Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

Я. И. Белопольская[*], В. Э. Волькович, Л. Б. Клебанов[†]

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Постановка задачи. Конечномерный случай

В этой работе мы рассмотрим эллиптические распределения в пространстве R^d и покажем, что они могут быть охарактеризованы как экстремальные для некоторых вероятностных метрик. Мы обобщим также полученные результаты на случай бесконечномерного гильбертова пространства.

Рассмотрим случайный вектор $X \in R^d$.

Определение 1.1. *Скажем, что X имеет эллиптическое распределение (с параметрами U и C) с центром в начале координат, если существуют ортогональная матрица U и невырожденная диагональная матрица C такая, что для любой ортогональной матрицы A распределение $Y = UX$ инвариантно относительно группы, порожденной $C^{-1}AC$.*

Обозначим $Q = (C^{-1}U)$, $B = Q^TQ$ и $D = Q^{-1}AQ$ (здесь T- знак транспонирования) и введем в R^d скалярное произведение

$$(x, y)_B = x^TBy, \quad x, y \in R^d. \tag{1.1}$$

Наша цель – доказать следующий факт:

Пусть X и X' – независимые одинаково распределенные случайные векторы. Допустим, что U, A, B, C, D – матрицы, определенные выше. Предположим, что группа, порожденная матрицей A совпадает с группой всех $d \times d$ ортогональных матриц. Тогда

$$\mathbb{E}\|X - DX'\|_B^r \geq \mathbb{E}\|UX - UX'\|_B^r,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда X имеет эллиптическое распределение с параметрами U и C. Здесь $r \in (0, 2)$ – фиксированное число.

[*]Работа была поддержана DFG Project 436 RUS 113/593/ и INTAS 99-00559.
[†]Работа была поддержана DFG Project 436 RUS 113/593/, INTAS 99-00559, и Cz Grant MSM 113200008.

Мы обобщим это утверждение и докажем его для вероятностных мер, заданных на сепарабельном гильбертовом пространстве.

2. Отрицательно определенные ядра и расстояния, порожденные ими

Напомним сначала определение отрицательно определенного ядра.

Определение 2.1. *Пусть* $\mathcal{X}$ – *некоторое множество, а* $\mathcal{L}(x,y)$ – *комплекснозначная функция, определенная на* $\mathcal{X}^2$. $\mathcal{L}(x,y)$ *называется отрицательно определенным ядром, если неравенство*

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\mathcal{L}(x_s,x_t)h_s\overline{h_t}\le 0 \tag{2.1}$$

выполнено для любых целых $n\ge 1$, *любых точек* $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{X}$ *и любых комплексных чисел* $h_1,\cdots,h_n$, *удовлетворяющих условию* $\sum_{j=1}^{n}h_j=0$.

Определение 2.2. *Ядро* $\mathcal{L}(x,y)$ *называется строго отрицательно определенным, если равенство в* (2.2) *достигается тогда и только тогда, когда* $h_j=0$ *для всех* $j=1,\dots,n$.

Если $\mathcal{L}(x,y)$ принимает вещественные значения и для любых $x,y\in\mathcal{X}$

$$\mathcal{L}(x,y)=\mathcal{L}(y,x), \tag{2.2}$$

то в (2.1) достаточно выбрать только вещественные h_j.

Далее мы предполагаем, что $\mathcal{X}$ – метрическое пространство с метрикой $\mathbf{d}$. Обозначим $\mathcal{A}$ σ-алгебру всех борелевских подмножеств $\mathcal{X}$. Говоря далее об отрицательно определенных ядрах, мы всегда будем предполагать, что они непрерывны и принимают вещественные значения.

Напомним теперь некоторые результаты о расстояниях, порожденных отрицательно определенными ядрами.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathcal{L}(x,y)$ – *вещественная непрерывная функция, заданная на* $\mathcal{X}^2$ *и удовлетворяющая* (2.2). *Неравенство*

$$2\mathbb{E}\mathcal{L}(X,Y)-\mathbb{E}\mathcal{L}(X,X')-\mathbb{E}\mathcal{L}(Y,Y')\ge 0 \tag{2.3}$$

имеет место для всех независимых в совокупности случайных величин X, X', Y, Y' со значениями в $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} X', \qquad E\mathcal{L}(X, X') < \infty, \\ Y &\stackrel{d}{=} Y', \qquad E\mathcal{L}(Y, Y') < \infty, \end{aligned} \tag{2.4}$$

тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ представляет собой отрицательно определенное ядро.

