Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

**А. Н. Бородин**

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ОСТАНОВЛЕННОГО В МОМЕНТ, ОБРАТНЫЙ К ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ ВРЕМЕН

**1. Введение.** В работе рассматриваются методы вычислений распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент обратный к линейной комбинации локальных времен. Для случая, когда все коэффициенты в линейной комбинации одного знака, задача о распределении функционалов рассматривалась в работе [1]. Существенная особенность в вычислении распределений возникает при коэффициентах с разными знаками, поскольку при этом линейная комбинация уже не будет монотонной функцией времени.

Локальным временем процесса броуновского движения $W(s)$ называется предел

$$\ell(t,y)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{I}_{[y,y+\varepsilon)}(W(s))ds,$$

где $\mathbb{I}_E(\cdot)$ – индикатор борелевского множества $E$ из $\mathbb{R}^1$. Процесс $\ell(t,y)$ при каждом $y$ характеризует долю времени, которую процесс $W(s)$ проводит в точке $y$ до момента $t$. Понятие броуновского локального времени ввел П. Леви [2]. Существует непрерывное по $(t,y)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^1$ локальное время.

Локальное время обладает следующим свойством. Для процесса, выходящего из точки $y$, с вероятностью единица выполняется равенство $\ell(s,y)>0$ для любого $s>0$. Очевидно, что процесс $\ell(t,y)$ не убывает по переменной $t$. Процесс

$$\eta(t)=\sum_{j=1}^k\alpha_j\ell(t,r_j),$$

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ No. 02-01-00265, No. 00-15-96019, РФФИ–НИИО No. 99-01-04027.

являющийся линейной комбинацией локальных времен на разных уровнях, когда коэффициенты $\alpha_j$ имеют разные знаки, уже не будет монотонным. Положим $\rho(t) = \min\{s : \eta(s) > t\}$. В работе предлагается метод, позволяющий вычислять распределения аддитивных функционалов от процесса $W(s)$ вида

$$A(t) = \int_0^t f(W(s))ds + \sum_{j=1}^k \beta_j \ell(t, r_j), \quad \beta_j \geqslant 0,$$

когда вместо $t$ берется случайный момент $\rho(t)$.

Задачу вычисления распределений функционалов для момента $\rho(t)$ для фиксированного $t$ можно, с помощью преобразования Лапласа по $t$, свести к аналогичной задаче для момента $\rho(\tau)$, где $\tau$ – случайная величина, которая не зависит от процесса $W(s)$ и имеет экспоненциальное распределение $\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ с параметром $\lambda > 0$. Рассмотрение случайной величины $\tau$ значительно упрощает задачу вычисления распределений функционалов, поскольку для $\tau$ решение, как правило, связано с дифференциальными задачами, содержащими обыкновенные дифференциальные уравнения вместо уравнений с частными производными. Вернуться к фиксированному $t$ можно с помощью обратного преобразования Лапласа по параметру $\lambda$.

Для любой случайной величины $\xi$ и произвольного события $Q$ обозначение $\mathbf{E}\{\xi; Q\}$ служит удобной записью для $\mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_Q\}$. Будем обозначать $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу при условии, что он начинается в точке $x$.

**2. Момент, обратный к линейной комбинации локальных времен на нескольких уровнях.** Следующий результат позволяет вычислять распределения аддитивных функционалов от процесса броуновского движения.

В дальнейшем под кусочно-непрерывными функциями подразумеваются функции, которые имеют лишь конечное число точек разрыва, и в точках разрыва существуют левосторонние и правосторонние пределы.

