Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 292, 2002 г.

П. В. Ягодовский

БИКОСЕТНЫЕ ГРУППЫ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

Настоящая работа является естественным развитием работы [2], в которой доказана эквивалентность категории дискретных инволютивных многозначных групп и категории комбинаторных алгебр (C-алгебр специального вида). Здесь рассмотрен случай однопорождённых многозначных групп с эрмитовыми образующими и фиксированными бикосет-структурами (определения см. ниже). Однопорождённым группам с сильными эрмитовыми образующими эквивалентность из работы [2] сопоставляет C-алгебры P-полиномиальных схем, отвечающих дистанционно-транзитивным графам (см. [1]). В работе [2] многозначные группы рассматриваются с точностью до отношения эквивалентности, в котором две многозначные группы принадлежат одному классу эквивалентности, если одна из них есть диагональ другой (см. определение 2). Таким образом, имеет место соответствие: *класс эквивалентности однопорождённых многозначных групп с сильными эрмитовыми образующими и фиксированными бикосет-структурами* $\to$ *дистанционно-транзитивный граф*.

Данная работа состоит из трех параграфов.

В §1 построен функтор, являющийся продолжением указанного выше соответствия, который однопорожденной многозначной группе с (не обязательно сильным) эрмитовым образующим и фиксированной бикосет-структурой сопоставляет симметрический граф. Этот функтор косетным группам ставит в соответствие граф Кэли.

В §2 введена конструкция универсального симметрического графа, основанная на конструкции флаг-комплекса графа.

В §3 показано, что множество бикосетных многозначных однопорожденных групп с эрмитовыми образующими является объединением множества категорий, запараметризованных парами (Γ, G). Здесь Γ – универсальный симметрический граф, $G \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ – группа автоморфизмов графа Γ, действующая транзитивно на его вершинах и ребрах. При этом функтор из §1 переводит в Г универсальный отталкивающий объект соответствующей графу Г категории многозначных однопорожденных бикосетных групп с эрмитовыми образующими.

Основные определения и результаты теории многозначных групп см., например, в [2]. Часть результатов настоящей работы анонсирована в заметке [5].

В заключение хочу поблагодарить профессора В. М. Бухштабера за постановку задачи и активную поддержку в ее решении, а также профессоров А. М. Вершика и Н. П. Долбилина, доцента Н. Г. Мощевитина и цнц. И. Н. Пономаренко за полезные обсуждения результатов настоящей работы.

Необходимые определения теории многозначных групп

Определение 0.1. *Множество A называется* n-значной группой *или, короче,* n-группой *(где $n \in \mathbb{N}$), если зафиксировано* умножение

$$\mu\colon A \times A \to (A)^n$$

со значениями в n-ой симметрической степени $(A)^n$ множества A, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Ассоциативность*: для любых элементов x, y, z группы A справедливо равенство*

$$(\mu)^n(\mu(x,y),z) = (\mu)^n(x,\mu(y,z)).$$

Здесь через $(\mu)^n(\mu(x,y),z)$ обозначен элемент

$$(\mu(t_1,z),\dots,\mu(t_n,z)) \in ((A)^n)^n \subset (A)^{n^2}, \qquad \text{где } \ \mu(x,y) = (t_1,\dots,t_n).$$

Аналогичное обозначение использовано в правой части равенства. Условие состоит в совпадении полученных элементов множества $(A)^{n^2}$.

2. Условие двусторонней единицы*: существует элемент $e \in A$, называемый* единицей*, такой, что для всех $x \in A$ имеет место равенство $\mu(e,x) = \mu(x,e)=(x,\dots,x)$.*

3. Условие двустороннего обратного*: для любого $x \in A$ существует (хотя бы один) элемент $x^* \in A$, называемый* обратным*, такой, что множества $\mu(x,x^*)$ и $\mu(x^*,x)$ содержат в себе единицу e.*

В частности, обычные группы согласно этому определению являются 1-группами; n-значные группы с $n > 1$ называются *многозначными группами*. Пусть $C^z_{x,y}$ равно числу вхождений элемента z в $\mu(x, y)$; константы такого вида называются *кратностями* группы A.