Доказательствобыло получено в [2]. Мы приведем его здесь для того, чтобы показать связь с другими неравенствами.

Определение отрицательно определенного ядра, удовлетворяющего (2.2), может быть переписано в эквивалентном виде

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x, y) h(x) h(y) dQ(x) dQ(y) \leq 0 \tag{2.5}$$

для любой вероятностной меры Q на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ и любой интегрируемой функции $h(x)$, для которой $\int_{\mathcal{X}} h(x) dQ(x) = 0$.

Пусть μ и ν – две меры, заданные на $\mathcal{A}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mathbb{P}\{X \in A\}, \qquad A \in \mathcal{A}, \\ \nu(A) &= \mathbb{P}\{Y \in A\}, \qquad A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Тогда (2.3) может быть записано в виде

$$2 \int\limits_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x, y) d\mu(x) d\nu(y) - \int\limits_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x, y) d\mu(x) d\mu(y) - \int\limits_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \geq 0.$$

Пусть Q_1 – произвольная вероятностная мера на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, доминирующая μ и ν,

$$h_1(x) = \frac{d\mu}{dQ_1}, \qquad h_2(x) = \frac{d\nu}{dQ_1},$$

и $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$.

Тогда предыдущее неравенство может быть переписано в виде

$$\int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x,y)h(x)h(y)dQ_1(x)dQ_1(y) \le 0, \tag{2.6}$$

при условии, что

$$\int\limits_{\mathcal{X}} h(x)dQ_1(x) = 0. \tag{2.7}$$

Так как X и Y произвольны, то мера Q_1 и функция h, удовлетворяющая (2.7), также могут быть выбраны произвольно.

Теперь ясно, что (2.6) и (2.5) эквивалентны. Теорема доказана. $\bullet$

Определение 2.3. *Пусть Q – вероятностная мера на $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ и $h(x)$- функция, интегрируемая по мере Q такая, что $\int_{\mathcal{X}} h(x)dQ(x) = 0$. Скажем, что $\mathcal{L}$ – сильно отрицательно определенное ядро, если $\mathcal{L}$ является отрицательно определенным ядром и равенство*

$$\int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x,y)h(x)h(y)dQ(x)dQ(y) = 0 \tag{2.8}$$

влечет равенство $h(x) = 0$ Q-почти всюду, независимо от выбора меры Q.

Теорема 2.2 (смотри [2]). *Пусть $\mathcal{L}(x,y)$ – вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая (2.2). Неравенство (2.3) имеет место для всех независимых в совокупности случайных величин X, X', Y, Y', удовлетворяющих (2.4), причем достижение равенства эквивалентно условию $X \overset{d}{=} Y$, тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{L}$ является сильно отрицательно определенным ядром.*

Доказательство очевидно, так как (2.3) и (2.6) эквивалентны. $\bullet$

Пусть $\mathcal{X} = R^d$, $\mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}(x-y)$– вещественная функция и $L(z) = \mathcal{L}(x-y)$, если $z = x-y, \quad (x,y,z \in R^d)$. Будем говорить, что $L(z)$ - отрицательно (строго, сильно отрицательно) определенная функция, если $\mathcal{L}(x-y)$ является отрицательно (строго, сильно отрицательно) определенным ядром.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{X} = R^1$. Известно (смотри [1]), что непрерывная четная функция $L(z)$, удовлетворяющая условию $L(0) = 0$, является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда

$$L(z) = \int\limits_0^\infty (1-\cos(zx))(1+x^2)/x^2 d\theta(x), \tag{2.9}$$

где $\theta(x)$ – вещественная неубывающая функция, $\theta(-0)=0$. Для функции (2.9) имеем

$$\begin{aligned} &2EL(X-Y) - EL(X-X') - EL(Y-Y') \\ &\quad = \int\limits_0^\infty |f_1(t)-f_2(t)|^2 (1+t^2)/t^2 d\theta(t)\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где f_1, f_2 – характеристические функции случайных величин X, Y, соответственно. Поэтому функция L, заданная соотношением (2.9), является сильно отрицательно определенной тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}\theta = [0,\infty)$. В частности, $|z|^r$ является отрицательно определенной функцией для $r \in [0,2]$ и сильно отрицательно определенной функцией для $r \in (0,2)$.