**Теорема 2.1.** *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – кусочно-непрерывная неотрицательная функция, и $\lambda \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ при $j = 1, \ldots, k$. Тогда функция*

$$M(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big( - \int_0^{\rho(\tau)} f(W(s))ds - \sum_{j=1}^k \beta_j \ell(\rho(\tau), r_j)\Big) \tag{2.1}$$

*является непрерывным ограниченным решением задачи*

$$\frac{1}{2}M''(x) - f(x)M(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_k\}, \tag{2.2}$$

$$M'(r_j + 0) - M'(r_j - 0) =$$
$$= 2(\lambda\alpha_j + \beta_j)M(r_j) - 2\lambda\alpha_j M_0(r_j), \quad j = 1, \dots, k, \tag{2.3}$$

*где*

$$M_0(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big( - \int\limits_0^{\rho(0)} f(W(s))ds - \sum_{j=1}^k \beta_j \ell(\rho(0), r_j)\Big).$$

**Замечание 2.1.** Для кусочно-непрерывной функции $f$ уравнение (2.2) должно трактоваться следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функции $f$, а в точках разрыва функции $f$ его решение непрерывно вместе с первой производной.

**Замечание 2.2.** При $\alpha_j > 0$ выполняется равенство $M_0(r_j) = 1$, поскольку, как уже отмечалось, если броуновское движение начинается на уровне $r_j$, то с вероятностью единица $\ell(s, r_j) > 0$ для любого $s > 0$. На других уровнях, пока они не будут достигнуты, локальное время остается равным нулю. В результате линейная комбинация сразу превысит ноль и значит $\rho(0) = 0$, а это, в свою очередь, влечет равенство $M_0(r_j) = 1$. Если же $\alpha_j < 0$, то значение $M_0(r_j)$ заведомо неизвестно, однако в определенных случаях однозначно вычисляется из решения задачи (2.2), (2.3) с учетом вида функции $M(x)$.

**Замечание 2.3.** Если все коэффициенты $\alpha_j$ неотрицательны, то теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.2 из [1].

**Доказательство теоремы 2.1.** Предположим сначала, что $f(x)$ – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными. Пусть $g(x)$ – произвольная финитная функция такая, что $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, $g(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$, $g(0) = 1$. При $\varepsilon > 0$ полагаем

$$g_j^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\big(\frac{x - r_j}{\varepsilon}\big), \quad G_j^\varepsilon(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g_j^\varepsilon(u)du, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\eta_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t g\big(\frac{W(s) - r_j}{\varepsilon}\big)ds = \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\big(\frac{x - r_j}{\varepsilon}\big)\ell(t, x)dx. \tag{2.4}$$

Процесс $\xi_\varepsilon(t) = (W(t), y + \eta_\varepsilon(t))$ является диффузионным процессом с производящим оператором

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j g_j^\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.5}$$

и начальным условием $\xi_\varepsilon(0) = (x, y)$, где предполагается, что $W(0) = x$. При $y \leqslant 0$ рассмотрим процесс $\xi_\varepsilon(t)$ до момента первого выхода из области $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$. Обозначим этот момент $H_\varepsilon(-y)$. Положим

$$U_\varepsilon(x, y) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_0^{H_\varepsilon(-y)} f(W(s))ds - \sum_{j=1}^{k}\beta_j \int\limits_0^{H_\varepsilon(-y)} g_j^\varepsilon(W(s))ds\Big).$$

Очевидно, что $U_\varepsilon(x, y)$ является ограниченной функцией. Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ под знаком математического ожидания влечет

$$U_\varepsilon(x, y) \to U(x, y), \tag{2.6}$$

где

$$U(x, y) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_0^{\rho(-y)} f(W(s))ds - \sum_{j=1}^{k}\beta_j \ell(\rho(-y), r_j)\Big).$$

Из общей теории диффузионных процессов вытекает следующий результат (см., например, [3], гл. 13, §4). Функция $U_\varepsilon(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_\varepsilon(x, y) + \sum_{j=1}^{k}\alpha_j g_j^\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial y}U_\varepsilon(x, y) - \big(f(x) + \sum_{j=1}^{k}\beta_j g_j^\varepsilon(x)\big)U_\varepsilon(x, y) = 0, \tag{2.7}$$

и очевидным граничным условиям $U_\varepsilon(r_j, 0) = 1$ при $\alpha_j > 0$.

