Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 293, 2002 г.

П. А. Головач

СИСТЕМЫ ПАР q-УДАЛЕННЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ И РАСКРАСКИ ГРАФОВ

1. Введение

В настоящей работе доказывается NP-полнота серии задач, связанных с раскрасками графов специального вида. Интерес к таким раскраскам обусловлен их тесной связью с одной из задач назначения частот. Более подробно с задачами назначения частот можно познакомиться в обзоре [10]. Нас будет интересовать только одна из них. Задача состоит в том, чтобы назначить радиочастоты передатчикам, находящимся на некоторой территории, так, чтобы избежать помех, вызванных интерференцией. Как правило, частоты для передатчиков не выбираются произвольным образом из некоторого интервала, а берутся из конечного дискретного набора частот, элементы которого называют каналами. Соответственно, мы можем рассмотреть задачу назначения каналов. Для решения задачи удобно использовать модели, связанные с раскрасками графов. Вершины графов соответствуют передатчикам, а ребра – ближайшим передатчикам. Каналы обозначаются неотрицательными целыми числами и соответствуют цветам. Необходимо назначить цвета вершинам так, чтобы вершины, находящиеся на определенном расстоянии, имели бы цвета, различающиеся на заданную величину. Кроме того, возможны некоторые другие ограничения на назначение цветов.

Более точно, пусть $G=(V,E)$ – простой граф, $p_1,p_2,\dots,p_r$ ($p_1\ge p_2\ge\dots\ge p_r$) – неотрицательные целые числа. $L(p_1,p_2,\dots,p_r)$-раскраской графа G называется функция $f\colon V\to\{0,1,2,\dots\}$ такая, что $|f(u)-f(v)|\ge p_i$, если $d(u,v)=i$, при $i=1,2,\dots,r$, где $d(u,v)$ – расстояние между вершинами u и v в графе G. $L(p_1,p_2,\dots,p_r)$-раскраска f называется k-$L(p_1,p_2,\dots,p_r)$-раскраской, если $f(v)\le k$ для всех вершин $v\in V$.

Наиболее полно $L(p_1,p_2,\dots,p_r)$-раскраски исследованы для

работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01-01-00235 и гранта NWO №047.008.006.

случая $r = 2$, $p_1 = 2$ и $p_2 = 1$. Задача о $L(2,1)$-раскраске была введена в [9] и рассматривалась, в частности, в работах [3, 4, 6, 8, 11]. Отметим, что в работе [4] был построен полиномиальный алгоритм, проверяющий существование k-$L(2,1)$-раскраски (и строящий такую раскраску) для деревьев. Для случая графов общего вида такая задача NP-полна. Например, в [6] было показано, что задача проверки существования k-$L(2,1)$-раскраски для фиксированного k является NP-полной для любого $k \geq 4$. Более общая задача $L(p,q)$-раскраски для $p \geq q \geq 1$ рассматривалась в [2, 5, 6, 7].

В [5] была введена задача раскраски предраскрашенных графов. Граф $G = (V, E)$ называется предраскрашенным, если цвета некоторых его вершин определены заранее, т.е. задано некоторое множество $U \subset V$ и функция $g: U \to \{0, 1, 2, \dots\}$. $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраской (соответственно, k-$L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраской) предраскрашенного графа G называется $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраска (k-$L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраска) f, для которой $f(u) = g(u)$ для всех вершин $u \in U$. Предраскраска моделирует ситуацию, возникающую при назначении частот, когда существуют привилегированные передатчики, которые используют фиксированные частоты. В упомянутой работе рассматривалась $L(p,q)$-раскраски предраскрашенных деревьев. В ней было показано, что задача проверки существования k-$L(p,q)$-раскраски полиномиально разрешима при $q = 1$ для любой заданной предраскраски (алгоритм аналогичен предложенному в [4] для задачи без предраскраски), но при $p \geq q > 1$ задача является NP-полной. Для доказательства NP-полноты в работе была введена задача о системе удаленных представителей, которая интересна сама по себе и оказалась удобной для доказательства NP-полноты задачи о существовании раскрасок. Формулируется эта задача следующим образом:

Условие: Дано семейство множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$, где $M_s \subset \{0, 1, \dots, m\}$ при $s = 1, 2, \dots, n$, а также положительное целое число q.

Вопрос: Возможно ли выбрать множество чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, где $i_s \in M_s$, для $s = 1, 2, \dots, n$, таким образом, что $|i_s - i_t| \geq q$ при $s, t = 1, 2, \dots, n$, $s \neq t$?

Мы вводим в рассмотрение задачу, родственную данной, названную нами задачей о системе пар q-удаленных представителей, которую, на наш взгляд, еще более удобно использовать для доказательств NP-полноты задач о существовании раскрасок. Мы разбиваем семейство множеств на пары и выбираем из каждой пары множеств пару представителей. При этом получается следующая задача.

Условие: Дана система пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$, где $M_s, N_s \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ при $s = 1, 2, \ldots, n$, а также положительное целое число q.

Вопрос: Возможно ли выбрать систему пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$, где $i_s \in M_s$, $j_s \in N_s$ для $s = 1, 2, \ldots, n$, таким образом, что $i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n$ различны и $|i_s - j_s| \geq q$ при $s = 1, 2, \ldots, n$?

Полезность этой задачи подтверждается тем, что нам удалось доказать NP-полноту (в сильном смысле) целой серии задач о раскрасках.

Мы будем рассматривать задачу о существовании k-$L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски предраскрашенных графов. Задача формулируется следующим образом:

Условие: Даны граф $G = (V, E)$, положительное целое число k, положительные целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_r$ $(p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_r)$, $U \subset V$ и функция $g\colon U \to \{0, 1, \ldots, k\}$.

Вопрос: Существует ли k-$L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраска f графа G, для которой $f(u) = g(u)$ при $u \in U$?

Отметим, что параметры $p_1, p_2, \ldots, p_r$ всегда будут считаться фиксированными.