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{X}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Допустим, что $f(t)$ – вещественная характеристическая функция безгранично делимой меры на $\mathcal{X}$. Тогда $L(t) = -\log f(t)$ – отрицательно определенная функция на $\mathcal{X}$ (т.е., $\mathcal{L}(x-y), x, y \in \mathcal{X}$ – отрицательно определенное ядро). Мы знаем, что

$$L(t) = \frac{1}{2}(Bt,t) - \int\limits_{\mathcal{X}} (e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t,x)}{1+\|x\|^2}) \frac{1+\|x\|^2}{\|x\|^2} d\theta(x)\,,$$

где B – ядерный оператор и θ – конечная мера на $\mathcal{X}$ такая, что $\theta(\{0\}) = 0$. Ясно, что, если $\operatorname{supp}\theta = \mathcal{X}$, то L – сильно отрицательно определенная функция на $\mathcal{X}$.

Пример 2.3. Пусть $L(z)$ – функция выживаемости на R^1 (т.е., $1-L(z)$ – функция распределения). Тогда $\mathcal{L}(x \bigwedge y)$ – отрицательно определенное ядро (здесь $\bigwedge$ знак минимума). Введем в рассмотрение функцию

$$g_a(z) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad z \le a, \\ 1 & \text{для} \quad z > a\,. \end{cases}$$

Тогда для всех $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ мы получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_a(x_i \wedge x_j)h_i h_j = \sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n} h_i h_j = \Big(\sum_{i=k}^{n} h_i\Big)^2 \geq 0,$$

где k определяется условиями $x_k > a,\ x_{k-1} \leq a$. Требуемое утверждение следует теперь из очевидного равенства

$$L(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - g_a(z))d\sigma(a),$$

где σ – подходящая функция распределения.

Очевидно, что $\mathcal{L}(x \bigwedge y)$ представляет собой сильно отрицательно определенное ядро тогда и только тогда, когда σ строго возрастает.

Предположим снова, что $\mathcal{X}$ – метрическое пространство с метрикой $\mathbf{d}$, а $\mathcal{A}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathcal{X}$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех борелевских вероятностных мер на $(X, \mathcal{A})$, а через $\mathcal{P}(\mathcal{L})$- множество всех мер μ из $\mathcal{P}$, для которых конечна величина $\int_\mathcal{X}\int_\mathcal{X} \mathcal{L}(x,y)d\mu(x)d\mu(y)$. При заданном $\mu, \nu \in \mathcal{B}(\varphi)$ положим

$$N(\mu,\nu) = 2\int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x,y)d\mu(x)d\nu(y) - \int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x,y)d\mu(x)d\mu(y)$$

$$-\int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x,y)d\nu(x)d\nu(y) = -\int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x,y)dR(x)dR(y), \qquad (2.11)$$

где $R(x) = \mu(x) - \nu(x)$.

Легко видеть, что $N(\mu,\nu)$ представляет собой сильно отрицательно определенное ядро на $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(x,y)$ является сильно отрицательно определенным ядром на $\mathcal{X}^2$.

Мы ограничимся непрерывными вещественными функциями $\mathcal{L}(x,y)$ удовлетворяющими $\mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}(y,x)$ и $\mathcal{L}(x,x) = 0$. В этом случае $N(\mu,\nu) = N(\nu,\mu)$, $N(\mu,\mu) = 0$ для всех $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$. Если к тому же, $\mathcal{L}$ является сильно отрицательно определенным ядром на $\mathcal{X}^2$, то, как легко видеть, $N(\mu,\nu) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = \nu$. Мы легко можем проверить, что для всех $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ выполняется:

$$N^{1/2}(\mu_1, \mu_2) \leq N^{1/2}(\mu_1, \mu_3) + N^{1/2}(\mu_3, \mu_2).$$

Таким образом, $N^{1/2}(\mu, \nu)$ является метрикой на $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

