Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 292, 2002 г.

А. Горбульский

ПРИМЕР ИНТЕРПОЛЯЦИИ СТАНДАРТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ С БОЛЬШОЙ СКЕЙЛИНГОВОЙ ЭНТРОПИЕЙ

Введение

Заметка посвящена построению примеров нестандартных диадических последовательностей. Результат состоит в том, что основной инвариант, введенный в [4], не налагает сильных ограничений на скейлинговую энтропию — см. определение ниже.

Определения

Ниже приведены определения из работ [1–5].

Определение 1. Пусть $\Xi = \{\xi_n\}_n$ — эргодическая r_n-адическая последовательность измеримых разбиений. Сопоставим ей класс всех последовательностей натуральных чисел, монотонно стремящихся к бесконечности, удовлетворяющих условию

$$\eta(\Xi) = \{\{n_k\}_1^\infty | \{\xi_{n_k}\}_{k=1}^\infty \text{— стандартна}\}.$$

Множество $\eta(\Xi)$ назовем основным инвариантом последовательности Ξ. Множество η содержит вместе с каждой последовательностью любую ее подпоследовательность.

Определение 2. Допустимой полуметрикой (в частном случае — метрикой) на пространстве Лебега (X, μ) называется полуметрика (соотв. метрика) ρ, определенная на подмножестве полной меры и обладающая следующими свойствами:

а) ρ измерима как функция двух переменных на $(X \times X, \mu \times \mu)$; в частности, шары с центром в почти каждой точке являются измеримыми множествами, а разбиение ω на классы точек с попарно нулевым расстоянием (в случае полуметрики) является измеримым разбиением;

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 02-01-00093.

б) подмножество полной меры в пространстве X, снабженное метрикой ρ (в случае полуметрики — фактор-пространство X/ω с фактор-метрикой), есть компакт.

Пусть на пространстве (X,μ) задана допустимая полуметрика ρ и последовательность разбиений $\Xi = \{\xi_n\}_n$. Обозначим через $K_\rho(\mu,\nu)$ метрику Канторовича–Рубинштейна на пространстве мер.

По полуметрике ρ построим новые полуметрики $\rho_1(x,y) = K_\rho(\mu_x,\mu_y)$ (здесь μ_x — условная мера на элементе разбиения ξ_1, содержащем x), $\rho_2(x,y) = K_{\rho_1}(\mu_x,\mu_y)$ (μ_x — условная мера на элементе разбиения ξ_2, содержащем x), и так далее: $\rho_n(x,y) = K_{\rho_{n-1}}(\mu_x,\mu_y)$. (Эти же полуметрики можно перенести на фактор-пространства.)

Зафиксируем функцию двух переменных $C(\varepsilon,n)$, где $\varepsilon > 0$, а n — натуральное число.

Определение 3. Скейлинговой энтропией последовательности разбиений $\Xi = \{\xi_n\}_n$ со скейлингом $C = C(\varepsilon,n)$ относительно полуметрики ρ называется предел

$$h_C(\Xi;\rho) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{H_\varepsilon(X,\mu,\rho_n)}{c(\varepsilon,n)}.$$

Здесь $H_\varepsilon(X,\mu,\rho) = \inf\{H(\nu) : K_\rho(\nu,\mu) < \varepsilon\}$. Инфимум берется по дискретным мерам ν.

Заметим, что в определении скейлинговой энтропии относительно полуметрики верхний предел по ε можно заменить на обычный, так как выражение под знаком предела монотонно по ε.

Определение 4. Скейлинговой энтропией последовательности разбиений Ξ называется число

$$h_c(\Xi) = \sup_\rho h(\Xi;\rho).$$

Супремум берется по допустимым полуметрикам ρ.

