Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

**В. О. Тарасов**

# О РЕШЕНИЯХ БЕТЕВСКИХ УРАВНЕНИЙ В $XXZ$ МОДЕЛИ

Недавно в работе [1] были получены некоторые тождества для решений бетевских уравнений в шестивершинной модели. В данной заметке приводится элементарное доказательство аналогичных тождеств в случае $XXX$ или $XXZ$ модели произвольного спина. Хотя соответствующие вычисления переносятся почти без изменений на эллиптический случай, получающиеся при этом тождества имеют достаточно трансцендентный вид. Даже в случае шестивершинной модели приводимое нами доказательство тождеств для решений бетевских уравнений проще оригинального доказательства в работе [1].

Подробное изложение метода анзатца Бете можно найти в монографии [2].

Используемые в заметке обозначения не совпадают с обозначениями в работах [1] и [2], однако читатель может без труда установить необходимые соответствия.

**1.** Рассмотрим неоднородную $XXX$ модель на решетке из $N$ узлов с квазипериодическими граничными условиями. Пусть $\ell_1, \dots, \ell_N$ — спины представлений в узлах, $z_1, \dots, z_N$ — параметры неоднородности, и $e^\mu$ — параметр квазипериодичности; периодическим граничным условиям отвечает $e^\mu = 1$. Мы будем предполагать, что $2\ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ при всех $i = 1, \dots, N$, другими словами, все представления в узлах решетки нетривиальны и конечномерны.

В $k$-частичном секторе: $S_z = \ell_1 + \dots + \ell_N - k$, бетевские уравнения на быстроты $t_1, \dots, t_k$ имеют вид

$$\prod_{i=1}^{N}(t_a - z_i + \ell_i) \prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}(t_a - t_b - 1) \;=\; e^\mu \prod_{i=1}^{N}(t_a - z_i - \ell_i) \prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}(t_a - t_b + 1), \quad (1)$$

$a = 1, \dots, k$. Мы не различаем решения данной системы, которые получаются друг из друга перестановками переменных $t_1, \dots, t_k$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 02–01–00085а.

Будем говорить, что решение $t_1, \dots, t_k$ *содержит* точку $u$, если $u \in \{t_1, \dots, t_k\}$.

Решение $t_1, \dots, t_k$ системы (1) назовем *допустимым*, если $t_a \neq t_b + 1$ при всех $a, b = 1, \dots, k$. Следующая лемма описывает характеристические свойства допустимых решений.

**Лемма 1.**

а) *Пусть $z_i + \ell_i \neq z_j - \ell_j$ при всех $i, j = 1, \dots, N$. Тогда всякое допустимое решение системы (1) не содержит точек $z_1 \pm \ell_1, \dots, z_N \pm \ell_N$.*

б) *Если решение системы (1) не содержит ни одной из точек $z_1 + \ell_1, \dots, z_N + \ell_N$, то оно допустимо.*

в) *Если решение системы (1) не содержит ни одной из точек $z_1 - \ell_1, \dots, z_N - \ell_N$, то оно допустимо.*

**Доказательство.** Утверждения следуют из достаточно простого анализа системы (1). Начнем с пункта а). Пусть, например, $t_1 = z_1 + \ell_1$. Тогда из уравнения при $a = 1$ следует, что $t_1 = t_b + 1$ для некоторого $b$, поскольку по предположению $t_1 \neq z_i - \ell_i$ при всех $i = 1, \dots, N$.

Доказательства пунктов б) и в) аналогичны. Рассмотрим пункт б) и для упрощения изложения ограничимся случаем $k = 3$. Пусть $t_1, t_2, t_3$ — недопустимое решение и, например, $t_2 = t_1 + 1$. Тогда из уравнения при $a = 2$ следует, что либо $t_2 = z_i + \ell_i$ для некоторого $i$, либо $t_3 = t_2 + 1$. В последнем случае из уравнения при $a = 3$ следует, что $t_3 = z_i + \ell_i$ для некоторого $i$. •

**Замечание.** В литературе бетевские уравнения обычно записывают в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{t_a - z_i + \ell_i}{t_a - z_i - \ell_i} = e^{\mu} \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{k} \frac{t_a - t_b + 1}{t_a - t_b - 1}\,, \qquad a = 1, \dots, k\,, \tag{2}$$

причем неявно предполагается, что рассматриваются только допустимые решения и $z_i + \ell_i \neq z_j - \ell_j$ при всех $i, j = 1, \dots, N$. Из Леммы 1 следует, что при таких предположениях системы (1) и (2) эквивалентны.

Решение $t_1, \dots, t_k$ бетевских уравнений называется *внедиагональным*, если $t_a \neq t_b$ при всех $a \neq b$. В работе [3] было показано, что при общих $z_1, \ldots, z_N$ и общем $e^\mu$ число различных допустимых внедиагональных решений системы (1) совпадает с размерностью подпространства векторов с заданным $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$ в пространстве состояний $XXX$ модели. Если $e^\mu = 1$, то известно, что система (1) имеет допустимые внедиагональные решения только при $S_z \geqslant 0$, т.е. при $k \leqslant \ell_1 + \ldots + \ell_N$, причем при общих $z_1, \ldots, z_N$ их число совпадает с размерностью подпространства особых (старших) векторов с данным $S_z$.

