Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

А. В. Цыганов

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЕМЕЙСТВЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ НА СФЕРЕ

1. Введение

С геометрической точки зрения интегрируемая система состоит из лагранжевого расслоения (распределения) и функции Гамильтона, которая определяет динамику относительно сопряженной переменной времени. Слои лагранжева расслоения являются совместной поверхностью уровня функций называемых интегралами движения.

На симплектическом многообразии любая связность сохраняющая лагранжевы расслоения (распределения) является симплектической связностью, т.е. сохраняют симплектическую форму [7, 6]. Таким образом данная связность порождает симплектические или канонические преобразования, которые переводят данную интегрируемую систему в эквивалентную ей систему.

Из теории геометрического квантования мы знаем, что на пуассоновых многообразиях существуют связности (параллельные переносы), которые могут сохранять данное лагранжево расслоение, но не сохраняют пуассонову структуру [6]. Такие связности порождают отображения одной интегрируемой системы в другую интегрируемую систему не эквивалентную исходной.

Таким образом, на пуассоновом многообразии мы имеем возможность для построения новых интегрируемых систем используя известные интегрируемые системы и сохраняющие лагранжевы расслоения связности. В данной работе мы рассмотрим несколько примеров практической реализации этой возможности.

Заметим, что в методе геометрического квантования и методе орбит решается задача о построении связности сохраняющей и лагранжево расслоение и пуассонову структуру [6, 8]. Поэтому, нам не известно общих методов построения связностей не сохраняющих пуассонову структуру. В данной работе мы рассмотрим один из возможных методов построения соответствующих неканонических преобразований, используя произведение известных симплектических преобразований и преобразований, индуцированных диффеоморфизмом базы симплектического расслоения.

2. Основные определения

Интегрируемая система $(H, \mathcal{F}_l)$ на симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ состоит из функции Гамильтона H и лагранжевого расслоения

$$\mathcal{F}_l \ : \mathcal{M} \to B^n$$

для которого размерность базы n равна половине размерности фазового пространства $\dim\mathcal{M} = 2n$. Слои лагранжева расслоения $F(\alpha)$ такие, что $\Omega(X, Y) = 0$, для любых X, Y касательных к F, являются образом точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ при обращении отображения моментов $I^{-1}(\alpha) = \cap I_i^{-1}(\alpha_i)$ [4].

Регулярное пуассоново многообразие $\mathcal{M}$ расслаивается на симплектические листы $\mathcal{O}_a$ постоянной размерности $2n$, которые образуют симплектическое слоение

$$\mathcal{F}_s : \ \mathcal{M} \to A^k$$

коранга k. В этом случае можно определить k функций Казимира C_i на многообразии $\mathcal{M}$, которые независимы и постоянны $C_i = a_i$ на всех симплектических листах.

Итак, интегрируемая система на пуассоновом многообразии состоит из функции Гамильтона H и композиции симплектического и лагранжевого расслоений $\mathcal{F}_l \circ \mathcal{F}_s$. Тем самым, мы имеем возможность применить к любой интегрируемой системе композицию симплектических преобразований $\rho_a : \ \mathcal{O}_a \to \mathcal{O}_a$ и параллельных переносов $T_{ab} : \mathcal{O}_a \to \mathcal{O}_b$, индуцированных диффеоморфизмами $a_i \to b_i$ в базе симплектического слоения $\mathcal{F}_s$.

Пусть на симплектическом листе $\mathcal{O}_a$ пуассонова многообразия $\mathcal{M}$ определена интегрируемая система $(H, \mathcal{F}_l)$. Предположим, что отображение ρ_a является симплектическим отображением на данном листе $\mathcal{O}_a$. Так как симплектические преобразования сохраняют так же и структуру лагранжевого расслоения, то интегрируемая система $(\widetilde{H}, \widetilde{\mathcal{F}_l}) = \rho_a(H, \mathcal{F}_l)$ будет эквивалентна исходной интегрируемой системе на многообразии $\mathcal{O}_a$.

Если после параллельного переноса $T_{ab} : \mathcal{O}_a \to \mathcal{O}_b$ слои расслоения $\widehat{\mathcal{F}_l} = T_{ab}\rho_a \widetilde{\mathcal{F}}$ останутся лагранжевыми многообразиями зависящими от n параметров

$$\widehat{F}_l = T_{ab}\widetilde{F} = T_{ab}\rho_a F_l, \tag{2.1}$$

то система с гамильтонианом $\widehat{H} = T_{ab}\rho_a\, H$ будет интегрируемой системой и на симплектическом листе $\mathcal{O}_b$.

