= \delta_j^i.$$

Алгебра L называется биалгеброй, если она снабжена отображением (копроизведением)

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, гранты 00-01-00500, 02-01-00085.

$$\delta : L \to L \otimes L,$$

являющимся 1-коциклом

$$\delta([x,y]) = [\delta(x), y \otimes 1 + 1 \otimes y] + [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \delta(y)], \qquad (3)$$

и определяющим на дуальном пространстве L^* скобку Ли

$$[.,.]_* : L^* \otimes L^* \to L^* :$$

$$< [\xi, \eta]_*, x >=< \xi \otimes \eta, \delta(x) >, \qquad x \in L, \qquad \xi, \eta \in L^*. \qquad (4)$$

Элемент $r = \rho^{mn}\ e_m \otimes e_n \in L \otimes L$, такой что 1-коцикл δ может быть записан в виде

$$\delta(x) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, r], \qquad (5)$$

называется классической r-матрицей, а биалгебра Ли L в этом случае - кограничной или r-матричной биалгеброй. Если, в свою очередь, на дуальной алгебре L^* существует 1-коцикл δ^*, определяемый элементом r^*, такой, что

$$\delta^*(\xi) = [\xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi, r^*], \quad \xi \in L^*, \quad r^* \in L^* \otimes L^*, \qquad (6)$$

и

$$< \delta^*(\xi), x \otimes y >=< \xi, [x,y] >, \qquad x, y \in L, \qquad \xi \in L^*, \qquad (7)$$

то такую биалгебру L естественно назвать би-r-матричной биалгеброй.

Приведем несколько примеров би-r-матричных биалгебр. Простейшим из них является неабелева двумерная биалгебра Ли [1] с перестановочным соотношением между генераторами

$$[e_1, e_2] = e_1. \qquad (8)$$

Единственно возможная в двумером случае треугольная r-матрица, т.е. r-матрица, удовлетворяющая классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE)

$$[r_{12}, r_{13} + r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]] = 0 \qquad (9)$$

и условию унитарности $\rho^{mn} = -\rho^{nm}$, имеет вид

$$r = e_1 \wedge e_2 \qquad (10)$$

и определяет на дуальном пространстве L^* перестановочные соотношения
$$[e^1, e^2]_* = e^2,$$
аналогичные (8). Матрица r^*, индуцирующая на L исходную структуру, определяется соотношением
$$r^* = -e^1 \wedge e^2. \tag{11}$$
Приведенный двумерный случай (как и его обобщение на случай $sl(n)$ [4]) исключительно важен, поскольку для него известен соответствующий твист, определяющий квантование алгебры (8) и соответствующая универсальная R-матрица [5].

Рассмотренная биалгебра является самодуальной. Более сложный пример самодуальной би-r-матричной биалгебры дает так называемая $(1+1)$ расширенная алгебра Галилея [6, 7]. Четыре генератора этой алгебры удовлетворяют перестановочным соотношениям
$$\begin{gathered}[e_3, e_1] = e_2, \quad [e_3, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_2] = 0, \\ [e_4, \text{любой элемент}] = 0.\end{gathered} \tag{12}$$
Матрица $r = e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4$ индуцирует на соответствующем дуальном пространстве структуру алгебры Ли изоморфную (12)
$$\begin{gathered}[e^2, e^4]_* = e^1, \quad [e^1, e^4]_* = e^3, \quad [e^1, e^2]_* = 0, \\ [e^3, \text{любой элемент}]_* = 0,\end{gathered}$$
$(e_1 \sim e^2, e_2 \sim -e^1, e_3 \sim e^4, e_4 \sim e^3)$. Матрица, определяющая исходную структуру на L, равна
$$r^* = -(e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4).$$

Перейдем к наиболее существенным для дальнейшего изложения примерам трехмерных би-r-матричных биалгебр. Среди них нет самодуальных [2]. На алгебре Гейзенберга $h(3)$, задаваемой перестановочными соотношениями
$$h(3) = \{e_1, e_2, e_3 | \quad [e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_3] = 0\}, \tag{13}$$
структура биалгебры Ли определяется r-матрицей [8, 9, 10, 11]
$$r = -e_2 \wedge e_3 \tag{14}$$

не удовлетворяющей классическому уравнению Янга–Бакстера (CYBE). Она индуцирует на дуальном пространстве L^* алгебру $j(3)$ с коммутаторами (1)

$$[e^1, e^2] = e^2, \quad [e^1, e^3] = e^3, \quad [e^2, e^3] = 0.$$

В свою очередь, треугольная матрица

$$r^* = 1/2e^2 \wedge e^3 \tag{15}$$

определяет на $h(3)$ исходные перестановочные соотношения (13).

