Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

В. О. Тарасов

О БЕТЕВСКИХ ВЕКТОРАХ В XXZ МОДЕЛИ В КОРНЯХ ИЗ ЕДИНИЦЫ

Недавняя серия работ [1]–[4] была посвящена исследованию уравнений анзатца Бете и бетевских векторов в шестивершинной модели с константой анизотропии, соизмеримой с π, или, как принято говорить, в корнях из единицы. В этом случае спектр трансфер-матрицы, являющейся производящей функцией стандартных коммутирующих законов сохранения в модели, становится сильно вырожден. В работе [4] в рамках алгебраического анзатца Бете была предложена конструкция операторов рождения, ответственных за появление бетевских векторов с одинаковыми собственными значениями трансфер-матрицы. В данной заметке мы обобщаем эту конструкцию на случай XXZ модели произвольного спина. Даже в случае шестивершинной модели приводимые здесь доказательства основных формул оказываются технически несколько проще оригинальных доказательств в работе [4].

Подробное изложение метода алгебраического анзатца Бете можно найти в монографии [5].

Используемые в заметке обозначения не совпадают с обозначениями в работах [4] и [5], однако читатель может без труда установить необходимые соответствия.

1. Рассмотрим XXZ модель на решетке из N узлов с анизотропией γ и квазипериодическими граничными условиями. Положим $q = e^{i\gamma}$. Пусть $\ell_1, \dots, \ell_N$ — спины представлений в узлах, $z_1, \dots, z_N$ — параметры неоднородности, и κ — параметр квазипериодичности; периодическим граничным условиям отвечает $\kappa = 1$. Мы предполагаем, что $q^2 \neq 1$, $z_i \neq 0$ и $2\ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ при всех $i = 1, \dots, N$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 02–01–00085а.

Для всякого x положим $q^x = e^{i\gamma x}$ и

$$[x]_q \;=\; \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \;=\; \frac{\sin(\gamma x)}{\sin\gamma}\,.$$

XXZ модель описывается L-оператором

$$L(u) = \begin{pmatrix} uq^H - q^{-H} & u(q-q^{-1})F \\ (q-q^{-1})E & uq^{-H} - q^H \end{pmatrix},$$

где элементы E, F, H порождают алгебру $U_q(\mathfrak{sl}_2)$:

$$[H,E] = E\,, \qquad [H,F] = -F\,, \qquad [E,F] = [2H]_q\,.$$

Определим представление алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ неотрицательного целого или полуцелого спина ℓ на пространстве $V_\ell = \bigoplus\limits_{r=0}^{2\ell} \mathbb{C}v_r$ следующим образом:

$$E\,v_r \,=\, [r]_q\, v_{r-1}\,, \qquad F\,v_r \,=\, [2\ell - r]_q\, v_{r+1}\,, \qquad H\,v_r \,=\, (\ell - r)\,v_r\,. \tag{1.1}$$

Оно неприводимо, если $q^{2k} \neq 1$ при всех $k = 1, \ldots, 2\ell$. Напомним, что при таких q алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ имеет единственное с точностью до эквивалентности неприводимое представление размерности $2\ell{+}1$. В дальнейшем для нас будет важно, что формулы (1.1) аналитически зависят от q, однако их явный вид существенно использоваться не будет.

Элементы матрицы монодромии

$$z_1 \ldots z_N\, L_N(u/z_N) \ldots L_1(u/z_1) \;=\; \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$

являются многочленами по u и многочленами Лорана по $q^{1/2}$, принимающими значения в $\mathrm{End}\,(V_{\ell_1} \otimes \ldots \otimes V_{\ell_N})$. При необходимости их зависимость от q будет указываться явно, например, $A(u;q)$.

Трансфер-матрица $T(u) = A(u) + \kappa D(u)$ коммутирует с оператором $H_\Sigma = H_1 + \ldots + H_N$ и служит производящей функцией стандартных коммутирующих законов сохранения. Метод алгебраического анзатца Бете позволяет находить собственные векторы и собственные значения трансфер-матрицы, см. Предложение 1.1. Напомним основные положения метода.