Более того, построенная система $(\widehat{H}, \widehat{\mathcal{F}}_l)$ не эквивалентна исходной интегрируемой системе $(H, \mathcal{F}_l)$, если параллельные переносы T_{ab} не коммутирует с симплектическим преобразованием ρ_a, т.е. не существует канонического преобразования ρ_b такого, что

$$T_{ab}\,\rho_a = \rho_b\, T_{ab}. \tag{2.2}$$

В этом случае преобразование $T_{ab}\,\rho_a$ сохраняет данное лагранжево расслоение и не сохраняет пуассонову структуру. То есть мы построили неканоническое преобразования связывающее две различные интегрируемые системы.

Параллельные переносы T_{ab} полностью определяются пуассоновой структурой фазового пространства $\mathcal{M}$ и, поэтому, условия (2.1) и (2.2) являются уравнениями для определения симплектических преобразований ρ_a и лагранжевых расслоений $\mathcal{F}_l$, т.е. набора интегралов, которые можно использовать для построения новых интегрируемых систем.

Мы не знаем общего метода решения уравнений (2.1) и (2.2). Далее мы рассмотрим несколько примеров решения данных уравнений для конкретного пуассонова многообразия.

3. Интегрируемые системы на алгебра $e(3)$

В качестве пуассонова многообразие $\mathcal{M}$ возьмем кокасательное пространство $e^*(3)$, двойственное к алгебре Ли $e(3)$, которое является фазовым пространством в динамике твердого тела [1].

Алгебра $e(3) = so(3) \oplus \mathbb{R}^3$ является полупрямой суммой алгебры вращений $so(3)$ и абелевой алгебры трансляций $\mathbb{R}^3$. Поэтому, естественно выбрать в качестве координат фазового пространства $\mathcal{M} = e^*(3)$ два трехмерных вектора $J \in so(3) \simeq \mathbb{R}^3$ и $x \in \mathbb{R}^3$, со скобкой Ли–Пуассона

$$\{J_i\,, J_j\,\} = \varepsilon_{ijk}\, J_k\,, \qquad \{J_i\,, x_j\,\} = \varepsilon_{ijk}\, x_k\,, \qquad \{x_i\,, x_j\,\} = 0\,, \tag{3.3}$$

где ε_{ijk} – стандартный полностью кососимметричный тензор. Эта скобка обладает двумя функциями Казимира

$$\mathbf{C}_1 = (x,x) = |x|^2, \qquad \mathbf{C}_2 = (J,x)\,. \tag{3.4}$$

где (y,z) обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Так как орбиты

$$\mathcal{O}_{a\ell}: \qquad \{(x,J):\ \mathbf{C}_1 = a^2,\ \mathbf{C}_2 = \ell\} \tag{3.5}$$

коприсоединенного представления группы движений трехмерного евклидова пространства $E(3)$ в $e(3)^*$ являются четырехмерными симплектическими многообразиями, то нам достаточно одного дополнительного интеграла для интегрируемости по Лиувиллю соответствующих гамильтоновых уравнений движения

$$J_t = \{J\,,H\,\}, \qquad x_t = \{x\,,H\,\} \tag{3.6}$$

В векторной форме эти уравнения движения имеют вид

$$\dot{J} = J \times \frac{\partial H}{\partial J} + x \times \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{x} = x \times \frac{\partial H}{\partial J}. \tag{3.7}$$

и обычно называются уравнениями Эйлера–Пуассона (3.7), которые описывают движение твердого тела в однородном поле тяжести. Уравнения Кирхгофа на алгебре $e(3)$ по форме не отличаются от уравнений (3.7) и описывают движение твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, которая обладает однозначным потенциалом скоростей и покоится на бесконечности.

Применяя преобразования сохраняющие пуассонову структуру (3.3) к любой из интегрируемых систем на алгебре $e^*(3)$, мы получим семейство эквивалентных интегрируемых систем, которые отличаются только формой функции Гамильтона.