В соответствии с известной теоремой Шенберга (Schoenberg 1938), метрическое пространство $(\mathcal{X}, \mathbf{d})$ изометрично некоторому подмножеству гильбертова пространства H тогда и только тогда, когда $\mathbf{d}^2(x, y)$ - отрицательно определенное ядро на $\mathcal{X}^2$. Предположим, что $\mathbf{d}^2(x, y) = \mathcal{L}(x, y)$, где $\mathcal{L}$ – сильно отрицательно определенное ядро на $\mathcal{X}^2$. Выше уже было отмечено, что в этом случае $N(\mu, \nu)$ является строго отрицательно определенным ядром на $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$ и, в соответствии с теоремой Шенберга, метрическое пространство $(\mathcal{P}(\mathcal{L}), N^{\frac{1}{2}})$ изометрично некоторому подмножеству H. Мы можем отождествить $\mathcal{X}$ с некоторым подмножеством $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, сопоставив точке из $\mathcal{X}$ меру, сосредоточенную в этой точке. Легко видеть, что при такой изометрии образ $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$ множества $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ является выпуклым подмножеством H. Каждая точка этого образа $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$ является центром тяжести множества точек из X. Таким образом, расстояние $N^{\frac{1}{2}}$ между мерами может быть интерпретировано как расстояние между соответствующими центрами тяжести в гильбертовом пространстве H.

Легко видеть, что обратное также верно. Именно, пусть $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$ выпуклое подмножество гильбертова пространства H, $I : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \to \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{L})$ – изометрия, сохраняющая расстояние на $\mathcal{X}$, такая, что расстояние между мерами совпадает с расстоянием между соответствующими центрами тяжести в H. Тогда $\mathcal{L}(x, y) = \mathbf{d}^2(x, y)$ – сильно отрицательно определенное ядро на $\mathcal{X}^2$ и $N(\mu, \nu)$ вычисляется по формуле (2.11).

Отметим, что если функция $\mathcal{L}$ в (2.11) ограничена, то $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \mathcal{P}$ и $N(\mu, \nu)$ определено для всех борелевских вероятностных мер μ и ν. В этом случае, $N^{\frac{1}{2}}$ является слабой метрикой на $\mathcal{P}$.

Метрики $N^{1/2}$ для примеров 2.2 и 2.3 имеют следующий вид. В примере 2.2

$$N(\mu, \nu) = c \int\limits_{\mathcal{X}} |f_\mu(t) - f_\nu(t)|^2 \frac{1 + ||t||^2}{||t||^2} d\theta(t),$$

где c – постоянная, а f_μ, f_ν – характеристические функции мер μ и ν.

В примере 2.3

$$N(\mu,\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_\mu(a) - F_\nu(a))^2 d\theta(a),$$

где F_μ, F_ν – функции распределения, соответствующие μ и ν.

3. Эллиптические распределения в R^d

Теперь мы можем доказать некоторые результаты об эллиптических распределениях. Мы будем говорить, что матрица D удовлетворяет условию $\mathbf{U}$, если она имеет вид $D = Q^{-1}AQ$, где $Q = (C^{-1}U)$, C -невырожденная диагональная матрица, а U, A - ортогональные матрицы, причем группа, порожденная A, совпадает с группой всех $d \times d$ ортогональных матриц.

Теорема 3.1. *Пусть матрица D удовлетворяет условию $\mathbf{U}$. Предположим, кроме того, что $\mathcal{L}$ - сильно отрицательно определенное ядро, инвариантное относительно преобразований вида $z \to Dz$, $z \in R^d$. Тогда для независимых одинаково распределенных векторов X анд X'*

$$\mathbb{E}\mathcal{L}(X - DX') \geq \mathbb{E}\mathcal{L}(X - X')$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда X имеет эллиптическое распределение с параметрами U и C.

Доказательство. Достаточно применить теорему 2.2. •

Следствие 3.1. *Пусть матрица D удовлетворяет условию $\mathbf{U}$. Тогда для любого фиксированного $r \in (0,2)$ и независимых одинаково распределенных векторов X и X' справедливо неравенство*

$$\mathbb{E}\|X - DX'\|_B^r \geq \mathbb{E}\|X - X'\|_B^r, \tag{3.1}$$

где $B = Q^TQ$ и $\|x\|_B^2 = (x, Bx)$. При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда X имеет эллиптическое распределение с параметрами U и C.