Алгебры Ли групп движений евклидовой $e(2)$ и псевдоевклидовой плоскостей $p(2)$ задаются перестановочными соотношениями

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = \kappa e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2, \tag{16}$$

где $\kappa = 1$ для алгебры $e(2)$ и $\kappa = -1$ для алгебры $p(2)$. Треугольная r-матрица

$$r = e_1 \wedge e_3 + \sigma e_2 \wedge e_3, \tag{17}$$

где $\sigma = 1$ для $p(2)$ и $\sigma = i$ – мнимая единица – для $e(2)$, определяет в дуальной алгебре Ли соотношения

$$[e^1, e^2]_* = -e^1 - \kappa\sigma e^2, \quad [e^2, e^3]_* = e^3, \quad [e^1, e^3]_* = -\kappa\sigma e^3. \tag{18}$$

Треугольная матрица

$$r^* = -\frac{1}{2}(e^1 \wedge e^3 - \kappa\sigma e^2 \wedge e^3) \tag{19}$$

индуцирует на $e(2)$ и $p(2)$ исходные соотношения.

Алгебра Ли, порожденная коммутаторами (18), эквивалентна алгебре $j(3)$, так как генераторы

$$\tilde{e}^1 = e^2, \quad \tilde{e}^2 = -e^1 - \kappa\sigma e^2, \quad \tilde{e}^3 = e^3. \tag{20}$$

удовлетворяют соотношениям (1). Таким образом, как алгебра Гейзенберга, так и алгебры Ли движений евклидовой $e(2)$ и псевдоевклидовой $p(2)$ плоскостей двойственны одной и той же алгебре $j(3)$.

Хорошо известно, что простая алгебра $su(2)$ также имеет в качестве алгебры, дуальной по Дринфельду, алгебру $j(3)$ [1, 3].

Действительно, используя матрицу $r = e^2 \wedge e^3$, из

$$[e^1, e^2]_* = e^3, \quad [e^1, e^3]_* = -e^2, \quad [e^2, e^3]_* = e^1 \tag{21}$$

получаем перестановочные соотношения алгебры $j(3)$. Заметим, что $r = e^2 \wedge e^3$ не удовлетворяет CYBE, а сама алгебра $su(2)$ не является би-r-матричной.

Из сказанного выше следует возможность одновременного квантования всех четырех описанных трехмерных биалгебр, имеющих одну и ту же алгебру $j(3)$ в качестве дуальной. Такое квантование будет проведено в следующем разделе.

2. Квантование

В этом разделе будет осуществлено одновременное квантование, указанных во Введении, трехмерных алгебр Ли, каждая из которых имеет в качестве дуальной одну и ту же алгебру $j(3)$ (1). Квантование будет проведено в два этапа по схеме, описанной в работе Огиевецкого [5]. На первом этапе на пространстве дуальном $j(3)$ будет определено копроизведение согласованное со структурой алгебры Ли (1). На втором этапе будут получены согласованные с этим копроизведением перестановочные соотношения.

Рассмотрим универсальную обёртывающую алгебру $\mathcal{U}(j(3))$ с генераторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям (1) алгебры Ли $j(3)$

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Определим дуальное к $\mathcal{U}(j(3))$ пространство $\mathcal{U}^*$ порождающие элементы которого (p, t, s) нормированными так, что

$$\begin{aligned} &< p, e_3^k e_2^m e_1^n >= \delta_1^k \delta_0^m \delta_0^n, \quad < t, e_3^k e_2^m e_1^n >= \delta_0^k \delta_1^m \delta_0^n, \\ &\qquad < s, e_3^k e_2^m e_1^n >= \delta_0^k \delta_0^m \delta_1^n. \end{aligned} \tag{22}$$