В основе алгебраического анзатца Бете лежат следующие коммутационные соотношения элементов матрицы монодромии:

$$\bigl[B(u), B(v)\bigr] \;=\; 0\,, \tag{1.2}$$

$$(u-v)\,A(u)B(v) \;= \tag{1.3}$$
$$= (uq^{-1}-vq)\,B(v)A(u) \,+\, v\,(q-q^{-1})\,B(u)A(v)\,,$$

$$(u-v)\,D(u)B(v) \;= \tag{1.4}$$
$$= (uq-vq^{-1})\,B(v)D(u) \,-\, v\,(q-q^{-1})\,B(u)D(v)\,,$$

и формулы для действия операторов $A(u)$ и $D(u)$ на вектор $v_0\otimes \ldots\otimes v_0$:

$$A(u)\,v_0\otimes\ldots\otimes v_0 \;=\; \mathcal{A}(u)\,v_0\otimes\ldots\otimes v_0\,, \tag{1.5}$$
$$\mathcal{A}(u) \;=\; \prod_{i=1}^{N}(uq^{\ell_i}-z_i\,q^{-\ell_i})\,,$$

$$D(u)\,v_0\otimes\ldots\otimes v_0 \;=\; \mathcal{D}(u)\,v_0\otimes\ldots\otimes v_0\,, \tag{1.6}$$
$$\mathcal{D}(u) \;=\; \prod_{i=1}^{N}(uq^{-\ell_i}-z_i\,q^{\ell_i})\,.$$

Обозначим $|t_1,\ldots,t_k\rangle = B(t_1)\ldots B(t_k)\,v_0\otimes\ldots\otimes v_0$. Из формул (1.2)–(1.6) следует, что вектор $|t_1,\ldots,t_k\rangle$ является симметрической функцией переменных $t_1,\ldots,t_k$, а операторы H_Σ, $A(u)$ и $D(u)$ действуют на него следующим образом:

$$H_\Sigma\,|t_1,\ldots,t_k\rangle \;=\; (\ell_1+\ldots+\ell_N-k)\,|t_1,\ldots,t_k\rangle\,,$$

$$A(u)\,|t_1,\ldots,t_k\rangle \;=\; \mathcal{A}(u)\prod_{a=1}^{k}\frac{uq^{-1}-t_a q}{u-t_a}\;|t_1,\ldots,t_k\rangle \;+ \tag{1.7}$$
$$+\,(q-q^{-1})\sum_{a=1}^{k}\frac{t_a}{u-t_a}\,\mathcal{A}(t_a)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}\frac{t_a q^{-1}-t_b\,q}{t_a-t_b}\;|u,t_1,\ldots,\widehat{t_a},\ldots,t_k\rangle,$$

$$D(u)\,|t_1,\ldots,t_k\rangle \;=\; \mathcal{D}(u)\prod_{a=1}^{k}\frac{uq-t_a q^{-1}}{u-t_a}\;|t_1,\ldots,t_k\rangle \;- \tag{1.8}$$
$$-\,(q-q^{-1})\sum_{a=1}^{k}\frac{t_a}{u-t_a}\,\mathcal{D}(t_a)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}\frac{t_a q-t_b\,q^{-1}}{t_a-t_b}\;|u,t_1,\ldots,\widehat{t_a},\ldots,t_k\rangle.$$

Система бетевских уравнений на быстроты $t_1, \ldots, t_k$ имеет вид:

$$\mathcal{A}(t_a) \prod_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{k} (t_a - t_b q^2) = \kappa \mathcal{D}(t_a) \prod_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{k} (t_a q^2 - t_b), \qquad a = 1, \ldots, k. \quad (1.9)$$

Мы не различаем решения данной системы, которые получаются друг из друга перестановками переменных $t_1, \ldots, t_k$. Будем говорить, что решение $t_1, \ldots, t_k$ *содержит* точку u, если $u \in \{t_1, \ldots, t_k\}$. Решение $t_1, \ldots, t_k$ системы (1.9) называется *внедиагональным*, если $t_a \neq t_b$ при всех $a \neq b$. Вектор $|t_1, \ldots, t_k\rangle$ называется *бетевским*, если набор $t_1, \ldots, t_k$ является внедиагональным решением бетевских уравнений. Вектор $v_0 \otimes \ldots \otimes v_0$ считается бетевским вектором, отвечающим $k = 0$ и пустому набору быстрот.