Удалось доказать, что эта задача является NP-полной в сильном смысле для $L(p, 1)$-раскраски и графов, являющимися кактусами, все циклы которых имеют длину, не превосходящую трех, при $p \geq 2$. Напомним, что граф называется кактусом, если каждое его ребро входит не более в чем один цикл. Разумеется, кактусы, сами по себе, не представляют особого интереса, но немедленным следствием утверждения для кактусов является NP-полнота задачи для частичных k-деревьев при $k \geq 2$. Оказывается, таким образом, что в нашем случае задачи для обычных деревьев и k-деревьев для ограниченных значений параметра k имеют различную сложность, что представляется интересным, поскольку известно, что задачи, полиномиально разрешимые для деревьев, часто оказываются полиномиально разрешимыми и для частичных k-деревьев. Далее показано, что задача становится NP-полной для деревьев в случае $L(p, 1, 1, \ldots, 1)$-раскрасок (параметр задачи $r \geq 3$) при $p \geq 2$.

Нами также рассматриваются списочные раскраски. Предположим, что каждой вершине v графа G сопоставлен список допустимых цветов, т.е. непустое конечное множество неотрицательных целых чисел $S(v)$. Списочной $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраской графа G мы будем называть $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраску f, для которой $f(v) \in S(v)$ для всех вершин $v \in V$. Списочные раскраски моделируют случай, когда при назначении частот каждому передатчику задан список возможных каналов.

Сформулируем задачу о существовании списочной $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраски.

Условие: Даны граф $G = (V, E)$, положительные целые числа $p_1, p_2, \dots, p_r$ ($p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$) и непустые конечные множества неотрицательных целых чисел $S(v)$ (списки допустимых цветов)для всех $v \in V$.

Вопрос: Существует ли списочная $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраска f графа G?

Также отметим, что параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$ всегда будут считаться фиксированными.

Доказано, что эта задача является NP-полной в сильном смысле для $L(p, 1)$-раскраски и графов, являющимися кактусами, все циклы которых имеют длину, не превосходящую трех, при $p \geq 2$. Кроме того, показано, что задача становится NP-полной для деревьев, диаметр которых не превосходит 4, в случае $L(p, 1, 1, \dots, 1)$-раскрасок (параметр задачи $r \geq 3$) при $p \geq 2$.

В заключение рассматриваются так называемые радиораскраски. Пусть $G = (V, E)$ – простой граф. $L(p)$-радиораскраской графа G называется взаимно однозначная функция $f: V \to \{0, 1, 2, \dots\}$ такая, что $|f(u) - f(v)| \geq p$, если $d(u, v) = 1$. Пусть каждой вершине v графа G сопоставлен список допустимых цветов, т.е. непустое конечное множество неотрицательных целых чисел $S(v)$. Списочной радиораскраской графа G мы будем называть радиораскраску f, для которой $f(v) \in S(v)$ для всех вершин $v \in V$.

Задача о существовании списочной радиораскраски формулируется следующим образом:

Условие: Даны граф $G = (V, E)$, положительное целое число p и непустые конечные множества неотрицательных целых чисел $S(v)$ (списки допустимых цветов)для всех $v \in V$.

Вопрос: Существует ли списочная $L(p)$-радиораскраска f графа G?

Параметр p в работе считается фиксированным.

Доказано, что эта задача является NP-полной в сильном смысле для деревьев, диаметр которых не превосходит 4, а также для путей.

2. Системы пар q-удаленных представителей

В этой части работы вводятся задачи о системе пар q-удаленных представителей. Мы будем рассматривать два варианта этой задачи. Напомним первый из них, уже упоминавшийся во вводной части.

Условие: Дана система пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \dots, (M_n, N_n)$, где $M_s, N_s \subset \{0, 1, \dots, m\}$ при $s = 1, 2, \dots, n$, а также положительное целое число q.

Вопрос: Возможно ли выбрать систему пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$, где $i_s \in M_s$, $j_s \in N_s$ для $s = 1, 2, \dots, n$, таким образом, что $i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n$ различны и $|i_s - j_s| \geq q$ при $s = 1, 2, \dots, n$?

Систему пар чисел $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ мы называем системой пар q-удаленных представителей, а задачу, соответственно, задачей о системе пар q-удаленных представителей. В дальнейшем мы будем ссылаться на эту задачу, как на задачу SP-1 (ниже будет введена задача SP-2). Докажем NP-полноту задачи.

Теорема 1. *Задача SP-1 NP-полна в сильном смысле для любого заданного $q \geq 2$.*

Доказательство. Принадлежность задачи классу NP очевидна. Легко видеть, что достаточно доказать NP-полноту задачи для случая, когда максимальное число в условии задачи ограничено сверху полиномом от n. Мы докажем, что задача является NP-полной в случае, если максимальное число не превосходит $3qn$. Так как по условию теоремы q является фиксированным параметром, то этого достаточно для доказательства NP-полноты в сильном смысле.

Рассмотрим вариант задачи о выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме и сведем ее к нашей задаче. Задача о выполнимости формулируется следующим образом:

Условие: Даны булевы переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ и C – булева формула в конъюнктивной нормальной форме от этих переменных.

Вопрос: Возможно ли придать значения переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ таким образом, что значением C будет $true$?

Известно (см. [1]), что эта задача NP-полна, даже если ограничиться формулами, каждая элементарная дизъюнкция которых содержит не более трех литералов, и каждая переменная входит в не более чем три элементарных дизъюнкции. Очевидно, что можно дополнительно предположить, что каждая переменная встречается ровно один раз в положительной форме и один или два раза с отрицанием. Кроме того, без потери общности можно считать, что число элементарных дизъюнкций в C четно. Если это не так, то добавим переменные $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ и построим формулу C' из C заменяя x_i на x'_i. Формула $C \wedge C'$ имеет четное число элементарных дизъюнкций и является выполнимой тогда и только тогда, когда выполнима C. Мы будем предполагать, что C удовлетворяет всем перечисленным условиям.