Будем говорить, что последовательность Ξ является интерполирующей для Z, если Z — подпоследовательность последовательности Ξ. Из теоремы о лакунарном изоморфизме следует, что любая последовательность Ξ является интерполирующей для стандартной последовательности $\{\xi_{r_n}\}_n$ при некотором выборе последовательности $\{r_n\}_n$. Пусть задана стандартная r_n-адическая последовательность. Какие последовательности будут интерполирующими для нее? На первый взгляд кажется, что если в качестве исходной последовательности взять 4-адическую последовательность, то свойство являться интерполирующей последовательностью будет очень ограничительным. В частности, может показаться, что энтропийный рост, или скейлинг, подчинен жестким ограничениям. Следующая теорема показывает, что ситуация несколько иная.

Теорема 1. *Для любой последовательности $c_n = o(2^n)$ стандартная 4-адическая последовательность допускает интерполяцию до диадической с положительной скейлинговой энтропией со скейлингом $S = S(\varepsilon, n) = c_n$.*

Замечание. Первый пример нестандартной диадической последовательности, интерполирующей стандартную 4-адическую, дан в статье [5].

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим бернуллиевскую 4-адическую последовательность разбиений $\Xi' = \{\xi_n^{'}\}_n$. Пусть $\xi_n^{'} = \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} \eta_k$, где η_k — независимые разбиения. Построим диадическую последовательность Ξ, интерполирующую Ξ': $\xi_{2n} = \xi_n^{'}$, $\xi_n^{'} \prec \xi_{2n-1} \prec \xi_{n-1}^{'}$. Разбиения ξ_{2n-1} удобно задавать с помощью отображений $F_n : X/\xi_n^{'} \to Q$, где Q — множество разбиений четырехточечного множества на пары точек (Q состоит из трех точек). Наборы таких отображений параметризуют все возможные последовательности разбиений, полученные интерполяцией стандартной 4-адической последовательности, а именно, $F_n([x])$ — это способ объединения в пары элементов разбиения ξ_{2n-2}, лежащих в одном элементе разбиения ξ_{2n}. При построении интерполяции (соответствующих наборов F_i) мы всегда будем рассматривать итерированные метрики только относительно диадической последовательности. Заметим, что $2n$-я итерированная метрика зависит только от выбора первых n отображений F_i. Зафиксируем последовательность $\varepsilon_n = (1 - \frac{1}{n^2})\varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Будем использовать обозначение d_A для полуметрики, порожденной разбиением на два множества, — множество A и его дополнение.

Для построения интерполяции проверим следующие два утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\gamma_N = \bigvee_{k=1}^{N} \eta_k$. *Для любого* $1 > \delta > 0$ *и любого натурального* n *существует число* N, γ_N*-измеримое множество* A *и отображения* $F_1, \dots, F_n$, *такие, что выполнены следующие условия.*

Пространство (X/γ_N) *как метрическое пространство состоит из точек одинаковой массы, находящихся на расстоянии* $(d_A)_{2n} > \varepsilon_1$ *друг от друга, и энтропия этого пространства допускает следующую оценку снизу:* $H_{\varepsilon_1}(X_N/\xi_{2n}, (d_A)_{2n}) > \delta * 2^{2n}$.

Лемма 2. *Для каждого множества* A, *построенного в лемме 1, и любого множества* $A_1 \subset X/\xi_{2N}$ *существуют такие* $F_{n+1}, \dots, F_N$, *что* $(d_A)_{2N}(x, y) > \varepsilon_2$ *для всех пар точек* $x \in A_1$, $y \notin A$.

Доказательство леммы 1. Отображения $F_1, \dots, F_n$ возьмем постоянными (это соответствует бернуллиевской диадической последовательности). Утверждение леммы следует из того, что ε-энтропия пространства $\{0;1\}^{2^n}$ может быть оценена снизу как $(1 - C\sqrt{\varepsilon}) * 2^n$ ([8]), и того факта, что все диадические последовательности финитно изоморфны.