Предложение 1.1. *Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — внедиагональное решение системы* (1.9). *Тогда*

$$T(u)\,|t_1, \ldots, t_k\rangle = \quad (1.10)$$

$$= \Bigl(\mathcal{A}(u) \prod_{a=1}^{k} \frac{uq^{-1} - t_a q}{u - t_a} + \kappa \mathcal{D}(u) \prod_{a=1}^{k} \frac{uq - t_a q^{-1}}{u - t_a}\Bigr)\,|t_1, \ldots, t_k\rangle.$$

Утверждение следует из формул (1.7) и (1.8).

В дальнейшем мы будем предполагать, что $q^{2\ell_i} z_i \neq q^{-2\ell_j} z_j$ при всех $i, j = 1, \ldots, N$, то есть, что многочлены $\mathcal{A}(u)$ и $\mathcal{D}(u)$ взаимно просты. Кроме того, мы будем предполагать, что $q^{2r} \neq 1$ при всех $r = 1, \ldots, \max(2\ell_1, \ldots, 2\ell_N)$, иными словами, что все представления $V_{\ell_1}, \ldots, V_{\ell_n}$ неприводимы.

Решение $t_1, \ldots, t_k$ системы (1.9) назовем *допустимым*, если $t_a \neq 0$ и $t_a \neq t_b q^2$ при всех $a, b = 1, \ldots, k$. Из достаточно простого анализа системы (1.9) вытекают следующие свойства допустимых решений.

Лемма 1.2. *Допустимое решение системы* (1.9) *не содержит точек $q^{\pm 2\ell_1} z_1, \ldots, q^{\pm 2\ell_N} z_N$.*

Лемма 1.3. *Пусть $q^{2m} \neq 1$ при всех $m = 1, \ldots, k$.*

а) *Если решение системы* (1.9) *не содержит ни одной из точек $q^{2\ell_1} z_1, \ldots, q^{2\ell_N} z_N$, то оно допустимо.*

б) *Если решение системы* (1.9) *не содержит ни одной из точек $q^{-2\ell_1} z_1, \ldots, q^{-2\ell_N} z_N$, то оно допустимо.*

Будем говорить, что точки $z_1, \ldots, z_N$ *хорошо разделены*, если $z_i q^{2r} \neq z_j q^{2s}$ при всех $r = -2\ell_i, \ldots, 2\ell_i$, $s = -2\ell_j, \ldots, 2\ell_j$, $i, j = 1, \ldots, N$.

Теорема 1.4. [6, Теоремы 4.2 и 5.1] *Пусть точки $z_1, \ldots, z_N$ хорошо разделены. Тогда при общем κ все допустимые внедиагональные решения системы* (1.9) *невырождены, число различных допустимых внедиагональных решений системы* (1.9) *совпадает с размерностью подпространства $\{v \in V_{\ell_1} \otimes \ldots \otimes V_{\ell_N} \mid H_\Sigma v = (\ell_1 + \ldots + \ell_N - k)v\}$, а соответствующие бетевские векторы образуют базис данного подпространства. Если q не является корнем из единицы, то бетевские векторы, отвечающие недопустимым внедиагональным решениям системы* (1.9), *равны нулю.*

По-видимому, в Теореме 1.4 предположение о хорошей разделенности точек $z_1, \ldots, z_N$ можно ослабить. Например, утверждение теоремы гипотетически остается справедливым при $z_1 = \ldots = z_N$.