Построим систему пар q-удаленных представителей. Положим $r_i = 3q(i-1)$, $r'_i = 3q(i-1)+q$, $\overline{r_i} = 3q(i-1)+1$, $\overline{r'_i} = 3q(i-1)+q+1$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Наша система состоит из двух частей. Первая часть содержит пары $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \dots, (M_n, N_n)$, где $M_i = \{r_i, \overline{r'_i}\}$, $N_i = \{r'_i, \overline{r_i}\}$. Пусть $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_{2m}$, где $C_1, C_2, \dots, C_{2m}$ – элементарные дизъюнкции. Построим пары $(M'_1, N'_1), (M'_2, N'_2), \dots, (M'_m, N'_m)$ просматривая элементарные дизъюнкции C. Множество M'_j строиться по C_{2j-1}, а N'_j – по C_{2j} для $j = 1, 2, \dots, m$. Правила построения одинаковы. Если элементарная дизъюнкция содержит x_i, то к множеству добавляется r'_i. Если же элементарная дизъюнкция содержит $\overline{x_i}$, то к множеству добавляется $\overline{r_i}$ для первого вхождения литерала $\overline{x_i}$ в C и $\overline{r'_i}$ для второго литерала $\overline{x_i}$. Эта операция выполняется для всех литералов в элементарной дизъюнкции. Отметим, что согласно определению $r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r'_i}$, все числа, включаемые в множество, различны.

Общее число пар равняется $n + m$ и все множества являются подмножествами $\{0, 1, \dots, 3qn - 2q + 1\}$. Поскольку q является фиксированным параметром, то из этого следует, что описанное построение может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. Заметим также, что максимальное число в множествах не превосходит $3qn - 2q + 1 \leq 3q(n + m)$.

Докажем, что формула C выполнима тогда и только тогда, когда можно выбрать систему пар q-удаленных представителей из построенного набора пар.

Предположим, что C является выполнимой и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – значения пременных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $C = true$. Если $z_i = true$, то выберем из множества M_i число $\overline{r'_i}$, а из множества N_i – число $\overline{r_i}$. Если $z_i = false$, то из M_i выбирается r_i, а из N_i – r'_i при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $|r_i - r'_i| \geq q$ и $|\overline{r_i} - \overline{r'_i}| \geq q$. Кроме того, из $\{r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r'_i}\} \cap \{r_j, r'_j, \overline{r_j}, \overline{r'_j}\} = \emptyset$ для $i \neq j$ следует, что все выбранные числа различны. Так как $C = true$, то каждая элементарная дизъюнкция C содержит литерал со значением $true$. Выберем в каждой элементарной дизъюнкции такой литерал и соответственно выберем из пар $(M'_1, N'_1), (M'_2, N'_2), \ldots, (M'_m, N'_m)$ числа, соответствующие этим литералам. Нетрудно видеть, что все эти числа отличаются от чисел, уже выбранных из пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$. Пусть s и t – два выбранных числа. Предположим, что s соответствует литералу, построенному над x_i, а t – литералу над x_j. Если $i \neq j$, то из определения чисел $r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r'_i}, r_j, r'_j, \overline{r_j}, \overline{r'_j}$ следует, что $|s - t| \geq q$. Если $i = j$, то, поскольку литералы имеют одинаковые значения, литералы равны. Так как C содержит два одинаковых литерала, то эти литералы равны $\overline{x_i}$. Таким образом, s и t суть числа $\overline{r_i}$ и $\overline{r'_i}$ и $|s - t| \geq q$. Мы получаем, что все числа, выбранные из пар $(M'_1, N'_1), (M'_2, N'_2), \ldots, (M'_m, N'_m)$, различаются, по крайней мере, на q, и система пар q-удаленных представителей получена.

Предположим теперь, что из набора пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots,$ (M_n, N_n), $(M'_1, N'_1), (M'_2, N'_2), \ldots, (M'_m, N'_m)$ выбрана система пар q-удаленных представителей. Рассмотрим пары (M_i, N_i) при $i = 1, 2, \ldots, n$. Возможны только два случая: либо число r_i выбрано из M_i, а число r'_i – из N_i, либо число $\overline{r'_i}$ выбрано из M_i, а число $\overline{r_i}$ – из N_i. В первом случае положим $x_i = false$, а во втором – $x_i = true$. Так как из множеств $(M'_1, N'_1), (M'_2, N'_2), \ldots, (M'_m, N'_m)$ выбираются числа, отличающиеся от уже выбранных из набора пар (M_1, N_1), $(M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$, то им соответствуют литералы со значением $true$. Поскольку каждая элементарная дизъюнкция C содержит литерал со значением $true$, то C выполнена.

Теорема доказана.

Отметим, что в ходе доказательства была доказана NP-полнота ограниченной версии задачи SP-1.

Следствие 1. *Задача SP-1 NP-полна в случае, если для ее параметров выполнено неравенство $m \leq 3qn$, для любого заданного $q \geq 2$.*

Кроме задачи SP-1 нам удобно рассмотреть ее вариант, отличающийся тем, что числа $j_1, j_2, \ldots, j_n$ не обязательно различны. Мы будем ссылаться на эту задачу, как на задачу SP-2. Формулируется SP-2 следующим образом:

Условие: Дана система пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots,$ (M_n, N_n), где $M_s, N_s \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ при $s = 1, 2, \ldots, n$, а также положительное целое число q.

Вопрос: Возможно ли выбрать систему пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots,$ (i_n, j_n), где $i_s \in M_s$, $j_s \in N_s$ для $s = 1, 2, \ldots, n$, таким образом, что $i_1, i_2, \ldots, i_n$ различны, каждое из них отличается от чисел $j_1, j_2, \ldots, j_n$, и $|i_s - j_s| \geq q$ при $s = 1, 2, \ldots, n$?

Теорема 2. *Задача SP-2 NP-полна в сильном смысле для любого заданного $q \geq 2$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Принадлежность задачи SP-2 классу NP очевидна. Докажем NP-полноту задачи для случая, когда максимальное число в условии задачи ограничено сверху величиной $3qn$.