Используя определение копроизведения на дуальной алгебре Хопфа

$$< \Delta^* \xi, u \otimes v >=< \xi, uv >,$$

где $u, v \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathcal{U}^*$, имеем для s

$$\begin{aligned} < \Delta^* s, e_3^k e_2^m e_1^n \otimes e_3^a e_2^b e_1^c >&=< s, e_3^{k+a} e_2^{m+b} (e_1 + a + b)^n e_1^c > \\ &= \delta_0^k \delta_0^a \delta_0^m \delta_0^b (\delta_0^n \delta_1^c + \delta_1^n \delta_0^c). \end{aligned} \tag{23}$$

Соотношению (23) удовлетворяет единственное копроизведение

$$\Delta^* s = s \otimes 1 + 1 \otimes s, \tag{24}$$

Аналогичную процедуру применим для генераторов p и t. Для p, например, получаем

$$< \Delta^* p, e_3^k e_2^m e_1^n \otimes e_3^a e_2^b e_1^c >=< p, e_3^{k+a} e_2^{m+b} (e_1 + a + b)^n e_1^c >$$
$$= \delta_0^b \delta_0^m \delta_0^c (\delta_0^k \delta_1^a + \delta_0^a \delta_0^n \delta_1^k). \tag{25}$$

Это равенство основано на соотношениях $e_1 e_2 = e_2(e_1 + 1)$, $e_1 e_3 = e_3(e_1 + 1)$ и (22). Фиксируя стандартное кокоммутативное произведение в алгебре $\mathcal{U}(j(3))$, генераторы которой являются примитивными элементами

$$\Delta_0(e_i) = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

получаем, что наиболее общее выражение копроизведения $\Delta^* p$, удовлетворяющее (25) дается формулой

$$\Delta^* p = p \otimes 1 + e^s \otimes p. \tag{26}$$

При выводе (26) было использовано выражение

$$< s^l, e_3^k e_2^m e_1^n >= n! \delta_0^k \delta_0^m \delta_l^n,$$

вытекающее из условий нормировки (22), вида недеформированного копроизведения Δ_0 и определения

$$< \xi \otimes \zeta, \Delta u >=< \xi\zeta, u >,$$

где $u \in \mathcal{U}$, $\xi, \zeta \in \mathcal{U}^*$. Аналогичная аргументация дает

$$\Delta^* t = t \otimes 1 + e^s \otimes t. \tag{27}$$

Последующие выкладки удобно осуществить введя новый генератор $g = e^s$. Имеем

$$\Delta^* p = p \otimes 1 + g \otimes p, \Delta^* t = t \otimes 1 + g \otimes t, \Delta^* g = g \otimes g. \tag{28}$$

Фиксируем естественное нормальное упорядочение $p^i t^j g^k$ базисных элементов алгебры $\mathcal{U}^*$ и запишем перестановочные соотношения для всех пар элементов g,p и t в виде

$$gp = \sum \alpha_{ijk} p^i t^j g^k, \quad gt = \sum \beta_{ijk} p^i t^j g^k, \quad tp = \sum \gamma_{ijk} p^i t^j g^k \tag{29}$$

с произвольными числовыми коэффициентами α_{ijk},β_{ijk},γ_{ijk}. Предполагая, что суммы в правых частях соотношений являются полиномами по генераторам p, t, g не выше второй степени $i+j+k \leq$

2, подставим их в равенства, получаемые из (29) вычислением копроизведений. Еще раз используя предполагаемый вид перестановочных соотношений, приходим к согласованным правилам коммутации

$$\begin{aligned} gp &= \alpha_1(g - g^2) + \alpha_2 pg + \alpha_3 tg \\ gt &= \beta_1(g - g^2) + \beta_2 pg + \beta_3 tg \\ tp &= \gamma_1(1 - g^2) + \gamma_2 p + \gamma_3 t + \gamma_4 p^2 + \gamma_5 t^2 + \gamma_6 pt\,. \end{aligned} \tag{30}$$