Пример. В качестве пуассонова многообразие $\mathcal{M}$ возьмем кокасательное пространство $e^*(3)$, двойственное к алгебре Ли $e(3)$ (3.3). Если $f(J_3)$ и $g(J_3)$ – произвольные функции удовлетворяющие соотношению $f^2+g^2=\mathrm{const}$, то отображение

$$\rho: \quad x \to \widetilde{x} = Ux, \qquad J \to \widetilde{J} = \frac{UJ}{\sqrt{f^2+g^2}}\,, \tag{3.8}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} f & g & 0 \\ -g & f & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{f^2+g^2} \end{pmatrix},$$

сохраняет пуассонову структуру алгебры $e(3)$ (3.3) и отображает функцию Гамильтона для волчка Ковалевской

$$H = {J_1}^2 + {J_2}^2 + 2{J_3}^2 + x_1 \tag{3.9}$$

в новую функцию

$$\widetilde{H} = {J_1}^2 + {J_2}^2 + 2{J_3}^2 + f(J_3)\,x_1 + g(J_3)\,x_2\,, \tag{3.10}$$

одна из возможных форм которой выглядит следующим образом

$$\widetilde{H} = {J_1}^2 + {J_2}^2 + 2{J_3}^2 + \sinh(J_3)\,x_1 + \cosh(J_3)\,x_2. \tag{3.11}$$

Функции Гамильтона (3.9), (3.10) и (3.11) отличаются только формой и отвечающие им интегрируемые системы эквивалентны, с точностью до преобразования (3.8), сохраняющего пуассонову структуру.

Перейдем теперь к построению неканонических преобразований. Среди симплектических листов общего положения $\mathcal{O}_{a\ell}$ (3.5) выделим два подмножества симплектических листов

$$\mathcal{A}_\ell = \{\mathcal{O}_{a\ell}, \quad a = 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{B}_a = \{\mathcal{O}_{a\ell}, \quad \ell = 0\} \tag{3.12}$$

Напомним, что для уравнений Эйлера–Пуассона функция Казимира $\mathbf{C}_1 = a^2$ (3.4) имеет чисто геометрическое происхождение – это квадрат радиуса сферы Пуассона, а функция Казимира $\mathbf{C}_2 = \ell$ (3.4) представляет собой проекцию кинетического момента на неподвижную вертикальную ось и называется интегралом площадей. Для уравнения Кирхгофа функции $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ называются интегралами импульсивной силы и импульсивного момента соответственно.

Интегрируемые системы на листах $\mathcal{A}_\ell$ описывают динамику точки на сфере Пуассона нулевого радиуса и не имеют физического смысла и для уравнений Эйлера–Пуассона и для уравнений Кирхгофа. С другой стороны, интегрируемые системы на втором семействе орбит $\mathcal{B}_a$ описывают динамику точки на сфере Пуассона радиуса a и представляют физический интерес.

Рассмотрим симплектические преобразования сферы Пуассона нулевого радиуса специального вида. Подобные преобразования рассматривались в работе [10] как неканонические деформации скобки Пуассона, связанные с введением монополей.

Предложение 1. *Отображение*

$$\rho_f: \qquad x \to x, \qquad J \to J + x\,f(x)\,, \tag{3.13}$$

где функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$f(x) + \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0\,, \tag{3.14}$$

является симплектическим, то есть сохраняет симплектическую структуру каждого из листов $\mathcal{A}_\ell$ (3.12), при условии $\mathbf{C}_1 = a^2 = 0$.

Доказательство. Если подставить новые координаты $\widetilde{J}_k = J_k + x_k f(x)$ в определение скобок Пуассона (3.3), то легко проверить, что при выполнении условия (3.14) эти уравнения остаются справедливы на всех симплектических листах $\mathcal{A}_\ell$. Так как при условии $\mathbf{C}_1 = 0$ вторая функция Казимира инвариантна

$$\widetilde{\mathbf{C}}_2 = (x, \widetilde{J}) = (x, J) + |x|^2 f(x) = \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1 f(x) = \mathbf{C}_2\,,$$

то отображение (3.13) переводит каждый лист $\mathcal{A}_\ell$ сам в себя и, поэтому, является симплектическим преобразованием каждого из листов $\mathcal{A}_\ell$. Доказательство завершено.

Уравнение (3.14) имеет общее решение

$$f(x) = \sum_{i,j,k} \frac{\varphi_{ijk}(x_i\, x_j^{-1})}{x_k} \tag{3.15}$$

где суммирование ведется по всем i, j, k и $\varphi_{ijk}(z)$ – произвольные функции. Кроме этого, известно одно дополнительное решение или особый интеграл уравнения (3.14)

$$f(x) = (x_1 x_2 x_3)^{-1/3}\,, \tag{3.16}$$

который не может быть получен из общего решения [13].