Определение 0.2. 1. *n-Группа называется* коммутативной, *если для любых $x, y \in A$ имеет место равенство $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. n-Группа называется* инволютивной, *если для каждого элемента группы существует только один обратный, а отображение $*$ (называемое* инволюцией*), сопоставляющее элементу x его обратный x^*, является антиавтоморфизмом, причем $(x^*)^* = x$. Элемент x инволютивной группы называется* эрмитовым, *если $x^* = x$.*

2. Мощностью *элемента a n-значной инволютивной группы A называется число $m(a) = n/C^e_{a,a^*}$.*

3. *n-Значная группа A называется* диагональю *m-значной группы B, если существует такая биекция между множествами их элементов, что кратности группы B равны соответствующим им при этой биекции кратностям группы A, умноженным на (m/n).*

Определение 0.3 (см. [2]). *Алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ с выделенным базисом $\{a_i\}$ ($i = 0, \dots, d$ или $i \in \mathbb{Z}_+$), где a_0 – единичный элемент, произведение в которой записывается в виде $a_i \times a_j = \sum_{k=0}^{d} p^k_{ij} a_k$, называется C-*алгеброй, *если*

(1) *стуктурные константы p^k_{ij} вещественны;*
(2) *существует подстановка $i \to i'$ ($i = 0, 1, \dots, d$) второго порядка, такая, что линейное отображение, переводящее a_i в $a_{i'}$, является антиавтоморфизмом алгебры;*
(3) *$p^0_{ij} = \delta_{ij'} k_i$, где $k_i > 0$ для всех i, j;*
(4) *отображение $a_i \to k_i$ ($i = 0, 1, \dots, d$) является линейным представлением алгебры $\mathcal{A}$.*

Определение 0.4. *C-Алгебра называется* комбинаторной, *если структурные константы p^k_{ij} относительно выделенного базиса являются неотрицательными рациональными числами, причем знаменатели представлений констант p^k_{ij} в виде несократимых дробей ограничены в совокупности.*

Понятие комбинаторной алгебры впервые введено в работе [2].

Определение 0.5. *Алгебра $\mathcal{K}(A)$ над $\mathbb{R}$ с выделенным базисом, элементы которого отождествляются с элементами n-группы A, и структурными константами $c^z_{x,y}=(m(a)/n)C^z_{x,y}$ (где $C^z_{x,y}$ – кратности группы A) называется* комбинаторной алгеброй $\mathcal{A}$ группы *A.*

В работе [2] фактически показано, что комбинаторная алгебра группы A является комбинаторной алгеброй в смысле определения 4.

Определение 0.6. 1. *n-Значная группа A называется* косетной группой группы G по ее группе автоморфизмов *H (G и H – группы в обычном смысле) и обозначается через $G \mathbin{/} H$, если порядок группы H равен n и существует фиксированное вложение комбинаторной алгебры $\mathcal{K}(A)$ в групповую алгебру группы G, при котором каждый элемент выделенного базиса алгебры $\mathcal{K}(A)$ переходит в сумму элементов группы G, рассматриваемых как элементы ее групповой алгебры и представляющих собою орбиту действия H на G.*

2. *n-Значная группа A называется* бикосетной группой группы G по ее подгруппе *H (G – группа в обычном смысле) и обозначается через $H \setminus G \mathbin{/} H$, если порядок группы H равен n и существует фиксированное вложение комбинаторной алгебры $\mathcal{K}(A)$ в групповую алгебру группы G, при котором каждый элемент выделенного базиса алгебры $\mathcal{K}(A)$ переходит в умноженную на $(1/n)$ сумму элементов группы G, рассматриваемых как элементы ее групповой алгебры и представляющих собою двойной смежный класс группы G по подгруппе H.*

Предложение 0.7. *Косетность влечет за собой бикосетность.*

Действительно, пусть $A = G \mathbin{/} H$ – косетная группа. Обозначим через G' полупрямое произведение групп G и H, построенное по действию H на G. Тогда, как легко проверить, $A = H \setminus G' \mathbin{/} H$.