Возьмем преобразование Лапласа от функции $U_\varepsilon(x, y)$ по переменной $y$:

$$M_\varepsilon(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda y} U_\varepsilon(x, y)dy, \qquad \lambda > 0.$$

Проинтегрировав функцию $U_\varepsilon(x,y)$ под знаком математического ожидания, несложно получить, что

$$M_\varepsilon(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big( - \int_0^{H_\varepsilon(\tau)} f(W(s))ds - \sum_{j=1}^k \beta_j \int_0^{H_\varepsilon(\tau)} g_j^\varepsilon(W(s))ds\Big).$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} \frac{\partial}{\partial y} U_\varepsilon(x,y)dy = U_\varepsilon(x,0) - M_\varepsilon(x),$$

то, проинтегрировав равенство (2.7) по $y$ из интервала $(-\infty,0)$ с весом $\lambda e^{\lambda y}$, получим, что функция $M_\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}M_\varepsilon''(x) + \sum_{j=1}^k \lambda\alpha_j g_j^\varepsilon(x) U_\varepsilon(x,0) - \big(f(x) + \sum_{j=1}^k (\lambda\alpha_j + \beta_j) g_j^\varepsilon(x)\big) M_\varepsilon(x) = 0. \tag{2.8}$$

Используя непрерывность локального времени и (2.4), несложно убедиться, что при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t g\big(\frac{W(s)-r_j}{\varepsilon}\big)ds \to \sum_{j=1}^k \alpha_j \ell(t, r_j) = \eta(t)$$

равномерно по $t$ из любого конечного интервала. Как следствие $H_\varepsilon(t) \to \rho(t)$. Переходя под знаком математического ожидания в выражении для функции $M_\varepsilon(x)$ к пределу, получим, что для любого $x$ при $\varepsilon \to 0$

$$M_\varepsilon(x) \to M(x). \tag{2.9}$$

Проинтегрировав (2.8), найдем:

$$\frac{1}{2}\big(M_\varepsilon'(b) - M_\varepsilon'(a)\big) + \sum_{j=1}^k \lambda\alpha_j \int_a^b U_\varepsilon(x,0)dG_j^\varepsilon(x) - \int_a^b f(x)M_\varepsilon(x)dx -$$

$$- \sum_{j=1}^k (\lambda\alpha_j + \beta_j) \int_a^b M_\varepsilon(x) dG_j^\varepsilon(x) = 0. \tag{2.10}$$

Очевидно, что $G_j^\varepsilon(x) \to G_j(x) = \mathbb{I}_{[r_j,\infty)}(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как функция $G_j^\varepsilon(x)$ растет лишь в $\varepsilon$-окрестностях точек $r_j$, то для любого компакта $K \subset \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_k\}$ можно так выбрать $\varepsilon$, что $K \subset \mathbb{R} \setminus (\cup_{j=1}^k (r_j - \varepsilon, r_j + \varepsilon))$. Пусть $(a, b) \subset K, (a, c) \subset K$. Тогда (2.10) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\big(M'_\varepsilon(b) - M'_\varepsilon(a)\big) - \int\limits_a^b f(x)M_\varepsilon(x)dx = 0. \tag{2.11}$$

Проинтегрировав это соотношение по $b$ из интервала $(a, c)$, получим

$$\frac{1}{2}(M_\varepsilon(c) - M_\varepsilon(a) - (c-a)M'_\varepsilon(a)) - \int\limits_a^c \int\limits_a^b f(x)M_\varepsilon(x)dxdb = 0. \tag{2.12}$$

Так как $|M_\varepsilon| \leqslant 1$, то из (2.11), (2.12) следует, что функции $M'_\varepsilon(x)$ будут равностепенно-непрерывны и равномерно ограничены на компакте $K$. Отсюда и из (2.9) получаем, что для $x \in K$ существует $M'(x)$ и

$$\sup_{x\in K}\Big|M'_\varepsilon(x) - M'(x)\Big| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.13}$$

Проинтегрировав (2.10) по $b$ по произвольному интервалу, можно получить, что семейство функций $\{M_\varepsilon(x)\}$ равностепенно-непрерывно на любом замкнутом интервале из $\mathbb{R}$. Таким образом, (2.9) выполняется равномерно по $x$ из любого замкнутого интервала из $\mathbb{R}$, и, следовательно, $M(x)$ непрерывна.