2. Предположим, что q^2 есть корень из единицы степени M. При $k \geqslant M$ система (1.9) может, в принципе, иметь недопустимые решения вида $u, uq^2, \ldots, uq^{2M-2}, t_{M+1}, \ldots, t_k$ с произвольным u; в частности, такие решения неизолированы. Отвечающий такому решению бетевский вектор $|u, uq^2, \ldots, uq^{2M-2}, \ldots\rangle$ равен нулю, поскольку

$$B(u)B(uq^2)\ldots B(uq^{2M-2}) = 0$$

для любого u, см. [7], [8]. Кроме того, последовательность $t_{M+1}, \ldots, t_k$ является решением системы (1.9) для $k - M$ переменных.

Теорема 1.4 указывает, что при общем κ для спектрального анализа трансфер-матрицы $T(u)$, вообще говоря, достаточно рассматривать только бетевские векторы, отвечающие допустимым решениям системы (1.9). В то же время, из результатов работы [4] видно, что при специальных значениях κ, вышеупомянутые недопустимые решения системы (1.9) и отвечающие им аналоги бетевских векторов могут играть существенную роль в построении собственных векторов трансфер-матриц.

Предположим, что $\kappa = q^{2(p-\ell_1+\ldots+\ell_N)}$ для некоторого целого p. Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — внедиагональное решение системы (1.9). Основной целью данной заметки является построение векторов $\|t_1, \ldots, t_k; u_1, \ldots, u_m\rangle\!\rangle_p$, зависящих от параметров $u_1, \ldots, u_m$ и таких, что

$$H_\Sigma \, \| t_1, \ldots, t_k ; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p = $$
$$= (\ell_1 + \ldots + \ell_N - k - mM) \, \| t_1, \ldots, t_k ; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p ,$$

$$T(u) \, \| t_1, \ldots, t_k ; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p = \tag{2.1}$$
$$= q^{mM} \Bigl(\mathcal{A}(u) \prod_{a=1}^{k} \frac{uq^{-1} - t_a q}{u - t_a} + \kappa \mathcal{D}(u) \prod_{a=1}^{k} \frac{uq - t_a q^{-1}}{u - t_a} \Bigr) \times$$
$$\times \, \| t_1, \ldots, t_k ; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p ,$$

см. Предложение 3.1. Параметры $u_1, \ldots, u_m$ произвольны, однако это не противоречит конечномерности пространства состояний $V_{\ell_1} \otimes \ldots \otimes V_{\ell_N}$, поскольку собственное число $T(u)$ не зависит от $u_1, \ldots, u_m$. Предлагаемая конструкция обобщает построение из работы [4].

Векторы $\| t_1, \ldots, t_k ; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p$ с различными m отвечают одному и тому же собственному значению операторов $q^{\pm H_\Sigma} T(u)$. Соответствующие собственные числа трансфер-матрицы $T(u)$ совпадают, если $q^{mM} = 1$, и могут отличаться знаком, если $q^{mM} = -1$. Сравнение формул (1.10) и (2.1) показывает, что вектор $\| t_1, \ldots, t_k ; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p$ можно рассматривать как аналог бетевского вектора, отвечающего недопустимому решению $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_1 q^{2M-2}, \ldots, u_m, \ldots, u_m q^{2M-2}$ системы (1.9) для $k + mM$ переменных.

3. Зафиксируем целое $M > 1$, и пусть $\gamma_0 = \pi K / M$, для некоторого K взаимно простого с M. Положим $q_0 = e^{i\gamma_0}$ и $\eta = q / q_0$. Для всех величин, зависящих от q, в том случае, когда эта зависимость не указана явно, мы считаем, что $q = q_0$.