Дискретная инволютивная многозначная группа A называется *однопорожденной многозначной группой с образующим a*, если любое подмножество S элементов группы A, включающее единицу и удовлетворяющее условию $(a' \in S) \Rightarrow (\mu(a,a') \in (S)^n)$ (μ – умножение в A), содержит все элементы n-группы A. Образующий a называется *сильным*, если элементы группы можно так занумеровать целыми неотрицательными числами, что a_0 – единица группы, $a = a_1$ и мультимножество $\mu(a_1, a_k)$ состоит из элементов с номерами не большими $k+1$.

Определение 0.8. *Элемент a_1 алгебры $\mathcal{A}$ с выделенным базисом $\{a_i\}$, где $i = 0, \ldots, N$ или $i \in \mathbb{Z}_+$, называется* сильным образующим, *если результат умножения a_1 на a_i лежит в линейной оболочке элементов a_j, где $0 \leq j \leq \min\{i+1, N\}$ (в случае, если $\mathcal{A}$ – алгебра размерности $(N+1)$) или $0 \leq j \leq i+1$ (в случае, если $\mathcal{A}$ – счетномерная алгебра).*

Отметим, что элемент инволютивной многозначной группы является ее сильным образующим тогда и только тогда, когда он является сильным образующим ее комбинаторной алгебры.

Лемма 0.9. *Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство с выделенным базисом $\{a_i\}$, где $i \in \mathbb{Z}_+$ или $i = 0, \ldots, N$. Тогда для любого набора чисел γ_i^j, где $\gamma_0^i = \delta^{i,1}$ и*

(1) $i \in \mathbb{N}$, $j = 0, \ldots, i+1$, $\gamma_i^{i+1} \neq 0$ (в случае счетной размерности $\mathcal{L}$)

или

(2) $i = 1, \ldots, N$ и $j = 0, \ldots, \min\{N, i+1\}$, $\gamma_k^{k+1} \neq 0$, $k = 1, \ldots, N-1$ (в случае $\dim \mathcal{L} = N+1$),

существует единственная структура ассоциативной алгебры на $\mathcal{L}$, такая, что $a_1 a_i = \sum \gamma_i^j a_j$, где сумма берется по $j = 0, \ldots, i+1$ (для пространства $\mathcal{L}$ счетной размерности) или по $j = 0, \ldots, \min\{N, i+1\}$ (в случае $\dim \mathcal{L} = N+1$). Эта алгебра изоморфна, либо алгебрам полиномов $\mathbb{R}[t]$ либо алгебрам усеченных полиномов $\mathbb{R}[t]/\langle t^N = \ldots \rangle$, причем изоморфизм таков, что a_0 переходит в 1, а a_1 – в t.

Доказательство этой леммы является чисто техническим.

1. Симметрический граф однопорожденной бикосетной группы

Определение 1.10. *Граф (орграф) Γ называется* вершинно-симметрическим, *если группа $\mathrm{Aut}\Gamma$ действует транзитивно на множестве его вершин. Граф (орграф) называется* реберно-симметрическим, *если группа $\mathrm{Aut}\Gamma$ действует транзитивно на множестве его ребер. Граф (орграф) называется* симметрическим, *если он одновременно является вершинно-симметрическим и реберно-симметрическим.*

Пусть $A = H \setminus G \,/\, H$ – бикосетная однопорожденная группа с эрмитовым образующим a, и пусть элементу a отвечает двойной смежный класс HtH. Определим граф $\Gamma = \Gamma(A)$, который будем называть *симметрическим графом бикосетной группы* A. Множество его вершин $\mathcal{V}(\Gamma)$ есть множество левых смежных классов $H \setminus G$ группы G по подгруппе H (вершину, отвечающую смежному классу Hg, будем обозначать через (Hg)), а множество его ребер $\mathcal{E}(\Gamma)$ – множество пар вершин вида $((Hg),(Hthg))$, где $h \in H$. Поскольку элемент a эрмитов, то существует элемент $h' \in H$, такой, что $th' = t^{-1}$, и, следовательно, если $((Hg),(Hthg)) \in \mathcal{E}(\Gamma)$, то пара $((Hthg),(Hg))$ тоже принадлежит множеству ребер, т.е. Γ является графом, а не орграфом. Очевидно, что этот граф является симметрическим и связным.

