Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

И. В. Вагурина

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ОСТАНОВЛЕННОГО В РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

1. Введение. В работе рассматриваются задачи о нахождении распределений аддитивных функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в случайные моменты времени, образованные с помощью различных комбинаций максимумов и минимумов из уже известных моментов остановки.

Пусть $W(s)$, $s \in [0, \infty)$, – процесс броуновского движения. Обозначим через $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{P}_x$ соответственно математическое ожидание и вероятность по броуновскому движению при условии $W(0) = x$.

Задача рассматривается для аддитивных функционалов от броуновского движения вида

$$A_0(s) := \int\limits_0^s f(W(v))dv,$$

где $f(\cdot)$ – неотрицательная кусочно непрерывная функция, а также для функционалов более общего вида

$$A_\gamma(s) := \int\limits_0^s f(W(v))dv + \sum_{j=1}^m \gamma_j \ell(s, a_j),$$

где $\gamma_j \geqslant 0$, $a_j \in \mathbb{R}^1$, $m < \infty$, $\ell(s, a_j)$ – локальное время броуновского движения, определяемое формулой

$$\ell(s, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^s \mathbf{1}_{[y, y+\varepsilon)}(W(v))dv,$$

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ No. 02-01-00265, No. 00-15-96019.

где $\mathbf{1}_E(\cdot)$ – индикатор борелевского множества E.

Обозначим $H_{a,b} = \min\{s : W(s) \notin (a,b)\}$ – момент первого выхода процесса $W(s)$ на границу интервала (a,b).

Для $t \geqslant 0$ определим моменты, обратные к аддитивному функционалу следующим образом:

$$\nu_l(\beta_l, t_l) = \min\{s : \int_0^s g_l(W(v))dv + \sum_{k=1}^q \beta_{l,k}\ell(s, z_{l,k}) \geqslant t_l\},$$

где при $l = 1, \dots, n$, $g_l(x)$ – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\beta_l = (\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,q})$.

С целью упрощения обозначений, из множества точек $z_{l,k}$, $l = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, q$, можно составить один набор, занумерованный индексом m ($\{z_m\}$, $m = 1, \dots, q$), где q может быть достаточно большим. Тогда можно считать, что каждый из моментов $\nu_l(\beta_l, t_l)$ зависит от всех точек z_m, $m = 1, \dots, q$. При этом мы полагаем $\beta_{l,j} = 0$, если z_j не входит в момент $\nu_l(\beta_l, t_l)$.

В частном случае, когда функции $g_l(x)$ являются индикаторами множеств, моменты ν_l называются моментами, обратными ко времени пребывания процесса.

Распределения аддитивных функционалов от различных диффузионных процессов, остановленных в моменты $H_{a,b}$ и $\nu(\beta, \tau)$ подробно изучаются в работах А. Н. Бородина и их можно найти в [1]. В [2] и [4] изучаются моменты, образованные только из моментов $\nu_l(\beta_l, \tau_l)$, $l = 1, \dots, n$, посредством операций минимума и максимума для процесса броуновского движения и процесса броуновского движения с линейным сносом. В данной работе рассмотрен общий подход для нахождения распределений аддитивных функционалов, остановленных в моменты, образованные из моментов $H_{a,b}$ и $\nu_l(\beta_l, \tau_l)$, $l = 1, \dots, n$, используя произвольные комбинации максимумов и минимумов.

С помощью операций максимума ($\vee$) и минимума ($\wedge$) можно получить целое семейство случайных моментов остановки, образованных из моментов $H_{a,b}$, $\nu_1(\beta_1, t_1), \dots, \nu_n(\beta_n, t_n)$. Например, при использовании двух моментов $\nu_1(\beta_1, t_1)$, $\nu_2(\beta_2, t_2)$ и момента $H_{a,b}$ получим следующий набор моментов остановки:

$$\mu_0 = H_{a,b} \wedge \nu_1(\beta_1, t_1) \wedge \nu_2(\beta_2, t_2), \quad \mu_1 = [H_{a,b} \wedge \nu_1(\beta_1, t_1)] \vee \nu_2(\beta_2, t_2),$$

$$\mu_2 = H_{a,b} \wedge [\nu_1(\beta_1, t_1) \vee \nu_2(\beta_2, t_2)], \quad \mu_3 = H_{a,b} \vee [\nu_1(\beta_1, t_1) \wedge \nu_2(\beta_2, t_2)],$$

$\mu_4 = H_{a,b} \vee \nu_1(\beta_1, t_1) \vee \nu_2(\beta_2, t_2), \quad \mu_5 = [H_{a,b} \vee \nu_1(\beta_1, t_1)] \wedge \nu_2(\beta_2, t_2).$

Задачи с использованием $n+1$ момента остановки рекурсивно сводятся к задачам, включающим в себя меньшее число случайных моментов, причем образованных только посредством операции минимума.