Для доказательства достаточно заметить, что функция $L(z) = \|z\|_B^r$ сильно отрицательно определена при $r \in (0,2)$ и инвариантна относительно преобразований $z \to Dz$, $z \in R^d$, после чего можно воспользоваться Теоремой 3.1. •

Следствие 3.2. *Пусть матрица D удовлетворяет условию* $\mathbf{U}$, *а $g(t)$ – вещественная характеристическая функция эллиптического распределения с параметрами U и C, причем носитель этого распределения совпадает с R^d. Тогда*

$$\mathbb{E}g(X - DX') \leq \mathbb{E}g(X - X'),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда X имеет эллиптическое распределение с параметрами U и C.

4. Обобщение на гильбертово пространство

Теперь мы дадим обобщение результата Следствия 3.1 на случай сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

Рассмотрим случайный вектор X пространства $\mathcal{H}$.

Определение 4.1. *Мы будем говорить, что X имеет $\mathcal{H}$-эллиптическое распределение (с параметром $\mathcal{C}$), если существует ортонормированный базис $\{e_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ в $\mathcal{H}$ и ядерный оператор $\mathcal{C}$, имеющий диагональный вид в этом базисе и такой, что для любого ортогонального оператора A_d, действующего в пространстве $\mathcal{R}^d$ натянутом на $\{e_j,\ j = 1, \ldots, d\}$ и продолженного нулем на $\mathcal{H} \ominus \mathcal{R}^d$, распределение X инвариантно относительно группы, порожденной всеми операторами $\mathcal{D}_d = \mathcal{C}^{-1} A_d \mathcal{C}$, $d = 1, 2, \ldots$.*

Пусть $\mathcal{C}$ – оператор из Определения 4.1. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{C}^2$ и $\|x\|_{\mathcal{B}} = (x, \mathcal{B}x)$ – норма в $\mathcal{H}$. Обозначим $\mathcal{A} = \{A_d,\ d = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность операторов в $\mathcal{H}$ такая, что сужения A_d на $\mathcal{R}^d$ порождают группу всех ортогональных операторов в $\mathcal{R}^d$, если считать, что на $\mathcal{H} \ominus \mathcal{R}^d$ A_d действует как нулевой оператор.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{C}$ – ядерный оператор в $\mathcal{H}$, имеющий диагональный вид в базисе $\{e_j, j = 1, 2, \ldots\}$. Предположим, что X, X' – независимые одинаково распределенные векторы в $\mathcal{H}$ и $A_d \in \mathcal{A}$. Тогда для $\mathcal{D}_d = \mathcal{C}^{-1} A_d \mathcal{C}$ и фиксированного $r \in (0, 2)$ имеет место оценка*

$$\sup_d \mathbb{E}\|X - \mathcal{D}_d X'\|^r_{\mathcal{B}} \geq \mathbb{E}\|X - X'\|^r_{\mathcal{B}}. \tag{4.1}$$

Равенство в (4.1) достигается тогда и только тогда, когда X имеет $\mathcal{H}$-эллиптическое распределение с параметром $\mathcal{C}$.

Доказательство. Результат может быть получен из Теоремы 2.2.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов*. Гос. Изд.-во физ.-мат. лит., Москва (1961).
2. А. А. Зингер, А. В. Какосян , Л. Б. Клебанов, *Характеризации распределений средними значениями статистик в связи с некоторыми вероятностными метриками.* — Проблемы устойчивости стохастических моделей, Москва, ВНИИСИ (1989), 47–55.

Belopolskaya Ya., Volkovich V., Klebanov L. B. Characterization of Elliptic Distributions.

A characterization of elliptic distributions in $\mathbb{R}^d$ by an extremal property for a class of probability distances is obtained. The generalization for the case of Hilbert spaces is given.

С.Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет
Колледж Брауде, Кармиель
Пражский Карлов Университет и
С.Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет

Поступило 26 ноября 2002 г.