Применяя преобразование ρ_f (3.13) к интегралам движения I_j известных нам интегрируемых систем, мы получим функции $\widetilde{I}_j$, которые коммутируют только на симплектических листах $\mathcal{A}_\ell$

$$\{\widetilde{I}_j, \widetilde{I}_k\}_{\mathcal{A}_\ell} = \{\rho_f\, I_j, \rho_f\, I_k\}_{\mathcal{A}_\ell} = \rho_f\,\{I_j, I_k\}_{\mathcal{A}_\ell} = 0.$$

Используя параллельные переносы $T_{a\ell} : \mathcal{A}_\ell \to \mathcal{B}_a$ слоев, порождаемые диффеоморфизмом $(0, \ell) \to (a, 0)$ базы симплектического расслоения, мы можем построить новый набор интегралов движения в инволюции $\widehat{I}_j$ на симплектических листах $\mathcal{B}_a$ если

$$\{\widehat{I}_j, \widehat{I}_k\}_{\mathcal{B}_a} = \{T_{ab}\, \rho_f\; I_j, T_{ab}\, \rho_f\; I_k\}_{\mathcal{B}_a} = 0. \tag{3.17}$$

Условие (3.17) является уравнением для симплектических отображений ρ_f (3.13) и исходных интегралов движения I_j, определяющих лагранжево подмногообразие в $\mathcal{A}_l$. Далее мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров интегрируемых систем, построенных подобным образом.

4. Примеры

В следующих ниже примерах для практического построения интегралов движения на симплектических листах B_ℓ далее мы будем использовать отображения

$$P = \frac{1}{2}(\rho_f + \rho_f^{-1}) \quad \text{и} \quad P^* = \frac{1}{2}(\rho_f^* + \rho_f^{*\,-1}), \qquad (4.18)$$

где

$$\rho_f^{-1}: \; J \to J - x\, f(x) \quad \text{и} \quad \rho_f^*: \; J \to J + ix\, f(x)\,,$$

которые тривиально действуют в подпространстве линейных функций

$$PJ_k = P^*J_k = J_k$$

и в подпространстве квадратичных функций

$$\frac{1}{2}(P + P^*)J_k^2 = J_k^2, \qquad \frac{1}{2}PP^*J_k^2 = J_k^2\,.$$

Эти отображения мы будем использовать для построения линейных, квадратичных и кубических по координатам J интегралов движения по эвристическому правилу

$$\widehat{I}_1 = P\, I_1\,, \qquad \widehat{I}_2 = P^*\, I_2\,. \qquad (4.19)$$

Здесь $\{I_1, I_2\}$ – интегралы движения исходной интегрируемой системы.

В качестве исходной интегрируемой системы возьмем шаровый волчок, для которого функция Гамильтона

$$H = J_1^2 + J_2 + J_3^2$$

после преобразования ρ_f (3.13) имеет вид

$$\widetilde{H} = \rho_f H = J_1^2 + J_2 + J_3^2 + 2\ell f(x) + a^2 f^2(x). \qquad (4.20)$$

В силу предложения 1, если $a = 0$ и $f(x)$ удовлетворяет уравнению (3.14), то соответствующая гамильтонова система интегрируема на симплектических листах $\mathcal{A}_l$.

Далее определим эту функцию Гамильтона $\widetilde{H}$ при $\ell = 0$

$$\widehat{H} = P\, H = J_1^2 + J_2 + J_3^2 + |x|^2 f^2(x) \qquad (4.21)$$

на семействе симплектических листов B_a, т.е. при $x^2 = a^2$ и $(x, J) = 0$.