Наибольший интерес при изучении решений системы (1) представляет случай однородной модели: $\ell_1 = \ldots = \ell_N$, $z_1 = \ldots = z_N$. Гипотетически, число допустимых внедиагональных решений в однородном случае не меняется по сравнению со случаем общих $z_1, \ldots, z_N$.

Рассмотрим многочлен $P(u) = \prod\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{r=0}^{2\ell_i - 1} (u - z_i - \ell_i + r)$ и функцию

$$F(\alpha; s_1, \ldots, s_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\infty} \frac{e^{-\alpha u} P(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u - s_a)(u - s_a - 1)} \, du \,, \tag{3}$$

где интеграл берется по положительно ориентированному замкнутому контуру, содержащему внутри все точки $s_1, \ldots, s_k$, $s_1 + 1$, $\ldots, s_k + 1$. Очевидно, что при фиксированных $s_1, \ldots, s_k$ функция $F(\alpha; s_1, \ldots, s_k)$ есть целая функция $\alpha$.

**Замечание.** Многочлен $P(u)$ есть многочлен Дринфельда представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}_2)$, соответствующего рассматриваемой $XXX$ модели произвольного спина.

**Предложение 2.** *Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — допустимое решение бетевских уравнений (1), и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$F(\mu + 2\pi i n; t_1, \ldots, t_k) = 0 \,. \tag{4}$$

**Доказательство.** Обозначим через $f(u)$ подинтегральное выражение в формуле (3). Вычисляя интеграл (3) по вычетам, мы получим, что

$$F(\mu + 2\pi i n; t_1, \ldots, t_k) = \sum_{a=1}^{k} \bigl(\mathrm{Res}\, f(t_a) + \mathrm{Res}\, f(t_a + 1)\bigr) = 0 \,,$$

так как в силу бетевских уравнений $\operatorname{Res} f(t_a) + \operatorname{Res} f(t_a+1) = 0$ для любого $a = 1, \ldots, k$.

В случае периодических граничных условий: $e^{\mu} = 1$, одно из равенств (4) принимает вид $F(0; t_1, \ldots, t_k) = 0$ и становится алгебраическим соотношением для переменных $t_1, \ldots, t_k$, $z_1, \ldots, z_N$:

$$\operatorname*{Res}_{u=\infty} \frac{P(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u-t_a)(u-t_a-1)} = 0 .$$

Например, при $k = \ell_1 + \ldots + \ell_N$, мы получаем, что

$$t_1 + \ldots + t_k = \ell_1 z_1 + \ldots + \ell_N z_N .$$

**2.** Рассмотрим неоднородную $XXZ$ модель на решетке из $N$ узлов с анизотропией $\gamma$ и квазипериодическими граничными условиями. Положим $q = e^{i\gamma}$. Пусть $\ell_1, \ldots, \ell_N$ — спины представлений в узлах, $z_1, \ldots, z_N$ — параметры неоднородности, и $q^{2\mu}$ — параметр квазипериодичности; периодическим граничным условиям отвечает $q^{2\mu} = 1$. Мы предполагаем, что $q^2 \neq 1$, $z_i \neq 0$ и $2\ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ при всех $i = 1, \ldots, N$.

В $k$-частичном секторе: $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$, бетевские уравнения на быстроты $t_1, \ldots, t_k$ имеют вид

$$\prod_{i=1}^{N} (q^{2\ell_i} t_a - z_i) \prod_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{k} (t_a - q^2 t_b) = q^{2\mu} \prod_{i=1}^{N} (t_a - q^{2\ell_i} z_i) \prod_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{k} (q^2 t_a - t_b) , \quad (5)$$

$a = 1, \ldots, k$. Решение $t_1, \ldots, t_k$ системы (5) назовем *допустимым*, если $t_a \neq 0$ и $t_a \neq q^2 t_b$ при всех $a, b = 1, \ldots, k$.

**Лемма 3.** *Пусть $q^{2\ell_i} z_i \neq q^{-2\ell_j} z_j$ при всех $i, j = 1, \ldots, N$. Тогда всякое допустимое решение системы (5) не содержит точек $q^{\pm 2\ell_1} z_1$, $\ldots, q^{\pm 2\ell_N} z_N$.*

**Лемма 4.** *Пусть $q^{2m} \neq 1$ при всех $m = 1, \ldots, k$.*

а) *Если решение системы (5) не содержит ни одной из точек $q^{2\ell_1} z_1, \ldots, q^{2\ell_N} z_N$, то оно допустимо.*

б) *Если решение системы (5) не содержит ни одной из точек $q^{-2\ell_1} z_1, \ldots, q^{-2\ell_N} z_N$, то оно допустимо.*

Утверждения доказываются аналогично Лемме 1.