Принимая во внимание, что $B(u) B(uq_0^2) \ldots B(uq_0^{2M-2}) = 0$, введем оператор $\mathbb{B}(u; X)$, зависящий от вектора $X = (x_1, \ldots, x_M) \in \mathbb{C}^M$:

$$\mathbb{B}(u; X) = \tag{3.1}$$
$$= \lim_{q \to q_0} \bigl(q (\eta - 1)^{-1} B(u\eta^{x_1}; q) \, B(uq^2 \eta^{x_2}; q) \ldots B(uq^{2M-2} \eta^{x_M}; q) \bigr) ,$$

считая, что $\eta^x \to 1$ при $\eta \to 1$. Оператор $\mathbb{B}(u; X)$ не меняется при одновременном сдвиге параметров $x_1, \ldots, x_M$ на одно и то же число. Явное вычисление предела в формуле (3.1) дает

$$\mathbb{B}(u;X) = \sum_{r=0}^{M-1} B(u)\dots B(uq_0^{2r-2}) \times$$
$$\times \left(\partial_q B(uq_0^{2r}) + uq_0^{2r}(x_{r+1}+2r)\partial_u B(uq_0^{2r})\right) B(uq_0^{2r+2})\dots B(uq_0^{2M-2}),$$

что аналогично формуле (1.38) в работе [4]. Однако, значительно удобнее пользоваться непосредственно формулой (3.1), переходя к пределу $q \to q_0$ только в конце вычислений. В частности, из соотношения (1.2) немедленно следует, что

$$\left[\mathbb{B}(u;X), B(v)\right] = \left[\mathbb{B}(u;X), \mathbb{B}(v;Y)\right] = 0,$$

для любых u, v, X, Y и, следовательно, вектор

$$|\!|\!| t_1,\dots,t_k; u_1,\dots,u_m; X_1,\dots,X_m \rangle\!\rangle\!\rangle =$$
$$= \mathbb{B}(u_1;X_1)\dots\mathbb{B}(u_m;X_m)\,|t_1,\dots,t_k\rangle$$

является симметрической функцией $t_1,\dots,t_k$, а также пар (u_1,X_1), $\dots,(u_m,X_m)$. Очевидно, что

$$H_\Sigma\, |\!|\!| t_1,\dots,t_k; u_1,\dots,u_m; X_1,\dots,X_m \rangle\!\rangle\!\rangle =$$
$$= (\ell_1+\dots+\ell_N-k-mM)\, |\!|\!| t_1,\dots,t_k; u_1,\dots,u_m; X_1,\dots,X_m \rangle\!\rangle\!\rangle .$$

Рассмотрим многочлен $P(u) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{r=0}^{2\ell_i-1}(u - z_i q_0^{2(\ell_i-r)})$ и функции

$$Q_n(u;t_1,\dots,t_k) = \frac{u^{k-n}P(u)}{\prod_{a=1}^k (u-t_a)(u-t_a q_0^2)} .$$

$$F_n(u;t_1,\dots,t_k) = \frac{1}{M}\sum_{r=0}^{M-1} Q_n(uq_0^{2r};t_1,\dots,t_k),$$

$$G_n(u;t_1,\dots,t_k) = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M-1} r\,Q_n(uq_0^{2r};t_1,\dots,t_k),$$

для которых выполнены соотношения

$$\frac{Q_n(uq_0^2)}{Q_n(u)} = q_0^{2(\ell_1+\ldots+\ell_N-n)} \frac{\mathcal{A}(u)}{\mathcal{D}(u)} \prod_{a=1}^{k} \frac{u-t_a q_0^2}{uq_0^2-t_a},$$

$$F_n(uq_0^2) = F_n(u), \qquad G_n(uq_0^2) - G_n(u) = Q_n(u) - F_n(u).$$

В том случае, когда $t_1,\ldots,t_k$ есть допустимое внедиагональное решение системы (1.9), нетрудно проверить, что функция $F_n(u;t_1,\ldots,t_k)$ является многочленом по u.