В перестановочные соотношения (30) входят 12 числовых параметров $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$, подчиняющихся следующим связям

$$\begin{aligned} &\alpha_3\gamma_4 + \beta_3\gamma_6 = 1, \qquad \alpha_1 = \gamma_3 + \beta_1\gamma_5, \qquad \alpha_2 = \gamma_6 + \gamma_5\beta_2, \\ &\alpha_3 = \gamma_5(1 + \beta_3), \quad \gamma_2 + \alpha_1\gamma_4 + \beta_1\gamma_6 = 0, \quad \gamma_4(1 + \alpha_2) + \beta_2\gamma_6 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Исключим некоторые из параметров с помощью линейных автоморфизмов. Прежде всего мы имеем преобразования симметрии $p \leftrightarrow t$. В этом случае

$$\alpha_1 \leftrightarrow \beta_1, \quad \alpha_3 \leftrightarrow \beta_2, \quad \beta_3 \leftrightarrow \alpha_2$$

и

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \to -\gamma_1/\gamma_6, \quad \gamma_2 \to -\gamma_3/\gamma_6, \quad \gamma_3 \to -\gamma_2/\gamma_6, \\ &\gamma_4 \to -\gamma_5/\gamma_6, \quad \gamma_5 \to -\gamma_4/\gamma_6, \quad \gamma_6 \to -1/\gamma_6. \end{aligned}$$

Рассмотрим соотношения (3) с другими значениями коэффициентов (мы будем их помечать "штрихом"). Пусть линейные преобразования

$$\begin{aligned} p' &= \alpha p + \beta t + \gamma(1 - g) \\ t' &= \delta p + \varepsilon t + \mu(1 - g) \end{aligned} \tag{32}$$

с некоторыми коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu$ не меняют вида уравнений (30). Подставляя (32) в (30) и перегруппировав члены, получаем

$$\begin{aligned} gp &= \alpha'_2 g(1 - g) + \alpha'_8 pg + \alpha'_{10} tg, \\ gt &= \beta'_2 g(1 - g) + \beta'_8 pg + \beta'_{10} tg. \end{aligned} \tag{33}$$

Новые коэффициенты в соотношениях (33) могут быть выражены через исходные в виде

$$\alpha_1' = 1/D[\alpha_1\varepsilon + (\alpha_2 - 1)\gamma\varepsilon + \alpha_3\varepsilon\mu - \beta_1\beta + (1-\beta_3)\beta\mu - \beta_2\beta\gamma], \tag{34a}$$

$$\alpha_2' = 1/D[\alpha_2\alpha\varepsilon + \alpha_3\delta\varepsilon - \beta_2\alpha\beta - \beta_3\beta\delta], \tag{34b}$$

$$\alpha_3' = 1/D[\alpha_3\varepsilon^2 + (\alpha_2 - \beta_3)\beta\varepsilon - \beta_2\beta^2], \tag{34c}$$

$$\beta_1' = 1/D[\beta_1\alpha + (\beta_3 - 1)\alpha\mu + \beta_2\alpha\gamma - \alpha_1\delta - (\alpha_2 - 1)\gamma\delta - \alpha_3\delta\mu], \tag{34d}$$

$$\beta_2' = 1/D[\beta_2\alpha^2 - \alpha_3\delta^2 + (\beta_3 - \alpha_2)\alpha\delta], \tag{34e}$$

$$\beta_3' = 1/D[\beta_2\alpha\beta + \beta_3\alpha\varepsilon - \alpha_2\beta\delta - \alpha_3\delta\varepsilon], \tag{34f}$$

где $D = \alpha\varepsilon - \beta\delta \neq 0$. Из соотношений (34) $(c), (e)$ и неравенства $D \neq 0$, следует, что преобразованиями (32) можно добиться одновременного равенства нулю коэффициентов α_3' и β_2' при всех значениях коэффициентов $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$, кроме случаев

$$\begin{aligned} &(a) \quad \alpha_3 \neq 0, \alpha_2 = \beta_3, \beta_2 = 0, \\ &(b) \quad \beta_2 \neq 0, \beta_3 = \alpha_2, \alpha_3 = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Если соотношения (35) не имеют места, можно положить $\alpha_3 = \beta_2 = 0$. Рассмотрим эти возможные случаи по отдельности.