Рассмотрим вариант задачи о выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме со следующими ограничениями на булеву формулу: каждая элементарная дизъюнкция содержит не более трех литералов, каждая переменная входит в не более чем три элементарных дизъюнкции, причем каждая переменная встречается ровно один раз в положительной форме и один или два раза с отрицанием. Сведем эту задачу к задаче SP-2.

Построим систему пар q-удаленных представителей. Положим $r_i = 3q(i-1)$, $r'_i = 3q(i-1)+q$, $\overline{r_i} = 3q(i-1)+1$, $\overline{r'_i} = 3q(i-1)+q+1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Наша система состоит из двух частей. Первая часть содержит пары (M_1, N_1), $(M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$, где $M_i = \{r_i, \overline{r'_i}\}$, $N_i = \{r'_i, \overline{r_i}\}$. Пусть $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$, где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ – элементарные дизъюнкции. Вторая часть системы пар выглядит следующим образом:$(M'_1, S), (M'_2, S), \ldots, (M'_m, S)$, где $S = \{3qn\}$, а множества $M'_1, M'_2, \ldots, M'_m$ строятся с помощью просмотра элементарных дизъюнкций C. Множество M'_j строится по дизъюнкции C_j для $j = 1, 2, \ldots, m$. Если элементарная дизъюнкция содержит x_i, то к множеству добавляется r'_i. Если же элементарная дизъюнкция содержит $\overline{x_i}$, то к множеству добавляется $\overline{r_i}$ для первого вхождения литерала $\overline{x_i}$ в C и $\overline{r'_i}$ для второго литерала $\overline{x_i}$. Эта операция выполняется для всех литералов в элементарной дизъюнкции. Отметим, что согласно определению $r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r'_i}$, все числа, включаемые в множество, различны.

Общее число пар равняется $n+m$ и все множества являются подмножествами $\{0, 1, \ldots, 3qn\}$. Из этого следует, что описанное построение может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. Заметим также, что максимальное число в множествах не превосходит $3qn \leq 3q(n+m)$.

Докажем, что формула C выполнима тогда и только тогда, когда можно выбрать систему пар q-удаленных представителей из построенного набора пар.

Предположим, что C является выполнимой, и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $C = true$. Если $z_i = true$, то выберем из множества M_i число $\overline{r'_i}$, а из множества N_i – число $\overline{r_i}$. Если $z_i = false$, то из M_i выбирается r_i, а из N_i – r'_i при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $|r_i - r'_i| \geq q$ и $|\overline{r_i} - \overline{r'_i}| \geq q$. Кроме того, из $\{r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r'_i}\} \cap \{r_j, r'_j, \overline{r_j}, \overline{r'_j}\} = \emptyset$ для $i \neq j$ следует, что все выбранные числа различны. Так как $C = true$, то каждая элементарная дизъюнкция C содержит литерал со значением $true$. Выберем в каждой элементарной дизъюнкции C_j такой литерал u и, соответственно, выберем из пары множеств (M'_j, S) пару чисел $(t, 3qn)$, где t – число включенное в M'_j при просмотре литерала u. Очевидно, что $|t - 3qn| \geq q$. Нетрудно видеть, что все числа, выбранные из множеств $M'_1, M'_2, \ldots, M'_m$, отличаются от чисел, уже выбранных из пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$ и от числа $3qn$. Пусть s и t – два выбранных числа. Предположим, что s соответствует литералу, построенному над x_i, а t – литералу над x_j. Если $i \neq j$, то из определения чисел $r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r'_i}, r_j, r'_j, \overline{r_j}, \overline{r'_j}$ следует, что $s \neq t$. Если $i = j$, то рассматриваемые литералы равны $\overline{x_i}$. Таким образом, s и t суть числа $\overline{r_i}$, $\overline{r'_i}$ и $s \neq t$. Таким образом, система пар q-удаленных представителей получена.

Предположим теперь, что из набора пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots,$ (M_n, N_n), $(M'_1, S), (M'_2, S), \ldots, (M'_m, S)$ выбрана система пар q-удаленных представителей. Рассмотрим пары (M_i, N_i) при $i = 1, 2, \ldots, n$. Возможны только два случая: либо число r_i выбрано из M_i, а число r'_i – из N_i, либо число $\overline{r'_i}$ выбрано из M_i, а число

$\overline{r_i}$ – из N_i. В первом случае положим $x_i = false$, а во втором – $x_i = true$. Заметим теперь, что числа, выбранные из множеств $M'_1, M'_2, \ldots, M'_m$, соответствуют литералам со значением $true$. Поскольку каждая элементарная дизъюнкция C содержит литерал со значением $true$, то C выполнена.

Теорема доказана.

Также как и выше, отметим NP-полноту ограниченной версии этой задачи.

Следствие 2. *Задача SP-2 NP-полна в случае, если для ее параметров выполнено неравенство $m \leq 3qn$, для любого заданного $q \geq 2$.*

Мы полагаем, что введенные нами задачи о системе пар q-удаленных представителей представляют определенный интерес сами по себе. По крайней мере, оказалось, что их удобно использовать для доказательства NP-полноты задач о раскрасках. Ряд таких задач рассматривается в следующей части работы.

3. Раскраски графов

3.1. $L(p,1)$-раскраска кактусов.

Мы начнем с доказательства NP-полноты задачи о существовании $L(p,1)$-раскраски предраскрашенных кактусов.

Теорема 3. *Задача существования k-$L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для $L(p,1)$-раскраски и графов, являющимися кактусами, все циклы которых имеют длину, не превосходящую трех, для любого заданного $p \geq 2$.*

Доказательство. Принадлежность задачи классу NP очевидна.

Докажем, что задача является NP-полной при $k \leq pl$ и $g(u) \leq pl$ для $u \in U$, где l – число вершин графа. Рассмотрим ограниченную версию задачи SP-1 с параметром $q = p$ и $m \leq 3qn$. Как было показано в предыдущем разделе, эта задача NP-полна. Сведем эту задачу к задаче о существовании k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных кактусов.