Конструкция симметрического графа однопорожденной бикосетной группы оказывается связанной с конструкцией графа Кэли (см. [4]).

Графом Кэли группы G, порожденным подмножеством B ее элементов, называется граф, множество вершин которого есть множество элементов группы G, а две вершины, отвечающие элементам g_1 и g_2, соединены ребром тогда и только тогда, когда $g_1 g_2^{-1} \in B$. В случае, когда имеет место импликация

$$(g \in B) \Longrightarrow (g^{-1} \in B),$$

эта конструкция действительно определяет граф, а не орграф.

Предложение 0.7 утверждает, что каждая косетная группа $A{=}G \mathbin{/} H$ обладает бикосет-структурой $H \setminus G' \mathbin{/} H$, где G' – полупрямое произведение групп G и H, построенное по действию группы H на G. Пусть группа A является однопорожденной группой с образующим a, и пусть B – множество элементов орбиты действия H на G, отвечающей образующему a. Нетрудно проверить, что тогда *симметрический граф бикосетной группы $H \setminus G' \mathbin{/} H$ является графом Кэли группы G', порожденным множеством B.*

В случае, когда образующий a бикосетной группы A является сильным, элемент группы a_k переводит произвольную вершину v графа Γ в множество вершин графа Γ, находящихся на расстоянии k от v относительно стандартной метрики ([4]) на вершинах графа.

2. Универсальные симметрические графы

Вначале напомним стандартное понятие гомоморфизма графа.

Определение 2.11 (см. [4]). *Граф Γ' называется* гомоморфным образом графа Γ*, если задана сюрвекция $f\colon \mathcal{V}(\Gamma) \to \mathcal{V}(\Gamma')$, причем*

(1) *любая пара смежных вершин графа Γ' переходит в пару смежных вершин графа Γ;*

(2) *любая пара несмежных вершин переходит либо в пару несмежных вершин, либо в одну вершину.*

Отображение f называется гомоморфизмом *из графа Γ в граф Γ'.*

Отметим, что как топологическое пространство регулярный граф Γ является накрытием всех своих регулярных гомоморфных образов, имеющих общую с ним степень регулярности. (Граф называется *регулярным*, если из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер, которое называется *степенью регулярности графа*, см. [4].)

Пусть Γ – симметрический связный граф с конечным числом вершин. Представим его как симплициальный комплекс $\tau^1(\Gamma)$, в котором вершины являются симплексами нулевой размерности, а ребра – симплексами размерности 1. *Флаг-комплексом* $\tau(\Gamma)$, ассоциированным с графом Γ, называется наибольший симплициальный комплекс, для которого $\tau^1(\Gamma)$ является одномерным остовом. Рассмотрим универсальное накрытие $\tau^U(\Gamma)$ над комплексом $\tau(\Gamma)$. Оно обладает естественной структурой симплициального комплекса, индуцированной гомеоморфизмом накрытия, причем одномерный остов является графом. Обозначим этот граф через Γ^U (т.е. $\tau(\Gamma^U) = \tau^U(\Gamma)$). Из конструкции вытекает, что 1) граф Γ^U является симметрическим, связным и имеющим степень регулярности, равную степени регулярности графа Γ; 2) графы единичных сфер графов Γ^U и Γ изоморфны (*графом единичных сфер* данного симметрического графа Γ называется граф, изоморфный подграфу графа Γ, состоящему из вершин, соединенных с данной фиксированной вершиной графа Γ, и ребер графа Γ, соединяющих эти вершины; в литературе граф единичных сфер часто называют *графом окружений*); 3) ограничение гомеоморфизма накрытия $\tau^U(\Gamma) \to \tau(\Gamma)$ на Γ^U и Γ является гомоморфизмом графов. И, кроме того, как нетрудно убедиться, для любой группы автоморфизмов G графа Γ (относительно которой он является симметрическим) существует группа автоморфизмов G^U графа Γ^U (относительно которой он является симметрическим) и эпиморфизм $\phi\colon G^U \to G$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G^U \times \mathcal{V}(\Gamma^U) & \xrightarrow{\nu^U} & \mathcal{V}(\Gamma^U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi\times f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ G \times \mathcal{V}(\Gamma) & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{V}(\Gamma) \end{array}$$