Применяя (2.6), (2.9) и (2.13), можно в (2.10) перейти к пределу, что при $a, b \neq r_1, \dots r_k$, дает

$$\frac{1}{2}\big(M'(b) - M'(a)\big) + \sum_{j=1}^k \lambda\alpha_j \int\limits_a^b U(x,0)dG_j(x) - \int\limits_a^b f(x)M(x)dx -$$

$$- \sum_{j=1}^k (\lambda\alpha_j + \beta_j) \int\limits_a^b M(x)dG_j(x) = 0. \tag{2.14}$$

Это, в свою очередь, влечет (2.2), (2.3), поскольку $U(x, 0) = M_0(x)$.

В окончательном варианте теорема 2.1 для кусочно-непрерывных функций $f$ может быть доказана с помощью аппроксимации $f$ непрерывными функциями. Подробно аналогичный предельный переход осуществлен при доказательстве теоремы 2.2 гл. II из [4]. Отличие здесь будет состоять лишь в том, что равностепенную непрерывность производных $M_n'(x)$ нужно будет устанавливать лишь на компактах $K$, не содержащих точки $r_1, \dots, r_k$.

**3. Момент, обратный к линейной комбинации локальных времен на двух уровнях.** Дадим решение задачи (2.2), (2.3) в терминах фундаментальных решений однородного уравнения (2.2) для случая двух уровней $r_1 = r$ и $r_2 = u$. Для этого положим в теореме 2.1 $\alpha_j = 0, j = 3, \dots, k$.

Можно, не умаляя общности, считать $\alpha_2 = 1$, а $\alpha_1 = -\alpha^{-1}$, где $\alpha > 0$. Кроме того, для простоты изложения положим $\beta_j = 0, j = 1, \dots, k$, $r_1 = r$ и $r_2 = u$.

Пусть функция $Q_z(x)$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}Q''(x) - f(x)Q(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{z\}, \tag{3.1}$$

$$Q'(z+0) - Q'(z-0) = -2. \tag{3.2}$$

Решение этой задачи можно выразить в терминах $\varphi(x)$ – убывающего и $\psi(x)$ – возрастающего линейно независимых решений однородного уравнения (3.1). Несложно убедиться, что

$$Q_z(x) = \frac{2}{\Delta}\psi((z + x - |z - x|)/2)\varphi((z + x + |z - x|)/2), \tag{3.3}$$

где $\Delta = \psi'(z)\varphi(z) - \psi(z)\varphi'(z)$ – вронскиан.

Применим теорему 2.1. В рассматриваемом случае $\eta(t) = \ell(t, u) - \alpha^{-1}\ell(t, r)$, $\rho(t) = \min\{s : \ell(s, u) - \alpha^{-1}\ell(s, r) > t\}$,

$$M(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^{\rho(\tau)} f(W(s))ds\Big), \tag{3.4}$$

$$M_0(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^{\rho(0)} f(W(s))ds\Big). \tag{3.5}$$

Ясно, что $M_0(u)=1$, поскольку, как уже отмечалось, при $W(0)=u$ с вероятностью единица выполняется равенство $\ell(s,u)>0$ для любого $s>0$. Неизвестную величину $M_0(r)$ обозначим $p$, и это значение будет определено в ходе вычисления функции $M(x)$. Ограниченное решение задачи (2.2), (2.3) для двух уровней $r_1=r$ и $r_2=u$ ищем в виде

$$M(x)=\lambda AQ_r(x)+\lambda BQ_u(x). \tag{3.6}$$

Функция такого вида, очевидно, является решением уравнения (2.2) и имеет скачки производной в точках $r$ и $u$. Коэффициенты $A$ и $B$ определяются из выражений для скачков производных (2.3), которые в данном случае будут иметь вид

$$\begin{aligned}&M'(r+0)-M'(r-0)=-2\lambda\alpha^{-1}M(r)+2\lambda\alpha^{-1}p,\\&M'(u+0)-M'(u-0)=2\lambda M(u)-2\lambda.\end{aligned}$$