Положим $k = m+q+2$ и построим предраскрашенный кактус G. Рассмотрим систему пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), ..., (M_n, N_n)$. Для каждого $j = 1, 2 \ldots, n$ построим граф G_j. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} = \{0, 1, \ldots, m\} \setminus M_j$, а $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\} = \{0, 1, \ldots, m\} \setminus N_j$. Граф G_j строится так, как показано на Рис. 1. Зададим предраскраску g вершин этого графа. Положим $g(u_i) = x_i$ при $i = 1, 2, \ldots, r$,

$g(v_i) = y_i$ при $i = 1, 2, \ldots, s$, $g(u) = m + q + 1$, $g(v) = m + q + 2$ и $g(a) = m + q$. Отметим, что нераскрашенными остались только вершины b и c. Нетрудно видеть, что для любой k-$L(p, 1)$-раскраски G_j вершина b может быть окрашена только цветом из M_j, а c – только цветом из N_j. Кроме того, поскольку эти вершины являются смежными, то цвета должны различаться не менее чем на q. Назовем вершину a корнем графа G_j. Построим кактус G из графов G_j при $j = 1, 2, \ldots, n$ объединив корни этих графов. Так как нераскрашенные вершины различных G_j находятся на расстоянии 2, то для их окраски необходимо использовать различные цвета. Таким образом, k-$L(p, 1)$-раскраска предраскрашенного кактуса G существует тогда и только тогда, когда из набора пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$ можно выбрать систему пар q-удаленных представителей.

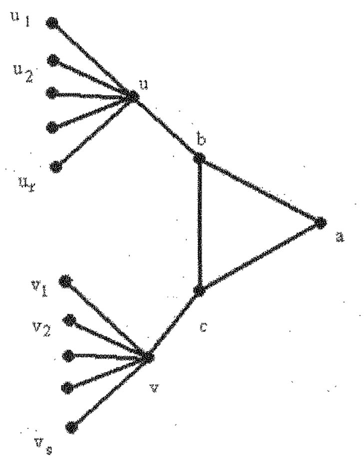

Рис. 1.

Число вершин графа G не превосходит $2n(m + 3) + 1$, а максимальный числовой параметр равен $m + q + 2$. Поскольку $m \leq 3qn$, то число вершин не превосходит $6n(qn + 1) + 1$, а максимальный числовой параметр – $3qn + q + 2$. Из этого вытекает, что построение G может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. С другой стороны, граф G имеет не менее $4n + 1$ вершины. Так как, максимальный числовой параметр равен $m + q + 2$, то выполнено неравенство: $m + q + 2 \leq 3qn + q + 2 \leq p(4n + 1)$. Таким образом, ограничения на величины числовых параметров выполнены.

Теорема доказана.

Множество кактусов, длины циклов которых не превосходят трех, составляет подмножество различных классов графов. Пользуясь этим получим ряд следствий.

Поскольку кактусы являются внешнепланарными графами, то мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Задача существования k-$L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для $L(p, 1)$-раскраски и внешнепланарных графов для любого заданного $p \geq 2$.*

Граф называется хордальным, если он не содержит циклов длины большей трех, в качестве порожденных подграфов. Рассматриваемые нами кактусы являются хордальными графами, и мы получаем очередное следствие.

Следствие 4. *Задача существования k-$L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для $L(p, 1)$-раскраски и хордальных графов для любого заданного $p \geq 2$.*

Напомним определение k-деревьев. Оно является индукционным. Клика с $k + 1$ вершинами является k-деревом. k-дерево с $n+1$ вершинами может быть получено из k-дерева с n вершинами с помощью добавления новой вершины и соединения ее ребрами с вершинами некоторой k-клики. Подграфы k-деревьев называют частичными k-деревьями. Очевидно, что наши кактусы являются частичными 2-деревьями, и мы получаем заключительное следствие.

Следствие 5. *Задача существования k-$L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для $L(p, 1)$-раскраски и частичных k-деревьев при $k \geq 2$ для любого заданного $p \geq 2$.*

Рассмотрим теперь списочные раскраски.

Теорема 4. *Задача существования списочной $L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски графов NP-полна в сильном смысле для $L(p, 1)$-раскраски и графов, являющимися кактусами, все циклы которых имеют длину не превосходящую трех, для любого $p \geq 2$.*

Доказательство. Принадлежность задачи классу NP очевидна.

Докажем, что задача является NP-полной при значении максимального числового параметра, не превосходящего $2pl$, где l –

число вершин графа. Рассмотрим ограниченную версию задачи SP-1 с параметром $q = p$ и $m \leq 3qn$. Сведем эту задачу к задаче о существовании списочной $L(p,1)$-раскраски кактусов.

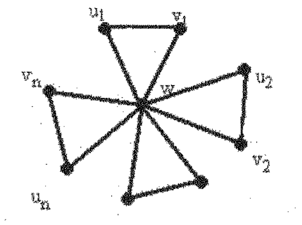

Рис. 2.

Рассмотрим кактус G, изображенный на Рис. 2. Зададим списки допустимых цветов вершин следующим образом: $S(u_i) = M_i$, $S(v_i) = N_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а $S(w) = \{m + q\}$.

Очевидно, что списочная $L(2,1)$-раскраска данного кактуса существует тогда и только тогда, когда из набора пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots,\ (M_n, N_n)$ можно выбрать систему пар q-удаленных представителей.

Число вершин графа G составляет $2n+1$, а максимальный числовой параметр равен $m + q$. Так как $m \leq 3qn$, то из этого сразу следует, что описанное построение может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. Поскольку максимальный числовой параметр равен $m + q$, то выполнено неравенство: $m + q \leq 3qn + q \leq 2p(2n + 1)$. Таким образом, ограничения на величины числовых параметров выполнены.

Теорема доказана.

Отметим, что для деревьев задача о существования списочной $L(p,1)$-раскраски полиномиально разрешима для любых заданных списков допустимых цветов. Для ее решения можно использовать алгоритмы, предложенные в [4, 5], с незначительными модификациями.

Легко видеть, что из данной теоремы вытекают следствия, аналогичные следствиям из теоремы 3.