2. Распределения функционалов, остановленных в случайные моменты, полученные при помощи только операции минимума. Пусть случайные моменты τ_i, $i = 1, \dots, n$, – экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_i > 0$, то есть $\mathbf{P}(\tau_i > t_i) = e^{-\lambda_i t_i}$ (τ_i, $i = 1, \dots, n$, не зависят от броуновского движения). Задача нахождения распределения функционала для фиксированного вектора моментов времени $\vec{t}$ сводится с помощью $n-$кратного преобразования Лапласа к аналогичной задаче для случайного вектора $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно.

Предположим, что мы хотим вычислить распределение функционала $A_\gamma(\mu)$ в некоторый случайный момент $\mu = \mu(t_1, \dots, t_n)$. Для этого нам достаточно уметь находить функции

$$U(x, \vec{t}) := \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(\mu(\vec{t}))) \exp(-A_\gamma(\mu(\vec{t}))) \Big\}.$$

Применив n-кратное преобразование Лапласа к функции $U(x, \vec{t})$ по вектору $\vec{t}$ получим, что

$$U(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \dots \int_0^\infty e^{-\lambda_n t_n} U(x, \vec{t}) dt_n =$$

$$= \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(\mu(\vec{\tau}))) \exp(-A_\gamma(\mu(\vec{\tau}))) \Big\}.$$

В дальнейшем все теоремы будут приведены для функции $U(x)$. Для нахождения распределения функционалов в фиксированный момент $\vec{t}$ необходимо просто применить n раз обратное преобразование Лапласа к функции $U(x)$.

Следующие результаты являются основополагающими при решении поставленных задач для моментов $H_{a,b}$ и $\nu_i(\beta_i, t_i)$, $i = 1, \dots, n$, поскольку задачи, в которых рассматривается случайный момент остановки, содержащий операции максимума, сводятся к задачам, в которых рассматриваются моменты, содержащие только операции минимума.

Теорема 2.1. *Пусть* $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, *– неотрицательные кусочно непрерывные функции,* $H^{\wedge n}_{a,b} = H_{a,b} \wedge \nu_1(0,\tau_1) \wedge \ldots \wedge \nu_n(0,\tau_n)$. *Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(H^{\wedge n}_{a,b})) \exp(-A_0(H^{\wedge n}_{a,b})) \Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}U''(x) - \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(x) + f(x) \Big) U(x) = -F(x) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(x), \qquad x \in (a,b), \tag{2.1}$$

$$U(a+) = F(a), \quad U(b-) = F(b). \tag{2.2}$$

Мы будем считать в этой теореме и далее, что функция $F(x)$ непрерывна на границах промежутка (a,b), при этом $F(a+) = F(a)$, $F(b-) = F(b)$.

Доказательство этой и последующих теорем опирается на следующий результат.

Теорема 2A. *Пусть*

$$\xi(s) = \Big(W(s), t_1 - \int_0^s g_1(W(v))dv, \ldots, t_k - \int_0^s g_k(W(v))dv \Big),$$

где g_l, $l = 1, \ldots, k$, *– неотрицательные кусочно непрерывные функции, и* $\mu = min\{s : \xi(s) \notin \Delta\}$ *– момент первого выхода процесса* $\xi(s)$ *из области* Δ. *Предположим, что область* Δ *такова, что момент* μ *с вероятностью единица конечен.* $f(x,\vec{t})$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^k$, *– неотрицательная кусочно непрерывная функция по каждой переменной, ограниченная на любом компакте из* $\mathbb{R}^{k+1}$. *Тогда функция*

$$u(x,\vec{t}) = \mathbf{E}_x \Big[F(W(\mu)) \exp\Big(-\int_0^{\mu} f(\xi(s))ds \Big) \Big]$$

удовлетворяет в области Δ *уравнению*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,\vec{t}) - \sum_{l=1}^{k} g_l(x) \frac{\partial}{\partial t_l} u(x,\vec{t}) - f(x,\vec{t}) u(x,\vec{t}) = 0, \tag{2.3}$$

и граничному условию

$$u(x,\vec{t}) = F(x), \qquad (x,\vec{t}) \in \partial\Delta. \tag{2.4}$$

Это утверждение вытекает из общей теории диффузионных процессов (см., например, [5], гл.13, §4) и относится к так называемым "теоремам типа Фейнмана-Каца".