$\alpha_3 = \beta_2 = 0$**.** Подставляя значения $\alpha_3 = \beta_2 = 0$ в уравнения (30) и соотношения (31), получаем

$$\begin{aligned} gp &= \alpha_1(g - g^2) + \alpha_2 pg \\ gt &= \beta_1(g - g^2) + \beta_3 tg \\ tp &= \gamma_1(1 - g^2) + \gamma_2 p + \gamma_3 t + \gamma_4 p^2 + \gamma_5 t^2 + \gamma_6 pt, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\beta_3\gamma_6 = 1, \quad \alpha_1 = \gamma_3 + \beta_1\gamma_5, \quad \alpha_2 = \gamma_6,$$

$$\gamma_5(1+\beta_3) = 0, \quad \gamma_2 + \alpha_1\gamma_4 + \beta_1\gamma_6 = 0, \quad \gamma_4(1+\alpha_2) = 0. \tag{37}$$

Из результатов [5] следует, что дополнительными линейными преобразованиями первого и второго из соотношений (36) можно добиться выполнения одного из следующих условий

2.1.1. $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 1$, $\beta_3 \neq 1$.

Из соотношений (37)

$$\begin{gathered}\beta_3\alpha_2 = 1, \quad \gamma_3 = 0,\\ \gamma_5(1+\beta_3) = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_4(1+\alpha_2) = 0.\end{gathered} \tag{38}$$

Уравнения связи между коэффициентами (38) распадаются на следующие два различных случая.
$\alpha_2 = \Phi \neq -1$, $\beta_3 \neq -1$, $\gamma_1 = \Gamma$:

$$\begin{aligned} gp &= \Phi pg\\ gt &= 1/\Phi tg\\ tp &= \Gamma(1-g^2) + \Phi pt. \end{aligned} \tag{39}$$

$\alpha_2 = \beta_3 = -1$, $\gamma_1 = \Gamma$, $\gamma_4 = \Theta$, $\gamma_6 = \Delta$

$$\begin{aligned} gp + pg &= 0\\ gt + tg &= 0\\ tp + pt &= \Gamma(1-g^2) + \Theta p^2 + \Delta t^2. \end{aligned} \tag{40}$$

2.1.2. $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_3 = 1$, $\alpha_1 = \gamma_3 = \Phi$, $\gamma_1 = \Gamma$, $\beta_1 = -\gamma_2 = \Delta$:.

$$\begin{aligned} [g,p] &= \Phi(g-g^2)\\ [g,t] &= \Delta(g-g^2)\\ [t,p] &= \Gamma(1-g^2) - \Delta p + \Phi t. \end{aligned} \tag{41}$$

2.2. $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_3$, $\beta_2 = 0$. В этом случае соотношения (31) упрощаются

$$\alpha_2 = \gamma_6 = 1, \quad \gamma_4 = 0, \quad \alpha_1 = \gamma_3 + \beta_1\gamma_5, \quad \alpha_3 = 2\gamma_5, \quad \gamma_2 + \beta_1 = 0. \tag{42}$$

Обозначив $\alpha_1 = \Phi$, $\alpha_3 = \Theta$, $\beta_1 = \Delta$, $\gamma_1 = \Gamma$, запишем коммутационные соотношения (30) в виде

$$\begin{aligned} [g,p] &= \Phi(g-g^2) + \Theta tg,\\ [g,t] &= \Delta(g-g^2),\\ [t,p] &= \Gamma(1-g^2) - \Delta p + (\Phi - \Delta\Theta/2)t + \Theta/2t^2. \end{aligned}$$

Условие $\alpha_3 = \Theta \neq 0$ позволяет (выполнив перенормировку p и коэффициентов Φ и Γ) положить $\Theta = 1$. Окончательно получим

$$\begin{aligned}[g,p] &= \Phi(g-g^2)+tg\\ [g,t] &= \Delta(g-g^2)\\ [t,p] &= \Gamma(1-g^2)-\Delta p+(\Phi-\Delta/2)t+1/2t^2\end{aligned} \tag{43}$$

Второй случай $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 = \alpha_2$, $\alpha_3 = 0$ является аналогичным рассмотренному из-за симметрии между p и t.