Из этих равенств получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}&-2A=-2\alpha^{-1}(\lambda AQ_r(r)+\lambda BQ_u(r))+2\alpha^{-1}p,\\&-2B=2(\lambda AQ_r(u)+\lambda BQ_u(u))-2.\end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$A=\frac{[(\lambda Q_u(u)+1)p-\lambda Q_u(r)]}{(\lambda Q_u(u)+1)(\lambda Q_r(r)-\alpha)-\lambda^2Q_r(u)Q_u(r)}, \tag{3.7}$$

$$B=\frac{[\lambda Q_r(r)-\alpha-\lambda pQ_r(u)]}{(\lambda Q_u(u)+1)(\lambda Q_r(r)-\alpha)-\lambda^2Q_r(u)Q_u(r)}. \tag{3.8}$$

Обозначим $\Delta_{r,u}=Q_r(r)Q_u(u)-Q_r(u)Q_u(r)\geqslant 0$,

$$\Upsilon=\sqrt{(Q_r(r)-\alpha Q_u(u))^2+4\alpha(Q_r(r)Q_u(u)-Q_r(u)Q_u(r))}.$$

Тогда знаменатель в выражении для коэффициентов $A$ и $B$ можно представить в виде

$$\Delta_{r,u}\Big(\lambda-\frac{\Upsilon-Q_r(r)+\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Big)\Big(\lambda+\frac{\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Big).$$

В результате имеем

$$M(x)=\frac{\lambda(pQ_u(u)-Q_u(r))\big(\lambda+\frac{p}{pQ_u(u)-Q_u(r)}\big)Q_r(x)}{\Delta_{r,u}\Big(\lambda-\frac{\Upsilon-Q_r(r)+\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Big)\Big(\lambda+\frac{\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Big)}+$$

$$+\frac{\lambda(Q_r(r)-pQ_r(u))\bigl(\lambda-\frac{\alpha}{Q_r(r)-pQ_r(u)}\bigr)Q_u(x)}{\Delta_{r,u}\Bigl(\lambda-\dfrac{\Upsilon-Q_r(r)+\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Bigr)\Bigl(\lambda+\dfrac{\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Bigr)}. \tag{3.9}$$

Формула для обращения преобразования Лапласа влечет равенство

$$\mathbf{E}_x \exp\Bigl(-\int_0^{\rho(t)} f(W(s))ds\Bigr)=$$

$$=\frac{Q_r(x)}{\Delta_{r,u}}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Biggl(\frac{(pQ_u(u)-Q_u(r))\bigl(\lambda+\frac{p}{pQ_u(u)-Q_u(r)}\bigr)}{\Bigl(\lambda-\dfrac{\Upsilon-Q_r(r)+\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Bigr)\Bigl(\lambda+\dfrac{\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Bigr)}\Biggr)+$$

$$+\frac{Q_u(x)}{\Delta_{r,u}}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Biggl(\frac{(Q_r(r)-pQ_r(u))\bigl(\lambda-\frac{\alpha}{Q_r(r)-pQ_r(u)}\bigr)}{\Bigl(\lambda-\dfrac{\Upsilon-Q_r(r)+\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Bigr)\Bigl(\lambda+\dfrac{\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}{2\Delta_{r,u}}\Bigr)}\Biggr),$$

где через $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ обозначен оператор обратного преобразования Лапласа по $\lambda$. Поскольку величина, стоящая в левой части этого равенства, убывает по $t$, а $\Upsilon \geqslant |Q_r(r)-\alpha Q_u(u)|$, то в этом соотношении и в выражении (3.9) должны выполняться равенства

$$\frac{p}{pQ_u(u)-Q_u(r)}=-\frac{\alpha}{Q_r(r)-pQ_r(u)}=-\frac{\Upsilon-Q_r(r)+\alpha Q_u(u)}{2(Q_r(r)Q_u(u)-Q_r(u)Q_u(r))}.$$