Замечание. Два трехмерных вектора (y,J) со скобкой Ли–Пуассона

$$\{J_i\,,J_j\,\}=\varepsilon_{ijk}\,J_k\,,\quad \{J_i\,,x_j\,\}=\varepsilon_{ijk}\,x_k\,,\quad \{x_i\,,x_j\,\}=\varkappa\varepsilon_{ijk}\,x_k\,,\tag{4.22}$$

являются координатами в алгебре Ли $so(4)$. Построенный в работе [14] внешний изоморфизм орбит алгебр $so(4)$ и $e(3)$, определяемый уравнением

$$\frac{y}{|y|}=\frac{x}{|x|},\qquad \text{при}\qquad (x,J)=(y,J)=0\,,\tag{4.23}$$

сохраняет форму функции Гамильтона H (4.21), так как гамильтониан для соответствующей интегрируемой системы на алгебре $so(4)$ имеет вид

$$\widehat{H}_\varkappa=J_1^2+J_2^2+J_3^2+|y|^2f^2(y)\,.\tag{4.24}$$

Все полученные далее результаты будут справедливы для обоих интегрируемых систем (4.21) и (4.24) на алгебре $e(3)$ и $so(4)$, соответственно.

4.1. Квадратичные интегралы.

Начнем с рассмотрения общего решения $f(x)$ (3.15) уравнения (3.14).

Предложение 2. *Динамическая система с функцией Гамильтона $\widehat{H}$ (4.21) является интегрируемой при нулевом значении интеграла площадей $\ell=0$, если*

$$f(x)=\frac{1}{x_i}\,\varphi\left(\frac{x_i}{x_j}\right)\qquad \text{и}\quad \widehat{H}=J_1^2+J_2+J_3^2+\frac{a^2}{x_i^2}\,\varphi^2\left(\frac{x_i}{x_j}\right)\,.\tag{4.25}$$

Дополнительный интеграл движения имеет вид

$$\widehat{I}_2=J_k^2+\frac{x_i^2+x_j^2}{x_i^2}\varphi^2\left(\frac{x_i}{x_j}\right)\tag{4.26}$$

где k – дополнение к i,j в множестве $\{1,2,3\}$ и φ – произвольная функция.

Доказательство состоит в прямом вычислении скобок Пуассона $\{\widehat{H},\widehat{I}_2\}=0$. Дополнительный интеграл $\widehat{I}_2$ построен по правилу (4.19) из квадратичного интеграла для шарового волчка $I_2=J_k^2-a^2f^2(x)\simeq J_k^2$ на исходном симплектическом листе $\mathcal{A}_\ell$.

Рассмотрим теперь интегралы движения для обобщенного волчка Лагранжа

$$H = J_1^2 + J_2 + J_3^2 + g(x_3)\,, \qquad I_2 = J_3^2\,,$$

где $g(x_3)$ – произвольная функция.

Предложение 3. *Динамическая система с функцией Гамильтона*

$$\widehat{H} = P\,H = J_1^2 + J_2 + J_3^2 + g(x_3) + \frac{a^2}{x_1^2}\varphi^2\Big(\frac{x_1}{x_2}\Big), \tag{4.27}$$

где $\varphi(x_1/x_2)$ – произвольная функция, является интегрируемой при нулевом значении интеграла площадей $\ell = 0$ и дополнительный интеграл движения имеет вид

$$\widehat{I}_2 = J_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}\varphi^2\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{4.28}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении скобок $\{\widehat{H}, \widehat{I}_2\} = 0$.

Данные интегрируемые системы обладают квадратичными по переменным J интегралами движения и, тем самым, эти системы являются системами типа Штеккеля для которых 2×2 представление Лакса может быть построено в рамках общей схемы [12].

В качестве примера рассмотрим систему Рософатиуса, который в 1877 году установил интегрируемость данной системы при помощи разделения переменных [11]. Соответствующая функция Гамильтона

$$\widehat{H} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \frac{a^2c_1^2}{x_1^2} + \frac{a^2c_2^2}{x_2^2} + \frac{a^2c_3^2}{x_3^2}, \quad a_i, c_i \in \mathbb{R}, \tag{4.29}$$

может быть получена из функции Гамильтона для системы Неймана [9] с помощью композиции $\rho_{f_1}\,\rho_{f_2}\,\rho_{f_3}$ симплектических преобразований ρ_{f_i} (3.13), отвечающих тривиальным функциям $\varphi_i = c_i$, т.е. при $f_i = c_i/x_i$.