Положим

$$\|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m\rangle\!\rangle_n = \||t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1^{(n)},\ldots,X_m^{(n)}\rangle\!\rangle\!\rangle,$$

определив векторы

$$X_i^{(n)} = X^{(n)}(u_i;t_1,\ldots,t_k) = (x_1^{(n)},\ldots,x_M^{(n)})(u_i;t_1,\ldots,t_k)$$

$i=1,\ldots,m$, следующим образом:

$$x_r^{(n)}(u;t_1,\ldots,t_k) = \tag{3.2}$$
$$= 2\bigl(1-r-G_n(uq^{2r-2};t_1,\ldots,t_k)/F_n(u;t_1,\ldots,t_k)\bigr).$$

Предложение 3.1. *Предположим, что $\kappa = q_0^{2(p-\ell_1+\ldots+\ell_N)}$ для некоторого целого p и пусть $t_1,\ldots,t_k$ — внедиагональное решение системы (1.9) при $q=q_0$. Пусть $F_p(u_i;t_1,\ldots,t_k)\neq 0$ и $u_i^M \neq t_a^M$ при всех $a=1,\ldots,k$, $i=1,\ldots,m$. Тогда*

$$T(u)\|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m\rangle\!\rangle_p =$$
$$= q_0^{mM}\Bigl(\mathcal{A}(u)\prod_{a=1}^{k}\frac{uq_0^{-1}-t_aq_0}{u-t_a} + \kappa\mathcal{D}(u)\prod_{a=1}^{k}\frac{uq_0-t_aq_0^{-1}}{u-t_a}\Bigr)\times$$
$$\times \|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m\rangle\!\rangle_p.$$

Доказательство. Используя формулы (1.7) и (1.8) при общем q и переходя к пределу при $q\to q_0$, мы получим следующие формулы для действия операторов $\mathcal{A}(u)$ и $\mathcal{D}(u)$ на вектор $\||t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle$:

$$A(u)\,|\!|\!|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle = \tag{3.3}$$

$$= q_0^{mM}\Biggl[\mathcal{A}(u)\prod_{a=1}^{k}\frac{uq_0^{-1}-t_aq_0}{u-t_a}\,|\!|\!|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle +$$

$$+ (q_0-q_0^{-1})\sum_{a=1}^{k}\frac{t_a}{u-t_a}\,\mathcal{A}(t_a)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}\frac{t_aq_0^{-1}-t_bq_0}{t_a-t_b}\;\times$$

$$\times\;|\!|\!|u,t_1,\ldots,\widehat{t_a},\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{M-1}\frac{u_iq_0^{2r}}{u-u_iq_0^{2r}}\,(x_{i,r+1}-x_{ir})\,\mathcal{A}(u_iq_0^{2r})\prod_{a=1}^{k}\frac{u_iq_0^{2r-1}-t_aq_0}{u_iq_0^{2r}-t_a}\;\times$$

$$\times\prod_{\substack{s=0\\ s\neq r}}^{M-1}B(u_iq_0^{2s})\,|\!|\!|u,t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,\widehat{u_i},\ldots,u_m;X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle\Biggr],$$

$$D(u)\,|\!|\!|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle = \tag{3.4}$$

$$= q_0^{mM}\Biggl[\mathcal{D}(u)\prod_{a=1}^{k}\frac{uq_0-t_aq_0^{-1}}{u-t_a}\,|\!|\!|t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle -$$

$$- (q_0-q_0^{-1})\sum_{a=1}^{k}\frac{t_a}{u-t_a}\,\mathcal{D}(t_a)\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{k}\frac{t_aq_0-t_bq_0^{-1}}{t_a-t_b}\;\times$$

$$\times\;|\!|\!|u,t_1,\ldots,\widehat{t_a},\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{M-1}\frac{u_iq_0^{2r}}{u-u_iq_0^{2r}}\,(x_{i,r+2}-x_{i,r+1})\,\mathcal{D}(u_iq_0^{2r})\prod_{a=1}^{k}\frac{u_iq_0^{2r+1}-t_aq_0^{-1}}{u_iq_0^{2r}-t_a}\;\times$$

$$\times\prod_{\substack{s=0\\ s\neq r}}^{M-1}B(u_iq_0^{2s})\,|\!|\!|u,t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,\widehat{u_i},\ldots,u_m;X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_m\rangle\!\rangle\!\rangle\Biggr].$$

Здесь $X_i=(x_{i1},\ldots,x_{iM})$, $x_{i0}=x_{iM}+2M$, $x_{i,M+1}=x_{i1}-2M$.