Доказательство теоремы 2.1. В качестве области Δ рассмотрим область $[a,b]\times(0,\infty)\times\ldots\times(0,\infty)$. Тогда момент $\mu=\min\{s: \xi(s)\notin\Delta\}=\min\{s: W(s)\notin[a,b]$, или $t_1-\int_0^s g_1(W(v))dv\leqslant 0,\ldots$ или $t_k-\int_0^s g_k(W(v))dv\leqslant 0\}=\min\{H_{a,b},\ \nu_1(0,t_1),\ldots,\nu_n(0,t_n)\}$.

По теореме $2A$ функция

$$u(x,\vec{t})=\mathbf{E}_x\Big[F(W(\mu))\exp\Big(-\int\limits_0^{\mu} f(\xi(s))ds\Big)\Big],$$

$x\in\mathbb{R}^1$, $\vec{t}\in\mathbb{R}^n$, $f(x,\vec{t})=f(x)$, удовлетворяет в области Δ уравнению:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,\vec{t})-\sum_{l=1}^{k}g_l(x)\frac{\partial}{\partial t_l}u(x,\vec{t})-f(x)u(x,\vec{t})=0,$$

и граничному условию (2.4).

Применяя n раз преобразование Лапласа к функции $u(x,\vec{t})$ и учитывая, что

$$u(x,t_1,\ldots,t_{i-1},0,t_{i+1},\ldots,t_n)=F(x)$$

для любого $i=1,\ldots,n$, мы имеем:

$$U(x)=\lambda_1\ldots\lambda_n\int\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_0^{\infty}\exp(-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j t_j)u(x,\vec{t})dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\mathbf{E}_x\Big[F(W(H_{a,b}^{\wedge n}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}^{\wedge n}} f(W(s))ds\Big)\Big].$$

Применяя это преобразование к уравнению (2.3), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $U(x)$:

$$\frac{1}{2}U''(x)-\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x)+f(x)\Big)U(x)=-F(x)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x),\qquad x\in(a,b),$$

$$U(a+)=F(a),\quad U(b-)=F(b).$$

Теорема доказана.

В случае, когда функционал A и моменты ν_i включают в себя линейную комбинацию локальных времен, то справедлив более общий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $H^{\wedge n}_{a,b} = H_{a,b} \wedge \nu_1(\beta_1,\tau_1) \wedge \ldots \wedge \nu_n(\beta_n,\tau_n)$. Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(H^{\wedge n}_{a,b}))\exp(-A_\gamma(H^{\wedge n}_{a,b}))\Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x \in (a,b)\backslash\{z_1,\ldots,z_q,a_1,\ldots,a_m\}$

$$\frac{1}{2}U''(x) - \Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x) + f(x)\Big)U(x) = -F(x)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x), \tag{2.5}$$

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2(U(z_k) - F(z_k))\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\beta_{l,k}, \qquad k = 1,\ldots,q, \tag{2.6}$$

$$U'(a_i+) - U'(a_i-) = 2\gamma_i U(a_i), \qquad i = 1,\ldots,m, \tag{2.7}$$

$$U(a+) = F(a), \quad U(b-) = F(b). \tag{2.8}$$

Для обоснования условий на скачки производной (2.6), (2.7), поступим следующим образом. Обозначим:

$$\nu^\varepsilon_l(\beta_l,\tau_l) = \min\{s : \int_0^s g_l(W(v))dv + \sum_{k=1}^{q}\beta_{l,k}\int_0^s \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[z_k,z_k+\varepsilon)}(W(v))dv > \tau_l\},$$

$$H^{\wedge\varepsilon}_{a,b} = \min\{H_{a,b}, \nu^\varepsilon_1(\beta_1,\tau_1),\ldots,\nu^\varepsilon_n(\beta_n,\tau_n)\},$$

$$U_\varepsilon(x) =$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{F(W(H^{\wedge\varepsilon}_{a,b}))\exp\Big(-\int_0^{H^{\wedge\varepsilon}_{a,b}}\Big(f(W(v)) + \sum_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[a_j,a_j+\varepsilon)}(W(v))\Big)dv\Big)\Big\}.$$

В силу определения локального времени, при $\varepsilon \to 0$ моменты $\nu^\varepsilon_l(\beta_l,\tau_l) \to \nu_l(\beta_l,\tau_l)$ для всех $l = 1,\ldots,n$, и, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, функция $U_\varepsilon(x) \to U(x)$.