В заключение этого раздела кратко обсудим классический предел полученных квантовых алгебр, задаваемых перестановочными соотношениями (30). Вводя параметр квантования h, подставим в формулы (30) и (31), следующие разложения как самих генераторов p, t, g, так и числовых коэффициентов

$$\begin{aligned} g &= 1+hg_1+\dots \qquad & t &= ht_1+\dots\\ p &= hp_1+\dots & \delta_i &= \delta_{i,0}+h\delta_{i,1}+\dots. \end{aligned} \tag{44}$$

В последней из формул (44) δ_i – любой из коэффициентов $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$. В первом порядке по h получаем коммутаторы

$$\begin{aligned}[g_1,p_1] &= -\alpha g_1+\gamma p_1+2\varepsilon t_1,\\ [g_1,t_1] &= -\beta g_1+2\delta p_1-\gamma t_1,\\ [t_1,p_1] &= -2\mu g_1-\beta p_1+\alpha t_1.\end{aligned} \tag{45}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu$ – произвольные коэффициенты, связанные с коэффициентами разложений (44). Структура коммутаторов (45) показывает, что каждая из перечисленных выше 3-мерных алгебр Ли $(h(3), su(2), e(2), p(2))$ может быть восстановлена в классическом пределе (44).

3. Построение числовой R-матрицы

Изучим вопрос, в какой степени коммутационные соотношения (30) согласуются с R-матричной формулировкой теории квантовых групп и алгебр Фаддеева-Решетихина-Тахтаджяна [12]. Напомним, что в этом подходе центральную роль играет фундаментальное соотношение квантового метода обратной задачи

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \tag{46}$$

являющееся сжатой матричной записью однородных квадратичных соотношений на n^2 генераторов t_{ij}, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ квантовой алгебры F_q. Элементы числовой $n^2 \times n^2$ матрицы R играют роль структурных постоянных. Обозначения $T_1 = T \otimes 1$, $T_2 = 1 \otimes T$, где $T = (t_{ij})$ – $n \times n$-матрица генераторов алгебры F_q , стандартны для квантового метода обратной задачи и R-матричного формализма. Обычно предполагается, что R-матрица квазитреугольна, т.е. является решением уравнения Янга-Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{47}$$

Матричная форма FRT-соотношения (46) позволяет сравнительно легко ввести в ассоциативную алгебру F_q, наряду с умножением, дополнительные отображения (коумножение, коединица и антипод) и превратить ее в алгебру Хопфа – квантовую группу. Например, коумножение определяется матричным соотношением

$$\Delta T = T(\otimes)T. \tag{48}$$

В качестве первого шага построим T-матрицу, согласовав полученные выше копроизведения (28) с соотношением (48). Поскольку (28) линейны в каждом тензорном сомножителе, будем предполагать что матрица T также линейна по генераторам g, p, t. Рассмотрим линейный многочлен по переменным g, p, t с коэффициентами в некотором некоммутативном кольце

$$T = A1 + Bg + Ct + Dp. \tag{49}$$

Подставляя (49) в (48) и учитывая закон умножения $Bg \otimes Dp = BD(g \otimes p)$, получаем

$$\begin{array}{cccc} AA = A & BA = 0 & CA = C & DA = D \\ AB = 0 & BB = B & CB = 0 & DB = 0 \\ AC = 0 & BC = 0 & CC = 0 & DC = 0 \\ AD = 0 & BD = D & CD = 0 & DD = 0 \end{array} \tag{50}$$

Поскольку коэффициенты A и B являются ортогональными проекторами, в представлении трехмерными матрицами их можно представить в виде диагональных матриц, положив

$$A = \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Матрицы C и D выбираем в виде

$$C = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & . & . \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & 1 & . \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Заметим, что для C и D допустим более сложный вид. Например можно выбрать

$$C = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ a & b & . \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ c & d & . \end{pmatrix}$$

при произвольных a, b, c, d.