При действии трансфер-матрицы $T(u)$ на вектор $\| t_1,\ldots,t_k;u_1,\ldots,u_m;X_1,\ldots,X_m \rangle\rangle$ возникают "нежелательные слагаемые" ("*unwanted terms*") двух типов, порожденные соответственно вторыми (одинарные суммы) и третьими (двойные суммы) слагаемыми в правых частях формул (3.3) и (3.4). Нежелательные слагаемые первого типа сокращают друг друга, если $t_1,\ldots,t_k$ есть внедиагональное решение системы (1.9) при $q=q_0$. Независимо от сокращения слагаемых первого типа, нежелательные слагаемые второго типа сокращаются, если

$$(x_{i,r+1}-x_{ir})\,\mathcal{A}(u_i q_0^{2r})\prod_{a=1}^{k}\frac{u_i q_0^{2r}-t_a q_0^2}{u_i q_0^{2r}-t_a} = \qquad (3.5)$$

$$= \kappa\,(x_{i,r+2}-x_{i,r+1})\,\mathcal{D}(u_i q_0^{2r})\prod_{a=1}^{k}\frac{u_i q_0^{2r+2}-t_a}{u_i q_0^{2r}-t_a}$$

при всех $r=0,\ldots,M-1$, $i=1,\ldots,m$. При $\kappa=q^{2(p-\ell_1+\ldots+\ell_N)}$ эти уравнения выполняются, если $x_{ir}=x_r^{(p)}(u_i)$ при всех $r=1,\ldots,M$, $i=1,\ldots,m$. $\bullet$

В случае однородной XXZ модели спина $1/2$ (шестивершинной модели) с четным числом узлов и периодическими граничными условиями: $\ell_1=\ldots=\ell_N=1/2$, $z_1=\ldots=z_N=1$, $\kappa=1$, Предложение 3.1 было доказано в работе [4].

Замечание. Рассмотрим соотношения (3.5) при заданном i как уравнения на величины $x_{i1},\ldots,x_{iM}$ при заданных $u_i,t_1,\ldots,t_k$ с граничными условиями $x_{i0}=x_{iM}+2M$, $x_{i,M+1}=x_{i1}-2M$. Предположим, что $u_i^M\neq 1$ и $t_a^M\neq u_i^M$ при всех $a=1,\ldots,k$. Нетрудно проверить, что при данных предположениях система (3.5) может иметь решения только, если $\kappa^M=q_0^{2M(\ell_1+\ldots+\ell_N)}$, причем $x_{ir}\neq x_{i,r+1}$ при всех $r=0,\ldots,M$.

Обозначим

$$y_r \;=\; \frac{\mathcal{A}(u_i q_0^{2r-2})}{\kappa\,\mathcal{D}(u_i q_0^{2r-2})}\;\prod_{a=1}^{k}\frac{u_i q_0^{2r-2}-t_a q_0^2}{u_i q_0^{2r}-t_a}\;.$$

Тогда $x_{i,r+1}-x_{ir}=y_1 y_2\ldots y_r\,(x_{i1}-x_{i0})$ и

$$(x_{i1}-x_{i0})\sum_{r=0}^{M-1} y_1 y_2\ldots y_r \;=\; x_{iM}-x_{i0} \;=\; -2M\,,$$

откуда следует, что общее решение рассматриваемой системы имеет вид

$$x_{ir} = x_{i1} - 2M \sum_{s=1}^{r-1} y_1 y_2 \ldots y_s \Bigl(\sum_{s=0}^{M-1} y_1 y_2 \ldots y_s \Bigr)^{-1}, \qquad r = 2, \ldots, M,$$

с произвольным x_{i1}. Если же $\sum_{r=0}^{M-1} y_1 y_2 \ldots y_r = 0$, то система (3.5) неразрешима.