Ввиду того, что индикаторная функция является кусочно непрерывной, к функции $U_\varepsilon(x)$ можно применить теорему 2.1. Тогда $U_\varepsilon(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2}U_\varepsilon''(x) - \Big(\sum_{l=1}^{n}\Big(\lambda_l g_l(x) + \sum_{k=1}^{q}\beta_{l,k}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[z_k,z_k+\varepsilon)}(x)\Big) + \sum_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[a_j,a_j+\varepsilon)}(x)+$$

$$+f(x)\Big)U_\varepsilon(x) = -F(x)\sum_{l=1}^{n}\Big(\lambda_l g_l(x) + \sum_{k=1}^{q}\beta_{l,k}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[z_k,z_k+\varepsilon)}(x)\Big)$$

и граничным условиям $U_\varepsilon(a) = F(a)$, $U_\varepsilon(b) = F(b)$.

Осуществляя предельный переход при $\varepsilon \to 0$, аналогичный соответствующему предельному переходу, приведенному в доказательстве теоремы 2.2 из [3], получим уравнение (2.5) и граничные условия (2.8).

Выберем точки p_1 и p_2 таким образом, чтобы интервал (p_1, p_2) содержал точку z_k, но не содержал остальные точки из множества $\{z_1, \dots, z_q, a_1, \dots, a_m\}$ вместе с их ε-окрестностью. Проинтегрировав вышеприведенное уравнение по x от p_1 до p_2, получим:

$$\frac{1}{2}(U_\varepsilon'(p_2) - U_\varepsilon'(p_1)) - \int_{p_1}^{p_2}\Big(\sum_{l=1}^{n}\Big(\lambda_l g_l(x) + \beta_{l,k}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[z_k,z_k+\varepsilon)}(x)\Big) + f(x)\Big)U_\varepsilon(x)dx$$

$$= -\int_{p_1}^{p_2} F(x)\sum_{l=1}^{n}\Big(\lambda_l g_l(x) + \beta_{l,k}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[z_k,z_k+\varepsilon)}(x)\Big)dx.$$

Устремив p_1 слева, а p_2 справа к точке z_k и $\varepsilon \to 0$, придем к условию (2.6) для z_k. Аналогично можно получить условия (2.6) и (2.7) для остальных точек $z_1, \dots, z_q, a_1, \dots, a_m$.

Замечание 2.1. В случае, когда $a = -\infty$ или $b = \infty$, соответствующие граничные условия заменяются на условия ограниченности функции $U(x)$ при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$.

Замечание 2.2. Если какая-нибудь из точек z_k совпадает с одной из точек a_i, то соответствующие условия из (2.6), (2.7) нужно объединить в условие

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2(U(z_k) - F(z_k))\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\beta_{l,k} + \gamma_i U(z_k).$$

Замечание 2.3. Для кусочно непрерывных функций $F(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ уравнение (2.1) нужно понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций F, f и g, а в точках разрыва этих функций его решение непрерывно вместе с первой производной.

Аналогичные замечания справедливы и для последующих результатов, поэтому мы не будем их повторять.

Проанализируем, как изменится дифференциальное уравнение и его граничные условия в предположении, что минимум реализуется на конкретном моменте остановки.

Пусть момент первого выхода на границу (a,b) реализуется через a и наступит раньше, момента $\min\{\nu_1(\beta_1,\tau_1),\dots,\nu_n(\beta_n,\tau_n)\}$. Тогда справедлива теорема:

Теорема 2.3. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x\in[a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $H^{\wedge n}_{a,b}=H_{a,b}\wedge\nu_1(\beta_1,\tau_1)\wedge\ldots\wedge\nu_n(\beta_n,\tau_n)$. Тогда функция*

$$U(x):=\mathbf{E}_x\Big\{F(W(H^{\wedge n}_{a,b}))\exp(-A_\gamma(H^{\wedge n}_{a,b}));W(H^{\wedge n}_{a,b})=a\Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x\in(a,b)\backslash\{z_1,\dots,z_q,a_1,\dots,a_n\}$

$$\frac{1}{2}U''(x)-\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x)+f(x)\Big)U(x)=0, \tag{2.9}$$

$$U'(z_k+)-U'(z_k-)=2U(z_k)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\beta_{l,k}, \qquad k=1,\dots,q, \tag{2.10}$$

$$U'(a_i+)-U'(a_i-)=2\gamma_i U(a_i), \qquad i=1,\dots,m, \tag{2.11}$$

$$U(a+)=F(a), \quad U(b-)=0. \tag{2.12}$$

Замечание 2.4. В случае, если момент $H^{\wedge n}_{a,b}$ реализуется через границу b, то граничные условия (2.12) нужно заменить на условия $U(a+)=0$, $U(b-)=F(b)$.