Следствие 6. *Задача существования списочной $L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски графов NP-полна в сильном смысле для $L(p,1)$-раскраски и внешнепланарных графов для любого заданного $p \geq 2$.*

Следствие 7. *Задача существования списочной $L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски графов NP-полна в сильном смысле для $L(2,1)$-раскраски* *и хордальных графов для любого заданного $p \geq 2$.*

Следствие 8. *Задача существования списочной $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраски графов NP-полна в сильном смысле для $L(2,1)$-раскраски и частичных k-деревьев при $k \geq 2$ для любого заданного $p \geq 2$.*

3.2. $L(p, 1, 1, \dots, 1)$-раскраска деревьев.

В этой части работы будет показано, что задача о существовании $L(p, 1, 1, \dots, 1)$-раскраски предраскрашенных деревьев и задача о существовании списочной $L(p, 1, 1, \dots, 1)$-раскраски деревьев NP-полны. Мы начнем с задачи о раскраске предраскрашенных деревьев.

Теорема 5. *Задача существования k-$L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле при любом заданном $p_1 \geq 2$ и $p_2 = p_3 = \dots = p_r = 1$ для деревьев при любом заданном $r \geq 3$.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно случай $r = 3$. Докажем, что задача является NP-полной при $k \leq p_1 l$ и $g(u) \leq p_1 l$ для $u \in U$, где l – число вершин дерева.

Рассмотрим ограниченную версию задачи SP-2 с параметром $q = p_1$ и $m \leq 3qn$. Сведем эту задачу к задаче о существовании k-$L(p_1, 1, 1)$-раскраски предраскрашенных деревьев.

Положим $k = m+2q+1$ и построим предраскрашенное дерево T. Рассмотрим систему пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \dots, (M_n, N_n)$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ построим дерево T_j. Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} = \{0, 1, \dots, m\} \setminus M_j$, а $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{0, 1, \dots, m\} \setminus N_j$. Дерево T_j строится так, как показано на Рис. 3. Зададим предраскраску g вершин этого дерева. Положим $g(u_i) = x_i$ при $i = 1, 2, \dots, r$, $g(v_i) = y_i$ при $i = 1, 2, \dots, s$, $g(w_1) = g(z_1) = m+q+1$, $g(w_2) = g(z_2) = m+2q+1$, $g(d) = m+1$ и $g(a) = m+q$. Назовем вершину a корнем дерева T_j. Построим дерево T из деревьев T_j при $j = 1, 2, \dots, n$, объединив корни этих деревьев.

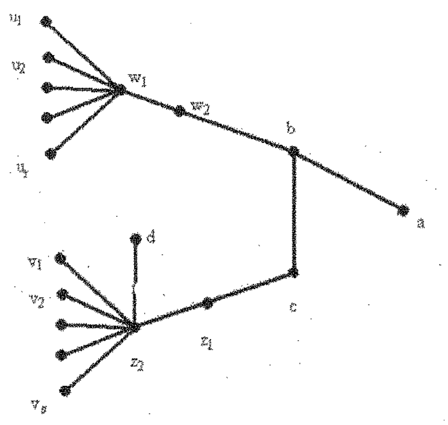

Рис. 3.

В каждом дереве T_j нераскрашенными являются только вершины b и c. Поскольку вершина b смежна вершинам a и w_2, имеющим цвета $m+q$ и $m+2q+1$, а также находится на расстоянии 2 от вершины w_1, имеющей цвет $m+q+1$, то окрашена эта вершина может быть только в один из цветов $0, 1, \ldots, m$. Аналогично, вершина c, смежная вершине z_1, окрашенной в цвет $m+q+1$, находящаяся на расстоянии 2 от вершин a и z_2, окрашенных в цвета $m+q$ и $m+2q+1$, и находящаяся на расстоянии 3 от вершины d цвета $m+1$, также может быть окрашена только в один из цветов $0, 1, \ldots, m$. Кроме того, цвет вершины b должен отличаться от цветов вершин $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Следовательно, она может быть окрашена только в цвет из M_j. Соответственно, вершина c не может иметь цвет, совпадающий с цветом вершин $v_1, v_2, \ldots, v_s$ и, следовательно, может получить цвет только из множества N_j. Так как вершины b и c являются смежными, то номера их цветов должны различаться не менее, чем на q. Вершины b в различных деревьях T_j не могут иметь один цвет, так как все они находятся на расстоянии 2 друг от друга в дереве T. Вершина b из одного дерева T_j и вершина c из другого находятся на расстоянии 3 и, таким образом, должны быть окрашены в разные цвета. Очевидно, что любая раскраска удовлетворяющая всем этим условиям, будет являтся k-$L(p_1, 1, 1)$-раскраской предраскрашенного дерева T. Из этих замечаний немедленно следует, что любая система пар q удаленных представителей порождает раскраску осташихся нераскрашенными вершин дерева, а любая раскраска T порождает систему пар q удаленных представителей.

Число вершин дерева T не превосходит $n(2m+11)+1$, а максимальный числовой параметр равен $m+2q+1$. Поскольку $m \leq 3qn$, то число вершин не превосходит $n(6qn+11)+1$, а максимальный числовой параметр – $3qn+2q+1$. Из этого вытекает, что построение T может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. С другой стороны, дерево T имеет не менее $7n+1$ вершины. Так как, максимальный числовой параметр равен $m+2q+1$, то выполнено неравенство: $m+2q+1 \leq 3qn+2q+1 \leq q(7n+1) = p_1(7n+1)$. Таким образом, ограничения на величины числовых параметров выполнены.