коммутативна. Здесь через ν^U и ν обозначены, соответственно, действия групп G^U и G на множествах вершин графов Γ^U и Γ. Граф Γ^U называется *универсальным симметрическим графом, накрывающим* Γ, а группа G^U – *группой автоморфизмов универсального графа, накрывающей группу автоморфизмов группы* G. В случае, если граф Γ^U оказывается изоморфным графу Γ, последний будем называть *универсальным*.

Предложение 2.12. 1. *Одномерные остовы правильных многогранников являются универсальными графами. В частности, для всех n полный граф K_n является универсальным.*

2. *Универсальный симметрический граф с несвязным графом единичных сфер имеет бесконечный диаметр.*

Первый пункт этого предложения очевиден. Доказательство второго пункта выходит за рамки настоящей работы.

Гипотеза 2.13. *Универсальный симметрический граф с графом единичных сфер диаметра большего двух имеет бесконечный диаметр.*

3. Категории однопорожденных бикосетных групп с эрмитовыми образующими

3.1. Бикосетные алгебры.

Этот раздел посвящен конструкции, позволяющей построить по парам групп (G, H) (где $H \subset G$) специальные C-алгебры, которые являются обобщением комбинаторных алгебр бикосетных групп $H \diagdown G \diagup H$ на случай групп H бесконечного порядка.

Пусть G – группа, H – ее подгруппа, такая, что любой двойной смежный класс $Hg_iH \in H \diagdown G \diagup H$ является объединением конечного числа левых смежных классов $Hg_ih_l^{(i)} \in H \diagdown G$. Обозначим число этих смежных классов через k_i. Пусть $\mathcal{K}(G, H)$ – линейное пространство функций на множестве двойных смежных классов $H \diagdown G \diagup H$. Будем обозначать через (HgH) характеристическую функцию класса HgH. Опишем произведение $(Hg_iH)\times(Hg_jH)$. Для этого рассмотрим мультимножество левых смежных классов $\{Hg_ih_l^{(i)}g_jh_m^{(j)}\}$, где $l=1,\ldots,k_j$ и $m=1,\ldots,k_i$. Его мощность равна k_ik_j. Легко видеть, что кратности в этом мультимножестве левых смежных классов, входящих в один двойной смежный класс, совпадают. Обозначим кратность правых смежных классов, образующих двойной класс Hg_nH, через C^n. Теперь определим произведение формулой

$$(Hg_iH)\times(Hg_jH)=\sum_n C^n(Hg_nH). \tag{1}$$

Эта операция ассоциативна. Действительно, в результате произведения $(Hg_iH)\times(Hg_jH)\times(Hg_kH)$ при любой расстановке скобок получается мультимножество двойных смежных классов, отвечающее мультимножеству $\{Hg_ih_l^{(i)}g_jh_m^{(j)}g_kh_n^{(k)}\}$ правых классов. Итак, линейное пространство $\mathcal{K}(G,H)$ с произведением (1) представляет собой ассоциативную алгебру, которая называется *бикосетной алгеброй групп G и H*. Легко видеть, что у этой алгебры есть одномерное представление $(Hg_iH)\to k_i$, причем константы k_i равны коэффициенту при $(H)=(HeH)$ в произведении $(Hg_iH)\times(Hg_i^{-1}H)$. (Константы k_i являются аналогами понятия мощности элементов бикосетных групп.) Таким образом, получаем следующее предложение.

Предложение 3.14. *Бикосетная алгебра $\mathcal{K}(G,H)$ групп G и H является C-алгеброй.*

Отметим, что если группа H конечна, то бикосетная алгебра $\mathcal{K}(G,H)$ совпадает с комбинаторной алгеброй группы $H \diagdown G \diagup H$. Кроме того, как нетрудно проверить, имеет место следующее очевидное предложение.