При выборе (51), (51) имеем

$$T = \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ t & p & g \end{pmatrix};$$

$$\Delta T = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & & \\ & 1 \otimes 1 & \\ t \otimes 1 + g \otimes t & p \otimes 1 + g \otimes p & g \otimes g \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Наш следующий шаг состоит в построении подходящей R–матрицы. Запишем

$$R = R_{AA} A \otimes A + R_{AB} A \otimes B + ... \tag{54}$$

и подставим это выражение в RTT-соотношение [12],

$$RT_1T_2 = T_2T_1R,$$

где

$$T_1 = A \otimes 1 \otimes 1 + B \otimes 1 \otimes g + C \otimes 1 \otimes t + D \otimes 1 \otimes p$$

и

$$T_2 = 1 \otimes A \otimes 1 + 1 \otimes B \otimes g + 1 \otimes C \otimes t + 1 \otimes D \otimes p.$$

Сравнив соответствующие члены имеем

$$R_{AA} = R_{AB} = R_{BA} = R_{BB},$$

$$R_{CB} = -R_{BC}, \quad R_{DB} = -R_{BD}, \quad R_{DC} = -R_{CD},$$

$$R_{AC} = R_{AD} = R_{CA} = R_{DA} = R_{CC} = R_{DD} = 0.$$

R-Матрица с такими свойствами совместна с коммутационными соотношениями (30) только в том случае, когда выполняются

$$\alpha_3 = \beta_2 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_3 = \gamma_6 = 1, \quad \alpha_1 = \gamma_3, \quad \beta_1 = -\gamma_2, \tag{55}$$

что дает для коммутационных соотношений

$$[g,p] = \alpha(g-g^2), \quad [g,t] = \beta(g-g^2), \quad [t,p] = \gamma(1-g^2)+\alpha t-\beta p, \tag{56}$$

где $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$. Сама R–матрица имеет следующую структуру

$$R = \eta(I\otimes I + \alpha D\wedge B + \beta C\wedge B + \gamma D\wedge C), \tag{57}$$

где I единичная 9×9 матрица ($I = A\otimes A + A\otimes B + B\otimes A + B\otimes B$) а число η произвольно. При выборе реализации (51), (52) числовая R–матрица имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & -\gamma & \beta & \gamma & . & \alpha & -\beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Матрица (58) является решением уравнения Янга-Бакстера (47).

4. Приложение

Копроизведение полученное в формулах (28) не является наиболее популярным. Чаще при квантовании как алгебры $su(2)$, так и алгебр Гейзенберга и движений евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей (см., например, [8, 13, 14] и цитированные там работы) используется копроизведение вида

$$\Delta^* p = p\otimes 1 + g\otimes p, \quad \Delta^* t = t\otimes 1 + g^{-1}\otimes t, \quad \Delta^* g = g\otimes g, \tag{59}$$

или

$$\Delta^* p = p\otimes 1 + e^{\tau s}\otimes p, \quad \Delta^* t = t\otimes 1 + e^{-\tau s}\otimes t, \quad \Delta^* s = s\otimes 1 + 1\otimes s, \tag{60}$$

где τ - некоторый параметр. В работах [8, 13, 14] копроизведение отличается от (60) заменой базисных элементов. Классическим пределом копроизведения (60) можно считать

$$\delta^*(e^1) = 0, \quad \delta^*(e^2) = -e^1 \otimes e^2, \quad \delta^*(e^3) = e^1 \otimes e^3.$$

где e^1, e^2, e^3 являются классическими пределами генераторов s, t и p соответственно. Это копроизведение индуцирует на пространстве L структуру алгебры

$$[e^1, e^2] = -e^2, \quad [e^1, e^3] = e^3, \quad [e^2, e^3] = 0$$

эквивалентную алгебре Ли движений псевдоевклидовой плоскости $p(2)$. Не существует r-матрицы $r \in h(3) \otimes h(3)$ определяющей копроизведение (61). Таким образом, $h(3) - p(2)$ нельзя рассматривать как кограничную биалгебру. Однако, квантование, проведенное во втором разделе, не опирается на существование r-матриц, поэтому биалгебру $h(3) - p(2)$ можно квантовать описанным выше методом. Мы не будем приводить здесь соответствующие вычисления. Заметим только, что копроизведение (60) согласовано с коммутационными соотношениями в алгебре $\mathcal{U}(h(3))$ в том смысле, что оно является гомоморфизмом алгебр (т.е. скобка Ли не деформируется)