Замечание 2.5. В случае, если момент $H^{\wedge n}_{a,b}$ реализуется на моменте первого выхода на границу интервала (a,b), то граничные условия (2.12) нужно заменить на условия $U(a+)=F(a)$, $U(b-)=F(b)$.

Предположим, что момент $H^{\wedge n}_{a,b}$ реализуется на одном из моментов $\nu_1(\beta_1,\tau_1)$,… ,$\nu_n(\beta_n,\tau_n)$. Тогда верна теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Для любого $r = 1, \dots, n$ функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(H_{a,b}^{\wedge n})) \exp(-A_\gamma(H_{a,b}^{\wedge n})); H_{a,b}^{\wedge n} = \nu_r(\beta_r, \tau_r) \Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x \in (a,b) \backslash \{z_1, \dots, z_q, a_1, \dots, a_n\}$

$$\frac{1}{2} U''(x) - \Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j(x) + f(x) \Big) U(x) = -\lambda_r g_r(x) F(x), \tag{2.5}$$

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2U(z_k) \sum_{l=1}^n \lambda_l \beta_{l,k} - 2\lambda_r \beta_{r,k} F(z_k), \qquad k = 1, \dots, q,$$

$$U'(a_i+) - U'(a_i-) = 2\gamma_i U(a_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

$$U(a+) = 0, \quad U(b-) = 0.$$

Укажем на некоторые моменты доказательства. Для этого рассмотрим функцию

$$u(x, \vec{t}) = \mathbf{E}_x \Big[F(W(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))) \exp\Big(- A_\gamma(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))\Big); H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}) = \nu_r(\beta_r, t_r) \Big].$$

Ее можно переписать в следующем виде:

$$u(x, \vec{t}) = \mathbf{E}_x \Big[\tilde{F}(W(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))) \exp\Big(- A_\gamma(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))\Big) \Big],$$

где

$$\tilde{F}(W(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))) = F(W(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))) \mathbf{1}_{\{(a,b) \times \mathbb{R}+ \times \dots \times \{0\} \dots \times \mathbb{R}+\}}(\xi(H_{a,b}^{\wedge n}(\vec{t}))),$$

а $\{0\}$ стоит на $r+1$ месте.

Из теоремы 2А следует, что $u(x, \vec{t}) = \tilde{F}(x)$ на границе области Δ. В частности, $u(x, t_1, \dots, t_{r-1}, 0, t_{r+1}, \dots, t_n) = F(x)$, а $u(x, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) = 0$ при всех $i = 1, \dots, n$, $i \neq r$.

Применяя n-кратное преобразование Лапласа по $\vec{t}$ к уравнению (2.3), получим (2.5). Условия на скачки производной получаются аналогично теореме 2.2.

Пусть теперь $0 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_r \leqslant n$ – набор из r целых чисел от 0 до n, $r \leqslant n$. Обозначим $H_a = \min\{s : W(s) = a\}$ – момент первого выхода процесса броуновского движения на границу a. При реализации момента $H_{a,b}^{\wedge n}$ на минимуме из момента H_a и момента $\nu^{\wedge r} = \min\{\nu_{p_1}(\beta_{p_1}, \tau_{p_1}), \dots, \nu_{p_r}(\beta_{p_r}, \tau_{p_r})\}$ верен следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(H^{\wedge n}_{a,b}))\exp(-A_\gamma(H^{\wedge n}_{a,b})); H^{\wedge n}_{a,b} = \min\{H_a, \nu^{\wedge r}\}\Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x \in (a,b)\backslash\{z_1,\dots,z_q,a_1,\dots,a_n\}$

$$\frac{1}{2}U''(x) - \Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x) + f(x)\Big)U(x) = -F(x)\sum_{m=1}^{r}\lambda_{p_m} g_{p_m}(x),$$

$$U'(z_k+) - U'(z_k-) = 2U(z_k)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\beta_{l,k} - 2F(z_k)\sum_{m=1}^{r}\lambda_{p_m}\beta_{p_m,k},$$

$$k = 1,\dots,q,$$

$$U'(a_i+) - U'(a_i-) = 2\gamma_i U(a_i), \qquad i = 1,\dots,m,$$

$$U(a+) = F(a), \quad U(b-) = 0.$$

Замечание 2.6. Если устремить λ_i к 0, то $\tau_i \to \infty$ по вероятности. Тогда момент $\nu_i(\beta_i,\tau_i) \to \infty$ и не влияет на наступление момента $H^{\wedge n}_{a,b}$. В силу этого теорема 2.5 является обобщением всех предыдущих.