Предложение 3.15. *Если существует такая константа M, что для всех i имеет место неравенство $k_i \le M$, то $\mathcal{K}(G,H)$ – комбинаторная алгебра.*

3.2. Бикосетная алгебра симметрического графа.

В этом разделе описана конструкция, обратная к конструкции п. 3.1. Пусть Γ – связный симметрический граф и v – некоторая его вершина. Пусть $G\subset\mathrm{Aut}(\Gamma)$ – группа автоморфизмов графа, действующая справа транзитивно на множествах его ребер и вершин, а H – подгруппа группы G, состоящая из автоморфизмов, оставляющих неподвижной вершину v. Имеет место следующее предложение.

Предложение 3.16. *Множество вершин графа* Γ *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством левых смежных классов* $H \setminus G$.

Действительно, каждой вершине w ставится в соответствие множество автоморфизмов, переводящих вершину v в w, которое представляет собой некоторый левый смежный класс G по H.

Введем обозначения, как в п. 3.1. Пусть (Hg) обозначает соответствующую смежному классу Hg вершину графа Γ (в частности, (H) обозначает вершину v), $(Hg)N$ – совокупность вершин проходящей через (Hg) орбиты действия на $\mathcal{V}(\Gamma)$ группы $N \subset G$ (т.е. $(gH)N{=}\{(Hgn) \mid n \in N\}$).

Рассмотрим множество ребер, выходящих из вершины v. Так как граф Γ симметрический, то оно представляет собою орбиту действия группы H. Пусть u – представитель этой орбиты и t – произвольный автоморфизм, переводящий вершину v в вершину u. Тогда из предложения 3.16 вытекает следующее следствие.

Следствие 3.17. *Множество пар, состоящих из ребра графа и некоторой ориентации на нем, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством упорядоченных пар вершин* $((Hg),(Hthg))$, *где* $h \in H$ *– произвольный элемент.*

Следующая конструкция сопоставляет графу Γ и группе его автоморфизмов G алгебру $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(\Gamma, G)$, которая, по определению, является бикосетной алгеброй $\mathcal{K}(G,H)$ пары групп G и H.

Согласно предложению 3.16, каждому правому смежному классу $H \setminus G$ соответствует вершина графа Γ. Двойной смежный класс при этом допускает естественную интерпретацию как орбита действия группы H на множестве $\mathcal{V}(\Gamma)$ вершин графа Γ. Каждая орбита действия группы H на $\mathcal{V}(\Gamma)$ является, очевидно, подмножеством множества вершин, находящихся на данном фиксированном расстоянии от выделенной вершины v, которое в связном симметрическом графе является конечным. Следовательно, каждый двойной смежный класс $Hg_iH \in H \setminus G \,/\, H$ является объединением конечного числа левых смежных классов вида $Hg_ih_j^{(i)} \in H \setminus G$, и, таким образом, алгебра $\mathcal{K}(G,H)$ корректно определена. Эта алгебра называется *первой бикосетной алгеброй*[1] *графа* Γ *с группой автоморфизмов* G. Элемент алгебры, отвечающий двойному смежному классу HtH, называется *реберным*. Очевидным образом, он является эрмитовым.

Отметим, что в случае, когда группа H конечна, алгебра $\mathcal{A}_1$ совпадает с комбинаторной алгеброй группы $H \setminus G \,/\, H$. В частности, это так, если граф Γ построен по бикосетной группе $A{=}H \setminus G \,/\, H$ с помощью конструкции п. 3.1.

3.3. Универсальные отталкивающие объекты.

Пусть Γ – симметрический граф бикосетной группы $A_1 = H \setminus G \,/\, H$ с отмеченным эрмитовым образующим a; Γ^U – универсальный симметрический граф, накрывающий граф Γ, а группа G^U – группа автоморфизмов графа Γ^U, накрывающая группу G автоморфизмов графа Γ. Обозначим через $f\colon \Gamma^U \to \Gamma$ гомоморфизм симметрических графов, порожденный отображением накрытия $\tau(\Gamma^U) \to \tau(\Gamma)$ соответствующих им флаг-комплексов, а через $\phi\colon G^U \to G$ – соответствующий ему эпиморфизм групп автоморфизмов.