$$\Delta([x, y]) = [\Delta x, \Delta y] \tag{62}$$

для любых $x, y \in \mathcal{U}(h(3))$. Следовательно, в случае алгебры Гейзенберга естественно попытаться получить как выражение для твиста $\mathcal{F}$ и универсальной $\mathcal{R}$-матрицы в терминах недеформированных генераторов алгебры Гейзенберга (13), так и соответствующее копроизведение на дуальной алгебре $\mathcal{U}(p(2))$. Легко проверяется на генераторах e^i, что сингулярное (по e^1) выражение

$$\mathcal{F} = \exp\left(\tau e^1 \otimes \frac{e^3 e^2}{e^1}\right) \tag{63}$$

можно рассматривать как твист

$$\Delta^* = \mathcal{F} \Delta_0^* \mathcal{F}^{-1}$$

в $\mathcal{U}(p(2))$. Здесь

$$\Delta_0^*(e^i) = e^1 \otimes 1 + 1 \otimes e^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

а $\Delta^*(e^i)$ дается формулами (60)

$$\Delta^*(e^1) = e^1 \otimes 1 + 1 \otimes e^1, \quad \Delta^*(e^2) = e^2 \otimes 1 + e^{-\tau e^1} \otimes (e^2),$$
$$\Delta^*(e^3) = e^3 \otimes 1 + e^{\tau e^1} \otimes e^3. \tag{64}$$

Соответствующая универсальная $\mathcal{R}-$ матрица определяется выражением

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1} = \exp\left(\tau \frac{pt}{s} \otimes s\right) \exp\left(-\tau s \otimes \frac{pt}{s}\right). \tag{65}$$

Из приведенных формул видно, что ни твист, ни $\mathcal{R}$-матрица не являются внутренними гомоморфизмами в пространстве $h(3) \otimes h(3)$ и не существует классического предела этих объектов в $h(3) \otimes h(3)$.

Литература

1. V. Drinfeld, *Quantum Groups* — Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley (1986), A. M. Gleason (ed.), Vol 1. pp. 798–820, AMS, Providence, RI.
2. M. Sokolov, *Some examples of classical coboundary Lie bialgebras with coboundary duals.* — math.QA/0103115.
3. V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups.* — Cambridge University press (1994).
4. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, A. I. Mudrov, — J. Math. Phys. **40**, No.9 (1999), 4569–4586, q-alg/9806014.
5. O. V. Ogievetsky, *Hopf structures on the Borel subalgebra of sl*(2). — in: Proc. Winter School Geometry and Physics, Zidkov, Suppl. Rendiconti cir. Math. Palermo, Serie II, No. 37 (1993), 185; preprint MPI-Ph/92-99, Munich, (1992)
6. A. Opanowicz, — J.Phys.A., **31** (1998), 8387.
7. A. Ballesteros, E. Celeghini and F. J. Herranz, — J. Phys. A. **33** (2000), 3431–3444.
8. E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace, and M. Tarlini, — J. Math. Phys. **32** (1991), 1155.
9. B. A. Kupershmidt, — J. Phys. A. **26** (1993), L929.
10. A. Ballesteros, F. J. Herranz and P. Parashar, — J. Phys. A. **30** (1997), L149.
11. E. Kowalczyk, —- *Acta Phys. Pol. B.* **28** (1997), 1893.
12. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, — Алгебра и Анализ **1** No. 1 (1989) 178–206.
13. Е. Склянин, — УМН **40(2)** (1985), 214.
14. J. Sobczyk, — J. Phys. A. **29** (1996), 2887.

Damaskinsky E. V., Kulish P. P. and Sokolov M. A. Unified quantization of three-dimensional bialgebras.

The joint multiparameter quantization of several three-dimensional Lie algebras is given. Among the quantized algebras one finds the Heisenberg algebra, the algebra of motions of the (pseudo)euclidean plane and $su(2)$. Such a quantization is possible because all of the mentioned algebras are dual to the same solvable Lie algebra. The explicit form of the number R-matrix is given which allows to encode some of the commutation relations in the form of the RTT-equation.

Поступило 27 сентября 2002 г.

Санкт-Петербургский
Военный инженерный
технический университет

E-mail: evd@pdmi.ras.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulish@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский институт
машиностроения

E-mail: sokolov@pmash.spb.su