В канонических переменных $(x,p) \in \mathbb{R}^3$, таких что $J = x \wedge p$, соответствующая матрица Лакса имеет стандартный вид [12]

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -\partial_t\, b/2 & b \\ -\partial_{tt}\, b/2 & \partial_t\, b/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4|x|^2}\begin{pmatrix} 2(x,p)\,b & 0 \\ |x|^2u + 2(x,p)\,\partial_t\, b + (p,p)\,b & -2(x,p)\,b \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Здесь определяющий матрицу Лакса элемент

$$b = \frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - a_3} \tag{4.31}$$

задает переход к сфероконическим переменным разделения λ_i по правилу $b(\lambda) = 0$, а

$$\partial_t = \frac{1}{4|x|^2}\left\{|J|^2, \cdot\right\}, \quad u = 1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{c_i^2}{x_i^2(\lambda - a_i)}.$$

Напомним [12], что производная ∂_t отвечает движению по геодезическим, а слагаемое u полностью определяется элементом b (4.31). В явном виде матрица Лакса имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{x_i p_i}{\lambda - a_i} & \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} \\ -\frac{1}{4}\frac{p_i^2}{\lambda - a_i} & \frac{1}{2}\frac{x_i p_i}{\lambda - a_i} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+\sum_{i=1}^{3} \frac{c_i^2}{x_i^2(\lambda - a_i)} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Для интегрируемых систем (4.25) и (4.27) аналогичные представления Лакса вида (4.38) так же могут быть построены в рамках общей схемы [12].

4.2. Вырожденные системы. Среди данного семейства интегрируемых систем мы выделим две вырожденные системы или суперинтегрируемые системы. Первая система с гамильтонианом

$$\begin{gathered} \widehat{H} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + a^2 \frac{c_1 x_2 x_3 + c_2(x_2^2 + x_3^2)}{(x_2^2 - x_3^2)^2} \\ \text{при} \quad f = \frac{\sqrt{c_1 x_2 x_3 + c_2(x_2^2 + x_3^2)}}{x_3^2 - x_2^2} \end{gathered} \tag{4.33}$$

обладает дополнительными интегралами движения вида

$$\begin{aligned} \widehat{K}_1 &= J_1^2 + \frac{x_2 x_3\Big(c_1(x_2^2 + x_3^2) + 4c_2 x_2 x_3\Big)}{(x_2^2 - x_3^2)^2}\,, \\ \widehat{K}_2 &= J_2 J_3 + \frac{x_1^2\Big(c_1(x_2^2 + x_3^2) + 4c_2 x_2 x_3\Big)}{4(x_2^2 - x_3^2)^2}\,. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Вторая вырожденная система является частным случаем системы Рософатиуса (4.29)

$$\widehat{H} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \frac{a^2 c_1^2}{x_1^2} + \frac{a^2 c_2^2}{x_2^2} + \frac{a^2 c_3^2}{x_3^2} \qquad (4.35)$$

Квадратичные по J интегралы движения имеют вид

$$\widehat{K}_k = J_k^2 + c_j^2 \frac{x_i^2}{x_j^2} + c_i^2 \frac{x_j^2}{x_i^2},$$

где k – дополнение к i, j в множестве $\{1, 2, 3\}$.

В работе Мозера [9] построено представление Лакса и для системы Рософатиуса и для более общей интегрируемой системы с потенциалом упругого взаимодействия

$$H = \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k^2}{x_k^2}$$

на $n-1$-мерной сфере S^{n-1}. В канонических переменных $\{x, p\}_{i=1}^n$ матрица Лакса параметризуется следующим образом. Пусть $\mathcal{J} = p \wedge x$ кососимметрическая матрица $\mathcal{J}_{ij} = -\mathcal{J}_{ji}$ компонент углового момента J_{ij}

$$\mathcal{J}_{ij} = J_{ij} = p_i x_j - x_i p_j, \qquad (4.36)$$

а матрица $\mathcal{V} = x \otimes c/x + c/x \otimes x$ является симметрической матрицей $\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ji}$ с компонентами

$$\mathcal{V}_{ij} = \frac{c_j x_i}{x_j} + \frac{c_i x_j}{x_i}, \qquad \mathcal{V}_{ii} = 2c_i, \qquad (4.37)$$

тогда матрица Лакса имеет вид [9]

$$L = \mathcal{J} + \mathcal{V}. \qquad (4.38)$$

Соответствующие интегралы движения $I_k = \operatorname{trace} L^k$ являются квадратичными интегралами по импульсам p.