Пусть $v = (H)$ – неподвижная относительно действия группы H вершина графа Γ. Выберем произвольную вершину v^U графа Γ^U, лежащую в прообразе вершины v при гомоморфизме f, и обозначим через H^U подгруппу группы G^U, состоящую из автоморфизмов, оставляющих вершину v^U неподвижной. Как легко видеть, ограничение эпиморфизма ϕ на подгруппу H^U является эпиморфизмом на подгруппу H группы G. Таким образом, возникает гомоморфизм бикосетных алгебр $\mathcal{A}_1(\Gamma^U) = \mathcal{K}(G^U, H^U) \to \mathcal{A}_1(\Gamma) = \mathcal{K}(G,H)$.

Представим теперь класс однопорожденных бикосетных групп с отмеченными эрмитовыми образующими в виде дизъюнктного объединения некоторого множества *категорий однопорожденных бикосетных групп с эрмитовыми образующими*, каждая из которых задается универсальным симметрическим графом Γ^U и его группой автоморфизмов G^U. Однопорожденная бикосетная группа $H \setminus G \,/\, H$ с отмеченным эрмитовым образующим будет объектом категории, отвечающей данным (Γ^U, G^U), если универсальный граф Γ^U накрывает симметрический граф Γ этой бикосетной

[1] Понятия второй и третьей бикосетной алгебр симметрического графа будут введены в следующих публикациях.

группы и группа автоморфизмов G^U графа Γ^U накрывает группу автоморфизмов G графа Γ. Морфизмами этой категории будут гомоморфизмы комбинаторных алгебр бикосетных групп, порожденные гомоморфизмами симметрических графов, являющимися ограничениями соответствующих отображений накрытия. При этом алгебра $\mathcal{A}_1^U$ естественным образом является *универсальным отталкивающим объектом* этой категории. Подчеркнем, что, вообще говоря, алгебра $\mathcal{A}_1^U$ не является комбинаторной и, таким образом, может не отвечать никакому объекту категории.

Удобной характеристикой категории бикосетных групп, отвечающей данным (Γ^U, G^U), является пара, состоящая из графа Γ_1 единичных сфер графа Γ^U и группы $\widetilde{H}$ его автоморфизмов, индуцированных подгруппой H^U группы G^U. Каждый симметрический граф Γ, отвечающий какому-либо объекту категории, имеет граф Γ_1 в качестве графа единичных сфер, а подгруппа H группы автоморфизмов G графа Γ индуцирует на Γ_1 подгруппу $\widetilde{H} \subset \mathrm{Aut}\Gamma_1$.

В случае, когда граф Γ^U является дистанционно-транзитивным, алгебра $\mathcal{A}_1(\Gamma^U)$ есть алгебра с сильным образующим.

3.4. Примеры.

1. Пусть граф Γ_1 представляет собою дизъюнктное объединение n экземпляров полного графа K_m, где $mn > 1$, а группа $\widetilde{H}$ есть полная группа автоморфизмов графа Γ_1. Можно показать, что таким данным при каждых фиксированных натуральных m и n отвечает единственная категория бикосетных однопорожденных групп с эрмитовыми образующими. При $n > 1$ бикосетная алгебра, являющаяся универсальным объектом для этой категории, представляет собою алгебру с сильным образующим, которым является ее реберный элемент, и в естественном выделенном базисе $\{a_i\}$ $(i \in \mathbb{Z},\ i \leq 0)$ задается соотношениями

$$a_1^2 = mn\, a_0 + (m-1)a_1 + a_2;$$
$$a_1 \times a_i = m(n-1)a_{i-1} + (m-1)a_i + a_{i+1}, \quad i > 1.$$

Здесь a_0 – единица алгебры, а a_1 – ее реберный элемент.