Множество A, измеримое относительно γ_{2N}, определяется упорядоченным набором из 2^{2N} чисел, принимающих значения 0 и 1. Подмножества, отвечающие элементам разбиения ξ_{2n}, будут точками в пространстве X/ξ_{2n}. Зафиксируем ε_1-разделенное множество Γ — подмножество множества $\{0;1\}^{2^n}/D_n$, такое, что попарные расстояния между его точками больше ε_1. Теперь выберем по одному представителю из каждой D_n-орбиты и запишем их подряд. Мы получим некоторый набор нулей и единиц. В предположении, что мощность выбранного множества Γ имела вид 4^m, искомое множество будет соответствовать этому набору.

Доказательство леммы 2. Зафиксируем множество $A_1 \subset Y = X/\xi_{2N}$. Определим отображения $F_{n+1}, \dots, F_N$ так, чтобы каждое из них разделяло A_1 и cA_1. Для этого достаточно ограничиться отображениями, принимающими два значения. Заметим, что $N > 2^n$. Фиксируем две точки $x \in A_1$ и $y \notin A_1$. Пусть $d = (d_A)_{2n}$. Множество X/ξ_{2n} состоит из точек, лежащих на расстоянии не меньше ε_1 друг от друга. Для итерированной метрики верно равенство $(d_A)_{2N}(x, y) = (d)_{2N-2n}$. Каждый элемент разбиения ξ_{2N}

состоит из четырех элементов разбиения ξ_{2N-2}, причем никакой автоморфизм двоичного дерева не совмещает больше двух пар элементов, отвечающих точкам x и y. Такое же рассуждение применимо и для полуметрик $d_{2N-2}, \dots, d_2$. Значит, расстояние между точками x и y допускает оценку

$$d_{2N-2n}(x,y) > \varepsilon_1 * \Big(\sum_{i=1}^{2N-2n} \frac{1}{2^i}\Big) > \varepsilon_2,$$

что и завершает доказательство леммы.

Заметим, что энтропия итерированной метрики зависит только от предыдущей итерации и последовательности разбиений. Другими словами, для $l > 2N$ выполнено следующее соотношение:

$$H_\varepsilon(X,\mu,\rho_l)(d) = H_\varepsilon(X/\xi_{2N},\mu,\rho_{l-2N})(d_{2N}).$$

Кроме того,

$$H_\varepsilon(X,\mu,c\rho_l)(d) = H_{\frac{\varepsilon}{c}}(X,\mu,\rho_l)(d).$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по количеству построенных отображений F_i. Как база, так и переход сводятся к применению лемм 1 и 2 с параметрами $\delta = \alpha_n$ и полуметрикой $(d_A)_N$, нормированной так, чтобы диаметр пространства был равен единице. Получившаяся в результате интерполяция и будет искомой, так как энтропия пространства с итерированной метрикой $(d_A)_{n_i}$ будет удовлетворять требуемой оценке снизу.

Литература

1. А. М. Вершик, *Убывающие последовательности измеримых разбиений.* — ДАН СССР **193**, вып. 4 (1970), 748–751.
2. А. М. Вершик, *Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей.* — Функц. анал. и прил. **5**, вып. 3 (1971), 16–18.
3. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах, энтропия, локальные и разрешимые группы.* — УМН **334**, вып. 4 (2000), 59–128.
4. А. М. Вершик, *Четыре определения шкалы автоморфизма. Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей.* — Функц. анал. и прил. **7**, вып. 3 (1973), 1–17.
5. А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Алгебра и анализ **6**, вып. 4 (1994), 1–68.
6. А. М. Степин, *Об энтропийных инвариантах убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Функц. анал. и прил. **5**, вып. 2 (1971), 80–84.

7. А. Горбульский, *Об одном свойстве энтропии убывающей последовательности измеримых разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **256** (1999), 19–24.
8. А. Горбульский, *Взаимосвязь разных определений энтропии убывающих последовательностей разбиений; скейлинг.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **283** (2001), 50–62.

Gorbulsky A. An example of interpolation of the standard sequence of measurable partitions with large scaling entropy.

Decreasing sequences of partitions have two different invariants — the scaling entropy and the main invariant. In this note we construct a number of examples of nonstandard sequences with large scaling entropy and a standard 4-adic subsequence.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 декабря 2002 г.