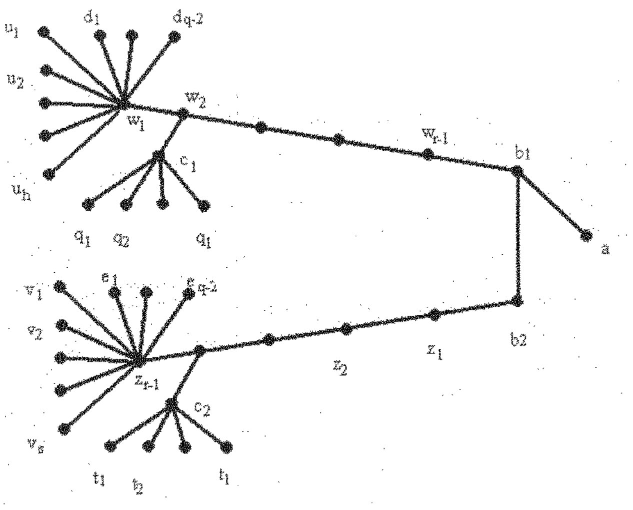

Рис. 4.

Рассмотрим теперь случай $r \geq 4$. Рассуждения в этом случае аналогичны рассуждениям в случае $r = 3$, но построение более громоздко. Докажем, что задача является NP-полной при $k \leq 2\lambda$ и $g(u) \leq 2\lambda$ для $u \in U$, где λ – число вершин дерева.

Рассмотрим ограниченную версию задачи SP-1 с параметром $q = p_1$ и $m \leq 3qn$. Сведем эту задачу к задаче о существовании k-$L(p_1, 1, 1, \ldots, 1)$-раскраски предраскрашенных деревьев.

Положим $k = m + (rn - n + 1)q + 1$ и построим предраскрашенное дерево T. Рассмотрим систему пар множеств

$(M_1, N_1), (M_2, N_2), \dots, (M_n, N_n)$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ построим дерево T_j. Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_h\} = \{0, 1, \dots, m\} \setminus M_j$, $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{0, 1, \dots, m\} \setminus N_j$, а $l = (r-1)nq+1$. Дерево T_j строится так, как показано на Рис. 4. Зададим предраскраску g вершин этого дерева. Положим $g(u_i) = x_i$ при $i = 1, 2, \dots, h$, $g(v_i) = y_i$ при $i = 1, 2, \dots, s$, $g(d_i) = g(e_i) = m + i + 1$ при $i = 1, 2, \dots, q-2$ (если $q = 2$, то вершины d_i и e_i отсутствуют), $g(w_i) = g(z_i) = m+(r-1)(j-1)q+(i+1)q+1$ при $i = 1, 2, \dots, r-1$, $g(c_1) = g(c_2) = m+1$ и $g(a) = m+q$. Для окраски вершин $q_1, q_2, \dots, q_l$ используются цвета из множества $\{m+q+1, m+q+2, \dots, m+(r-1)nq+q+1\}$, которые не были использованы при окраске вершин $w_1, w_2, \dots, w_{r-1}$. Положим $g(t_i) = g(q_i)$ для $i = 1, 2, \dots, l$. Назовем вершину a корнем дерева T_j. Построим дерево T из деревьев T_j при $j = 1, 2, \dots, n$, объединив корни этих деревьев.

Аналогично случаю $r = 3$ следует заметить, что в каждом из деревьев T_j нераскрашены только две вершины b_1 и b_2. Нетрудно видеть, что раскраска вершин $w_1, w_2, \dots, w_{r-1}$, $d_1, d_2, \dots, d_{q-2}$, $q_1, q_2, \dots, q_l$ и c_1 выбрана так, что вершина b_1 может быть окрашена только в один из цветов $0, 1, \dots, m$. Кроме того, эта раскраска не препятствует тому, что вершина b_2, а также вершины b_1, b_2 из других деревьев T_j окрашиваются в цвета из множества $\{0, 1, \dots, m\}$. Соответственно, раскраска вершин $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$, $e_1, e_2, \dots, e_{q-2}$, $t_1, t_2, \dots, t_l$ и c_2 выбрана так, что вершина b_2 может быть окрашена только в один из цветов $0, 1, \dots, m$. Эта раскраска также не накладывает новых ограничений на цвета других нераскрашенных вершин. Учитывая цвета вершин $u_1, u_2, \dots, u_h$ и $v_1, v_2, \dots, v_s$ (отметим, что все остальные раскрашенные вершины, кроме a, вводятся для того, чтобы "отодвинуть" эти вершины на нужное расстояние) получаем, что вершины b_1 и b_2 могут быть окрашены только цветами из множеств M_j и N_j соответственно. Так как они смежны, то цвета используемые при их раскраске должны различаться по крайней мере на q. Кроме того, поскольку все эти вершины в дереве T находятся на расстоянии не превосходящем 4 друг от друга, то все они должны быть окрашены в разные цвета. Отсюда следует, что любая k-$L(p_1, 1, 1, \dots, 1)$-раскраска предраскрашенного дерева T немедленно порождает систему q-удаленных представителей. Также легко видеть, что любой системе q-удаленных представителей соответствует допустимая раскраска T.

Число вершин дерева T не превосходит $2n((m+1)+(q-2)+r+(l+1))+1 = 2n((r-1)nq+m+q+r+1)+1$, а максимальный числовой параметр равен $k = m+(rn-n+1)q+1$. Так как $m \leq 3qn$, то построение T может быть выполнено алгоритмом с полиномальной сложностью. Осталось проверить выполнение ограничений на числовые параметры. Число вершин дерева T не менее $2n((q-2)+r+(l+1))+1 = 2n((r-1)nq+q+r)+1$. Получаем, что для максимального значения числового параметра выполнено неравенство: $m+(rn-n+1)q+1 \leq 3qn+(rn-n+1)q+1 \leq 2(2n((r-1)nq+q+r)+1)$, т.е. оно не превосходит удвоенного числа вершин дерева.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу о списочной раскраске.