Однако, для данной системы достаточно просто построить другую матрицу Лакса, которая порождает интегралы движения старших степеней. Действительно, пусть $\widehat{\mathcal{J}}$ – симметрическая матрица $\widehat{\mathcal{J}}_{ij} = \widehat{\mathcal{J}}_{ji}$ с матричными элементами (4.36), а $\widehat{\mathcal{V}}$ – кососимметрическая матрица $\widehat{\mathcal{V}}_{ij} = -\widehat{\mathcal{V}}_{ji}$ с матричными элементами (4.37), тогда матрица Лакса

$$\widehat{L} = \widehat{\mathcal{J}} + \widehat{\mathcal{V}}, \qquad (4.39)$$

порождает интегралы движения $\widehat{I}_k = \operatorname{trace} \widehat{L}^k$, которые являются полиномами k-той степени по импульсам p. Вторая матрица Лакса A в уравнении $\dot{L} = [L, A]$ диагональна

$$A = 2|x|^2 \mathrm{diag}\left(\frac{c_1}{x_1^2}, \frac{c_2}{x_2^2}, \dots, \frac{c_n}{x_n^2}\right).$$

Для интегрируемой системы с потенциалом упругого взаимодействия на $n-1$-мерной сфере S^{n-1} данное представление Лакса является новым.

4.3. Интегралы старших степеней. Рассмотрим теперь особый интеграл (3.16) уравнения (3.14).

Предложение 4. *Динамическая система с функцией Гамильтона* $\widehat{H}$ (4.21) *является интегрируемой при нулевом значении интеграла площадей* $\ell = 0$, *если*

$$f(x) = b\,(x_1 x_2 x_3)^{-1/3}, \qquad \widehat{H} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \frac{a^2 b^2}{(x_1 x_2 x_3)^{2/3}}, \qquad b \in \mathbb{C}.$$

Дополнительный интеграл движения имеет вид

$$\widehat{K}_b = J_1 J_2 J_3 + \frac{b^2}{(x_1 x_2 x_3)^{2/3}} \Big(x_2 x_3 J_1 + x_1 x_3 J_2 + x_1 x_2 J_3 \Big). \tag{4.40}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении скобок Пуассона $\{\widetilde{H}, \widetilde{I}_2\} = 0$. Дополнительный интеграл $\widehat{K}_b$ построен по правилу (4.19) из кубического по переменным J интеграла для шарового волчка $I_2 = J_1 J_2 J_3$.

Соответствующее 3×3 представление Лакса построено в [13]. Для данной системы соответствующая матрица Лакса

$$L = \widehat{\mathcal{J}} + \widehat{\mathcal{V}}$$

совпадает по форме с матрицей Лакса (4.39) для системы Росохатиуса. Здесь $\widehat{\mathcal{J}}$ – та же симметрическая матрица $\widehat{\mathcal{J}}_{ij} = \widehat{\mathcal{J}}_{ji}$ с матричными элементами (4.3.6), а $\widehat{\mathcal{V}}$ – кососимметрическая матрица $\widehat{\mathcal{V}}_{ij} = -\widehat{\mathcal{V}}_{ji}$ с новыми матричными элементами

$$\mathcal{V}_{ij} = b\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{x_k^{2/3}}{x_i^{1/3} x_j^{1/3}}.$$

Соответствующие вторые матрицы Лакса A в уравнении $\dot{L} = [L, A]$ различны. В отличии от системы Росохатиуса мы не можем обобщить это представление Лакса на случай произвольной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$.

Применим теперь к гамильтониану шарового волчка композицию $\rho_{f_b}\,\rho_{f_c}$ симплектических преобразований ρ_{f_i} (3.13), где функции

$$f_b = b\,(x_1x_2x_3)^{-1/3}\,, \qquad f_c = \frac{c\sqrt{x_2^2+x_3^2}}{x_3^2-x_2^2}$$

являются особым интегралов и общим интегралом уравнения (3.14), отвечающим вырожденному движению по замкнутым траекториям (4.33) при $c_1 = 0, c_2 = c^2$.