Из этих равенств однозначно определяется неизвестная вероятность $p$:

$$p=\frac{1}{2Q_r(u)}(Q_r(r)+\alpha Q_u(u)-\Upsilon). \tag{3.10}$$

В результате (3.9) преобразуется к виду

$$M(x)=\frac{\lambda(2\Delta_{r,u}-Q_u(u)(\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)))Q_r(x)}{(2\lambda\Delta_{r,u}+\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u))Q_r(u)}+$$
$$+\frac{\lambda(\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u))Q_u(x)}{2\lambda\Delta_{r,u}+\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}. \tag{3.11}$$

По формуле обращения имеем

$$\mathbf{E}_x \exp\Bigl(-\int_0^{\rho(t)} f(W(s))ds\Bigr)=\exp\Bigl(-\frac{(\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u))h}{2(Q_r(r)Q_u(u)-Q_r(u)Q_u(r))}\Bigr)\times$$
$$\times\Bigl[\frac{Q_r(x)}{Q_r(u)}-\frac{\Upsilon+Q_r(r)-\alpha Q_u(u)}{2(Q_r(r)Q_u(u)-Q_r(u)Q_u(r))}\Bigl(\frac{Q_r(x)Q_u(u)}{Q_r(u)}-Q_u(x)\Bigr)\Bigr]. \tag{3.12}$$

Полученный результат тесно связан с соответствующим результатом работы [5]. Действительно, для любого фиксированного $h > 0$ в момент остановки $\rho(h)$ броуновское движение будет находиться в точке $u$, поскольку только за счет накопления локального времени в точке $u$ может происходить рост процесса $\eta(s)$. Тогда, используя строго марковское свойство процесса броуновского движения, получим

$$\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(W(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(W(s))ds\Big);\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}\eta(s)>h\Big\}$$

$$=\lambda\int_0^\infty \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(W(t))\exp\Big(-\int_0^{\rho(h)}(\lambda+f(W(s)))ds$$

$$-\int_{\rho(h)}^t(\lambda+f(W(s)))ds\Big);\rho(h)<t\Big\}dt$$

$$=\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_0^{\rho(h)}(\lambda+f(W(s)))ds\Big)\times$$

$$\times\lambda\int_0^\infty \mathbf{E}_u\Big\{\Phi(W(t))\exp\Big(-\int_{\rho(h)}^t(\lambda+f(W(s)))ds\Big);\rho(h)<t\Big\}dt$$

$$=\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_0^{\rho(h)}(\lambda+f(W(s)))ds\Big)\times$$

$$\times\lambda\mathbf{E}_u\Big\{\int_0^\infty\Phi(W(t+\rho(h)))\exp\Big(-\int_0^t(\lambda+f(W(s+\rho(h))))ds\Big)dt\Big\}$$

$$=\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_0^{\rho(h)}(\lambda+f(W(s)))ds\Big)\mathbf{E}_u\Big\{\Phi(W(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(W(s))ds\Big)dt\Big\}.$$

Первый из сомножителей в правой части этих равенств – это функция (3.12) с $\lambda + f(x)$ вместо $f(x)$. Второй сомножитель –

это функция $U(u)$, определенная формулой (3.1), из работы [5]. Левая же часть равенства представляет собой функцию (3.12) из [5]. Полученное равенство устанавливает соответствие между формулой (3.12) этой работы и формулой (3.12) из [5].

Применим полученный результат (формулы (3.11), (3.12)) для вычисления величины $\mathbf{E}_x e^{-\gamma\rho(t)}$. Запись решения этой задачи будет компактнее, если учесть свойство автомодельности процесса броуновского движения и, как следствие, аналогичное свойство его локального времени. Для локального времени это означает, что для произвольной постоянной $c > 0$ процессы $\ell(s,x)$ и $c\ell(s/c^2, x/c)$ имеют одинаковые распределения.

Обозначим $\rho_{\vec{y}}(t)$ момент обратный к $\eta_{\vec{y}}(t)$ – линейной комбинации локальных времен на уровнях $\vec{y} = (r,u)$. В отличие от предыдущих обозначений специально выделен вектор уровней $\vec{y}$.