Теорема 6. *Задача существования списочной $L(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-раскраски графов NP-полна в сильном смысле при любом заданном $p_1 \geq 2$ и $p_2 = p_3 = \cdots = p_r = 1$ для деревьев с диаметром, не превосходящим четырех, для любого заданного $r \geq 3$.*

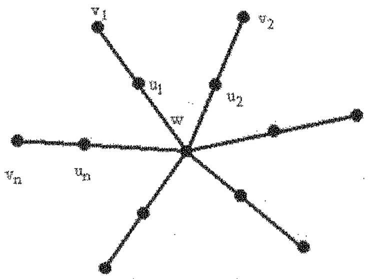

Рис. 5.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случай $r = 3$. Рассмотрим ограниченную версию задачи SP-2 с параметром $q = p_1$ и $m \leq 3qn$. Сведем эту задачу к ограниченной версии задачи о существовании списочной $L(p_1, 1, 1, \ldots, 1)$-раскраски деревьев, в которой максимальная величина числового параметра не превосходит $2p_1 l$, где l – число вершин дерева.

Рассмотрим дерево T, изображенное на Рис. 5. Зададим списки допустимых цветов вершин следующим образом: $S(u_i) = M_i$, $S(v_i) = N_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а $S(w) = \{m+q\}$.

Очевидно, что списочная $L(p_1, 1, 1, \ldots, 1)$-раскраска этого дерева существует тогда и только тогда, когда из набора пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \dots, (M_n, N_n)$ можно выбрать систему пар q-удаленных представителей.

У дерева T $2n+1$ вершина, а максимальный числовой параметр равен $m+q$. Так как $m \leq 3qn$, то из этого сразу следует, что описанное построение может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. Поскольку максимальный числовой параметр равен $m+q$, то выполнено неравенство: $m+q \leq 3qn+q \leq 2q(2n+1)$. Таким образом, ограничение на величины числовых параметров выполнены.

Доказательство в случае $r \geq 4$ совершенно аналогично доказательству для $r = 3$. Единственное отличие состоит в том, что следует использовать задачу SP-1, а не задачу SP-2.

Теорема доказана.

3.3 Списочная радиораскраска путей.

В заключительной части работы будет доказана NP-полнота задачи о существовании списочной радиораскраски.

Заметим сразу, что для деревьев с диаметром, не превосходящим четырех, списочная $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$-раскраска при $p_1 \geq 2$, $p_2 = p_3 = \dots = p_r = 1$ для $r \geq 4$ является списочной p_1-радиораскраской. Поэтому из теоремы 6 сразу вытекает следующее утверждение.

Теорема 7. *Задача о существовании списочной $L(p)$-радиораскраски графов NP-полна в сильном смысле для деревьев с диаметром, не превосходящим четырех, для любого заданного $p \geq 2$.*

Докажем, что задача является NP-полной даже для путей.

Теорема 8. *Задача о существовании списочной $L(p)$-радиораскраски графов NP-полна в сильном смысле для путей при любом заданном $p \geq 2$.*[1]

Доказательство. Покажем, как задача о существовании системы пар q-удаленных представителей сводится к данной.

Рассмотрим ограниченную версию задачи SP-1 с параметром $q = p$ и $m \leq 3qn$. Сведем эту задачу к задаче о существовании списочной $L(p)$-радиораскраски путей такой, что значение максимального числового параметра не превосходит $2pl$, где l – число вершин пути.

Рассмотрим путь P с вершинами $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1}, u_n, v_n$ (вершины указаны в том порядке, в каком они

[1] На данный результат автору было указано Г.Вёгингером (G.Woeginger)

следуют в P). Зададим списки допустимых цветов вершин следующим образом: $S(u_i) = M_i$, $S(v_i) = N_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а $S(w_i) = \{m+q\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Легко видеть, что данный путь имеет $3n-1$ вершину, а максимальный числовой параметр не превосходит m. Остается заметить, что $m \leq 3qn$. Ясно, что такое построение может быть выполнено с помощью полиномиального алгоритма, и требуемое ограничение на величину максимального числового параметра выполнено.

Теорема доказана.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Г. Вегингеру и Ф. В. Фомину за помощь в работе над данной статьей.

Литература

1. М. Гэри, Д. Джонсон, — Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., Мир (1982).
2. R. Battiti, A. A. Bertossi and M. A. Bonuccelli, — Assigning codes in wireless network: Bounds and scaling properties. Wireless Networks 5, 3, (1999), pp. 195-209.
3. H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan and J. Leeuwen, *Approximation for λ-coloring of Graphs.* — LNCS, **1770**, (2000), 395–409.
4. G. J. Chang and D. Kuo, *The $L(2,1)$-labeling problem on graphs.* — SIAM J. Disk. Math., **9** (1996), 309–316.
5. J. Fiala, J. Kratochvil and A. Proskurowski, *Distance constrained labeling of precoloring trees.* — ICTCS (2001), 285–292.
6. J. Fiala, T. Kloks and J. Kratochvil, *Fixed-parameter complexity of λ-coloring.* — In: Graph Theoretic Concepts in Computer Science, WG'99, LNCS 1665 (1999), 350–363.
7. D. Fotakis, G. Pantziou, G. Pentaris and P. Spirakis, *Frequency assignment in mobile and radio networks.* — In: Networks in distributed computing, DIMACS workshop, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **45** (1997), 73–90.
8. J. P. Georges and D. W. Mauro, *On the size of gtaphs labeled with a condition at distance two.* — J. Graph Theory, **22** (1996), 47–57.
9. J. R. Griggs and R. K. Yeh, *Labelling graphs with a condition at distance 2.* — SIAM J. Disk. Math., **5** (1992), 586–595.
10. R. A. Murphey, P. M. Pardalos and M. G. Resende, — Frequency assignment problems. AT&T Labs Research Technical Report: 98.16.1.
11. D. D.-F. Liu and R. K. Yeh, *On distance two labelling of graphs.* — ARS Combinatorica, **47** (1997), 13–22.

Golovach P. A. Systems of pair of q-distant representatives and graph colorings.

NP-completeness of a number of graph coloring problems connected with the frequency assignment problem is proved. For this purpose we introduce problems concerning systems of pairs of q-distant representatives (related to the well known problem about the system of distinct representatives, but being NP-complete for $q \geq 2$), which turned out to be convenient for proving NP-completeness of various graph coloring problems.

Государственный университет
кафедра прикладной математики
Сыктывкар

E-mail: golovach@ssu.komi.com

Поступило 12 декабря 2002 г.