В случае $n = 1$, $m > 1$, соответствующим этой категории универсальным симметрическим графом является граф K_{m+1}. Его первая бикосетная алгебра порождается парой элементов a_0 и a_1

с единственным соотношением

$$a_1^2 = m\,a_0 + (m-1)a_1.$$

2. Пусть граф Γ_1 является дополнением к дизъюнктному объединению m экземпляров полного графа K_n, где $m > 1$ и $n > 1$, а группа $\widetilde{H}$ есть полная группа автоморфизмов графа Γ_1. (Напомним, что граф Γ называется *дополнением* к графу Γ', если их множества вершин совпадают и две вершины соединены ребром в Γ тогда и только тогда, когда они не соединены в Γ'.) Можно показать, что таким данным при каждых фиксированных натуральных m и n отвечает единственная категория бикосетных однопорожденных групп с эрмитовыми образующими. Бикосетная алгебра, являющаяся универсальным объектом для этой категории, задается соотношениями

$$\begin{aligned}
&e\times e = e, \quad a\times e = e\times a = a, \quad b\times e = e\times b = b,\\
&a\times a = mn\,e + (m-1)n\,a + mn\,b,\\
&a\times b = b\times a = (n-1)a,\\
&b\times b = (n-1)\,e + (n-2)b.
\end{aligned} \tag{2}$$

(Здесь a – реберный элемент.)

3. Пусть граф Γ_1 есть пятиугольник, а группа $\widetilde{H}$ – группа D_5. Можно показать, что в этом случае граф Γ_U является одномерным остовом икосаэдра. Соответствующая ему алгебра $\mathcal{A}_1$ имеет выделенный базис e, a, b и c, причем реберный элемент a является ее сильным образующим. Таблица умножения этой алгебры имеет вид

$$\begin{aligned}
&e\times e = e, \quad a\times e = e\times a = a, \quad b\times e = e\times b = b,\\
&a\times a = 5e + 2a + 2b,\\
&a\times b = b\times a = 2a + 2b + 5c,\\
&a\times c = b.
\end{aligned}$$

Комментарий. В приложении к статье [3] предъявлена универсальная однопорожденная косетная 2-группа. Образующий этой группы не эрмитов, и, таким образом, эту группу нельзя получить с помощью излагаемой здесь теории. Отметим, что *универсальной однопорожденной (би)косетной* 2*-группой с эрмитовым* *образующим* является группа $\mathbb{Z} \,/\, \mathbb{Z}_2$. Ей отвечает граф, множество вершин которого можно отождествить с целыми числами, и две вершины его являются инцидентными тогда и только тогда, когда модуль разности соответствующих им чисел равен единице.

Литература

1. Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика. Схемы и отношения.* Мир, Москва (1987). Перевод с англ. E. Bannai and T. Ito, Algebraic combinatorics. I. Association schemes, Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA 1984; "Current research on algebraic combinatorics: supplements to our book, Algebraic combinatorics, I", Graphs Combin. **2** (1986), 287–308.
2. В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Комбинаторные алгебры и многозначные группы.* — Функц. анализ и его прил. **30**, No 3 (1996), 12–18.
3. V. M. Buchshtaber, A. P. Veselov, *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups.* — Int. Math. Res. Not. **8** (1996), 381–400.
4. В. А. Евстигнеев, В. Н. Касьянов, *Толковый словарь по теории графов.* Наука, Новосибирск (1999).
5. П. В. Ягодовский, *Представления многозначных групп на графах.* — *Усп. мат. наук* **57** (2002) No 1, 143–144.

Yagodovskii P. V. Bicoset groups and symmetric graphs.

In this paper we construct a functor from the set of bicoset multivalued groups with one Hermite generator to the set of symmetric graphs. The functor makes it possible to desribe the set of bicoset multivalued groups with one Hermite generator as a sum of categories. The categories are indexed by a pair (Γ^U, G^U) where $Gamma^U$ is a universal symmetric graph and G^U is a subgroup of $\mathrm{Aut}\Gamma^U$.

Финансовая академия
при правительстве РФ
E-mail: petryag@rol.ru

Поступило 25 июня 2002 г.