Решение $t_1, \ldots, t_k$ бетевских уравнений называется *внедиагональным*, если $t_a \neq t_b$ при всех $a \neq b$. В работе [3] было показано, что при общих $z_1, \ldots, z_N$ и общем $q^{2\mu}$ число различных допустимых внедиагональных решений системы (5) совпадает с размерностью подпространства векторов с заданным $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$ в пространстве состояний $XXZ$ модели. Гипотетически, число допустимых внедиагональных решений в однородном случае: $\ell_1 = \ldots = \ell_N$, $z_1 = \ldots = z_N$, не меняется по сравнению с общим случаем. В периодическом случае: $q^{2\mu} = 1$, число допустмых внедиагональных решений гипотетически не меняется по сравнению с общим случаем, если $q$ не является корнем из единицы.

Рассмотрим многочлен $Q(u) = \prod\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{r=0}^{2\ell_i-1} (u - q^{2(\ell_i - r)} z_i)$ и функцию

$$G(\alpha; s_1, \ldots, s_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0,\infty} \frac{u^{-\alpha - S_z - 1} Q(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u - s_a)(u - q^2 s_a)} \, du \,, \tag{6}$$

где $S_z = \ell_1 + \ldots + \ell_N - k$, а интеграл берется по положительно ориентированному замкнутому контуру содержащему внутри все точки $s_1, \ldots, s_k$, $q^2 s_1, \ldots, q^2 s_k$ и оставляющему снаружи точку $0$; аргумент $u$ обладает однозначной ветвью на таком контуре. Очевидно, что при фиксированных $s_1, \ldots, s_k$ и фиксированой ветви аргумента $u$ функция $G(\alpha; s_1, \ldots, s_k)$ есть целая функция $\alpha$.

**Предложение 5.** *Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — допустимое решение бетевских уравнений* (5), *и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$G(\mu + \pi n/\gamma; t_1, \ldots, t_k) = 0 \,. \tag{7}$$

Утверждение доказывается аналогично Предложению 2.

Если $q^{2\mu} = q^{2(m - S_z)}$ для некоторого целого $m$, то одно из равенств (7) принимает вид $G(m; t_1, \ldots, t_k) = 0$ и становится алгебраическим соотношением для переменных $t_1, \ldots, t_k$, $z_1, \ldots, z_N$:

$$\Bigl( \operatorname*{Res}_{u=0} + \operatorname*{Res}_{u=\infty} \Bigr) \frac{u^{-m-1} Q(u)}{\prod\limits_{a=1}^{k} (u - t_a)(u - q^2 t_a)} = 0 \,. \tag{8}$$

Например, при $S_z = 0$, $k = \ell_1 + \ldots + \ell_N$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} t_1^2 \ldots t_k^2 &= z_1^{2\ell_1} \ldots z_N^{2\ell_N}, && \text{если} \quad m = 0, \\ [2]_q (t_1 + \ldots + t_k) &= [2\ell_1]_q z_1 + \ldots + [2\ell_N]_q z_N, && \text{если} \quad m = -1, \\ [2]_q (t_1^{-1} + \ldots + t_k^{-1}) &= [2\ell_1]_q z_1^{-1} + \ldots + [2\ell_N]_q z_N^{-1}, && \text{если} \quad m = 1. \end{aligned}$$

Здесь $[r]_q = (q^r - q^{-r})/(q - q^{-1})$.

В случае однородной $XXZ$ модели спина 1/2 (шестивершинной модели) с четным числом узлов и периодическими граничными условиями: $\ell_1 = \ldots = \ell_N = 1/2$, $z_1 = \ldots = z_N = 1$, $q^{2\mu} = 1$, соотношения (8) совпадают с тождествами (sum rules) для решений бетевских уравнений, полученными в работе [1].

## Литература

1. K. Fabricius, B. M. McCoy, *Qvaluation parameters and Bethe roots for the six vertex model at roots of unity.* — Preprint YITPSB–01–42 (2001), 1–24.
2. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*— (под ред. Л. Д. Фаддеева), М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992, 240 с.
V. E. Korepin, N. M. Bogolyubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, — Cambridge University Press, 1993, 556 п.
3. V. Tarasov, A. Varchenko, *Completeness of Bethe vectors and difference equations with regular singular points.* — Int. Math. Res. Notices No. 13 (1996), 637–669.

Tarasov V. O. On solutions of Bethe equations for the $XXZ$ model.

It is shown that solutions of the Bethe ansatz equations for the inhomogeneous arbitrary spin $XXX$ or $XXZ$ model satisfy certain identites which generalize those, recently obtained by K. Fabricius and B. M. McCoy, for solutions of the Bethe ansatz equations for the six-vertex model. Even in the last case, the given proof is simpler than the original one.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
*E-mail*: vt@pdmi.ras.ru

Поступило 7 октября 2002