Таким образом, при естественных предположениях из разрешимости системы (3.5) следует, что $\kappa = q_0^{2(p-\ell_1+\ldots+\ell_N)}$ для некоторого целого p. При этом решение системы (3.5) имеет вид

$$x_{ir} = c_i + x_r^{(p)}(u_i; t_1, \ldots, t_k), \qquad r = 1, \ldots, M, \quad i = 1, \ldots, m,$$

см. (3.2), с произвольными $c_1, \ldots, c_m$, а вектор $|\!|\!| t_1, \ldots, t_k; u_1, \ldots, u_m; X_1, \ldots, X_m \rangle\!\rangle\!\rangle$ не зависит от $c_1, \ldots, c_m$ и равен $\| t_1, \ldots, t_k; u_1, \ldots, u_m \rangle\!\rangle_p$.

Замечание. В работе [1] было показано, что в пространстве состояний шестивершинной модели в корнях из единицы действует алгебра петель $\widetilde{\mathfrak{sl}_2}$, причем ее действие коммутирует с трансфер-матрицей шестивершинной модели. Наличие большой алгебры симметрии обуславливает вырождение спектра трансфер-матрицы. Как было отмечено в работе [4], симметрийное вырождение спектра трансфер-матрицы шестивершинной модели, по-видимому, соответствует тому вырождению спектра, которое возникает в этом случае в силу Предложения 3.1. Поскольку Предложение 3.1 остается справедливым и для неоднородной *XXZ* модели произвольного спина с надлежащими квазипериодическими граничными условиями, можно предположить, что и в общем случае модель обладает большой алгеброй симметрии. Более того, может оказаться, что действие указанной алгебры в пространстве состояний модели существует для любых квазипериодических граничных условий, однако коммутирует с трансфер-матрицей только при специальных значениях параметра квазипериодичности.

Литература

1. T. Deguchi, K. Fabricius and B. M. McCoy, *The sl_2 loop algebra symmetry of the six vertex model at roots of unity.* — J. Stat. Phys. **102**, No. 3–4 (2001), 701–736.

2. K. Fabricius and B. M. McCoy, *Bethe's equation is incomplete for the XXZ model at roots of unity.* — J. Stat. Phys. **103**, No. 5–6 (2001), 647–678.
3. K. Fabricius and B. M. McCoy, *Completing Bethe's equation at roots of unity.* — J. Stat. Phys. **104**, o. 3–4 (2001), 573–587.
4. K. Fabricius and B. M. McCoy, *Evaluation parameters and Bethe roots for the six vertex model at roots of unity.* — Preprint YITPSB–01–42 (2001), 1–24.
5. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* — (под ред. Л. Д. Фаддеева), М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992, 240 с.
   V. E. Korepin, N. M. Bogolyubov and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* — Cambridge University Press, 1993, 556 p.
6. V. Tarasov and A. Varchenko, *Completeness of Bethe vectors and difference equations with regular singular points.* — Int. Math. Res. Notices No. 13 (1996), 637–669.
7. V. Tarasov, *Cyclic monodromy matrices for the R-matric of the XXZ-model and the chiral Potts model with fixed-spin boundary conditions.* — Int. J. Mod. Phys. A (Suppl. 1B) **7** (1992), 963–975.
8. V. Tarasov, *Cyclic monodromy matrices for $sl(n)$ trigonometric R-matrices.* — Comm. Math. Phys. **158**, No. 3 (1993), 459–483.

Tarasov V. O. On Bethe vectors for the XXZ model at roots of unity.

We give a construction of creation operators responsible for appearance of Bethe vectors with the same eigenvalues of the transfer-matrix for the inhomogeneous arbitrary spin XXZ model at roots of unity with particular quasiperiodic boundary conditions. This construction generalizes the similar one, recently obtained by K.Fabricius and B.M.McCoy, for the homogeneous six-vertex model with periodic boundary conditions. Even in the last case, the given proof for the main formulae are simpler than the original one.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vt@pdmi.ras.ru

Поступило 7 октября 2002