В силу свойства автомодельности локального времени, имеем

$$\rho_{\vec{y}}(t) = \min\{s : c\eta_{\vec{x}/c}(s/c^2) > t\} = c^2 \min\{s : \eta_{\vec{x}/c}(s) > t/c\} = c^2\rho_{\vec{x}/c}(t/c).$$

Первое равенство здесь понимается как равенство по распределению. Поэтому для произвольного $\gamma > 0$

$$\mathbf{E}_{x/\sqrt{2\gamma}} e^{-\gamma\rho_{y/\sqrt{2\gamma}}(t/\sqrt{2\gamma})} = \mathbf{E}_x e^{-\rho_{\vec{y}}(t)/2}.$$

В силу этого, достаточно вычислить величину $\mathbf{E}_x e^{-\rho(t)/2}$. Сделав в формулах замену переменных $x \mapsto x\sqrt{2\gamma}$, $r \mapsto r\sqrt{2\gamma}$, $u \mapsto u\sqrt{2\gamma}$, $t \mapsto t\sqrt{2\gamma}$, получим формулы для $\mathbf{E}_x e^{-\gamma\rho(t)}$.

Положим $f = 1/2$. При сделанных предположениях, очевидно, $Q_z(x) = e^{-|x-z|}$, $\Delta_{r,u} = 1 - e^{-2|u-r|}$ и

$$\Upsilon = \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\alpha(1 - e^{-2\Delta})} = \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4\alpha e^{-2\Delta}}.$$

Тогда из (3.11) следует, что

$$\mathbf{E}_x e^{-\rho(\tau)/2} = \frac{\lambda(1 - 2e^{-2|u-r|} - \Upsilon + \alpha)e^{|u-r|-|x-r|} + \lambda(\Upsilon + 1 - \alpha)e^{-|u-x|}}{2\lambda(1 - e^{-2|u-r|}) + \Upsilon + 1 - \alpha}.$$

По формуле обращения (3.12) имеем

$$\mathbf{E}_x e^{-\rho(t)/2} = \exp\Big(-\frac{(\Upsilon + 1 - \alpha)t}{2(1 - e^{-2|u-r|})}\Big) \times \\ \times \Big[e^{|u-r|-|x-r|} - \frac{\Upsilon + 1 - \alpha}{2(1 - e^{-2|u-r|})}\big(e^{|u-r|-|x-r|} - e^{-|u-x|}\big)\Big]. \tag{3.15}$$

Из формулы (3.16) работы [5] или из простых рассуждений, о первом превышении траекторией процесса $\eta(s)$ уровня $t$, очевидно следует, что

$$\mathbf{E}_x e^{-\rho(t)/2} = \mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant \tau_{1/2}} \big(\ell(s,u) - \alpha^{-1}\ell(s,r)\big) > t\Big),$$

где $\tau_{1/2}$ – случайный момент остановки, имеющий показательное распределение с параметром 1/2. В правой части стоит распределение супремума линейной комбинации броуновских локальных времен на двух уровнях. Таким распределениям посвящена работа [5] . Много явных формул для распределений супремумов линейных комбинации локальных времен различных процессов содержится в справочнике [6].

## Литература

1. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент обратный ко времени пребывания.* — Записки научных семинаров ПОМИ, **228** (1996), 39–56.
2. P. Lévy, *Sur certains processus stochastiques homogènes.* — Compositio Math. **7** (1939), 283–339.
3. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* Москва, Физматгиз, 1963.
4. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* С.-Петербург, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Наука, 1994.
5. А. Н. Бородин, *Распределения супремумов линейных комбинации локальных времен случайных процессов.* — Труды Санкт-Петербургского математического общества. **8** (2000), 15–28.
6. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae, Second Edition.* Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 2002.

Borodin A. N. On distributions of functionals of Brownian motion stopped at the moment inverse to a linear combination of local times.

The linear combinations with different signs coefficients of local times are considered. Some new version of the Feynman-Kac formula for Brownian motion stopped at the invers moment to this linear combination is proved.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 ноября 2002 г.