Предложение 5. *Динамическая система с функцией Гамильтона*

$$\widehat{H} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \frac{a^2b^2}{(x_1x_2x_3)^{2/3}} + \frac{a^2c^2(x_2^2+x_3^2)}{(x_2^2-x_3^2)^2} \tag{4.41}$$

является интегрируемой при нулевом значении интеграла площадей $\ell = 0$. Второй интеграл движения шестой степени по моментам J имеет вид

$$\widehat{I}_2 = \widehat{K}_b^2 + \widehat{K}_1\widehat{K}_2^2 + \widehat{K}_d,$$

где $\widehat{K}_{1,2}$ и $\widehat{K}_b$ даются формулами (4.34) *и* (4.40) *при $c_1 = 0, c_2 = c^2$, а дополнительное слагаемое $\widehat{K}_d$ равно*

$$\begin{aligned}\widehat{K}_d = -J_1^2J_2^2J_3^2 + \frac{(2f_bf_cx_1x_2x_3)^2}{(x_2^2+x_3^2)}\Bigg[& f_c^2\left(x_1^2 - \frac{2x_2^2x_3^2}{x_2^2+x_3^2}\right) \\ & + \frac{f_b^2(x_1^2-x_3^2)(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2} \\ + \frac{2(x_2^2+x_3^2)J_2J_3 - x_2x_3J_1^2 - x_1J_1(x_2J_3+x_3J_2)}{2x_2x_3} & \\ & - \frac{2x_2x_3J_2J_3}{x_1^2}\Bigg].\end{aligned} \tag{4.42}$$

Интегрируемость данной системы была доказана в работе [5].

Замечание. Интегрируемые системы с функциями Гамильтона (4.25), (4.41) и (4.27) не входят в известные коллекции интегрируемых случаев на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$ при $(x, J) = 0$ (см. [3, 15] и содержащиеся там ссылки).

5. Заключение

С геометрической точки зрения интегрируемая система на пуассоновом многообразии является лагранжевым расслоением на листах симплектического слоения. Преобразования, состоящие из канонических преобразования симплектических слоев и их параллельных переносов, могут отображать данное лагранжево расслоение в другое лагранжево расслоение. Тем самым, подобные неканонические преобразования могут связывать различные интегрируемые системы.

В данной работе неканонические преобразования алгебры Ли $e(3)$ используются для построения новых интегрируемых систем на двумерной сфере. Соответствующие дополнительные интегралы движения являются полиномами второй, третьей и шестой степени по моментам. Для некоторых из систем уравнения движения записаны в виде уравнений Лакса.

Литература

1. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики.* — 3-е изд., Наука (1989).
2. В. В. Арнольд, А. Б. Гивенталь, *Симплектическая геометрия.* — Итоги науки и техн., ВИНИТИ, Совр.пробл. матем.: Фунд. направления, том 4 (1985).
3. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела.* — РХД (2001).
4. А. М. Виноградов, Б. А. Купершмидт, *Структура гамильтоновой механики.* — УМН **32** (1977), 175–236.
5. B. Gaffet, *Spinning gas clouds – without vorticity.* — J. Phys. A **33** (2000), 3929–3946.
6. I. M. Gelfand, V. Retakh, M. Shubin, *Fedosov manofolds.* — Adv. Math. **136** (1998), 104.
7. H. Hess, *Connections on symplectic manifolds and geometric quantization.* — In: Differential Geometric Methods in Math. Physics. Proc. Conf. Aix-en-Province and Salamanca, 1979, Lect. Notes in Math., **836** (1980), 153–166.
8. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений.* — 2-е изд. Наука (1978).
9. J. Moser, *Integrable hamiltonian systems and spectral theory.* — Lezioni Fermiane, Piza (1981).
10. С. П. Новиков, *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.* — УМН **37** (1982), 3–49.
11. E. Rosochatius, *Über die Bewegung eines Punktes.* — Inaugural Dissertation, Univ. Göttingen, Berlin (1877).
12. A. V. Tsiganov, *Duality between integrable Stackel systems.* — J. Phys. A. **32** (1999), 7965–7982.

13. А. В. Цыганов, *Об одной интегрируемой системе, связанной с шаровым волчком и цепочкой Тоды.* — ТМФ **124** (2000), 310–322.
14. A. V. Tsiganov, *On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat.* — J. Phys. A. **35** (2002), L309–318.
15. H. M. Yehia, *Motion of a particle on a sphere and integrable motions of a rigid body.* — J. Phys. A. **33** (2000), 5945–5949.

Tsiganov A. V. A family of integrable systems on a sphere.

We discuss some construction of non-canonical transformations connecting different integrable systems on the Poisson manifold. All the considered maps consist of canonical transformations of symplectic leaves and parallel translations induced by diffeomorphisms in the base of symplectic foliation.

С.-Петербургский
государственный Университет
E-mail: tsiganov@ mph.phys.spbu.ru

Поступило 8 октября 2002 г.