3. Моменты, образованные из моментов $H_{a,b}$ и $\nu_1(0,\tau_1)$, $\nu_2(0,\tau_2)$. Перейдем к рассмотрению результатов о вычислении распределений функционалов от остановленного броуновского движения для моментов, образованных из моментов $H_{a,b}$ и $\nu_1(0,\tau_1)$, $\nu_2(0,\tau_2)$ при помощи операций максимума и минимума. Всевозможные моменты остановки, которые могут при этом получиться, были описаны в п.1. Мы не будем касаться случая, когда в определение функционала и моментов входят линейные комбинации локальных времен броуновского движения, поскольку наличие таких комбинаций приводит лишь к появлению условий на скачки производных вида (2.6), (2.7).

Наиболее простой момент μ_0 является частным случаем момента $H^{\wedge n}_{a,b}$ при $n = 2$ и мы не будем на нем останавливаться. Начнем с момента $\mu_1 = [H_{a,b} \wedge \nu_1(0,\tau_1)] \vee \nu_2(0,\tau_2)$.

Теорема 3.1. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\mu_1 = \mu_1(\tau_1, \tau_2)$. Тогда функция*

$$U_{\mu_1}(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(\mu_1))\exp(-A_0(\mu_1))\Big\}$$

для $x \in (a,b)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x))U(x) =$$
$$-\lambda_1 g_1(x) U_{\lambda_2}(x) - \lambda_2 g_2(x) U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x),$$

где функция $U_{\lambda_2}(x) = \mathbf{E}_x\Big\{F(W(\nu_2))\exp(-A_0(\nu_2))\Big\}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи (см. [2], *теорема* 2.1*):*

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_2 g_2(x) + f(x))U(x) = -\lambda_2 g_2(x) F(x),$$

а функция $U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x) = \mathbf{E}_x\Big\{F(W(H_{a,b}\wedge\nu_1))\exp(-A_0(H_{a,b}\wedge\nu_1))\Big\}$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + f(x))U(x) = -\lambda_1 g_1(x) F(x), \qquad x \in (a,b),$$
$$U(a+) = F(a), \qquad U(b-) = F(b).$$

Доказательство. Применим теорему 2А для следующего частного случая: $k = 2$, $f(x,t_1,t_2) = f(x)$, $F(x,t_1,t_2) = F(x)$, $\vec{t} = (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$. В качестве Δ рассмотрим множество $\{[a,b]\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^1\} \cup \{\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times(0,\infty)\}$. Тогда процесс $\xi(s)$ будет иметь вид:

$$\xi(s) = \Big(W(s), t_1 - \int_0^s g_1(W(v))dv, t_2 - \int_0^s g_2(W(v))dv\Big).$$

Ясно, что $\xi(s) \notin \Delta$ тогда и только тогда, когда $\{W(s) \notin (a,b)$ или $t_1 - \int_0^s g_1(W(v))dv \leqslant 0\}$ и $\{t_2 - \int_0^s g_2(W(v))dv \leqslant 0\}$. Таким образом, момент μ_1 совпадает с моментом первого выхода прцесса $\xi(s)$ из области Δ.

Применив теорему 2А получим, что функция

$$u(x,\vec{t}) = \mathbf{E}_x\{F(W(\mu_1))\exp(-\int_0^{\mu_1} f(W(v))dv)\}$$

удовлетворяет в области Δ уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,\vec{t})-g_1(x)\frac{\partial}{\partial t_1}u(x,\vec{t})-g_2(x)\frac{\partial}{\partial t_2}u(x,\vec{t})-f(x,\vec{t})u(x,\vec{t})=0 \quad (3.1)$$

и граничному условию $u(x,\vec{t})=F(x)$ при $(x,\vec{t})\in\partial\Delta$.

Заметим, что

$$u(x,0,t_2)=\mathbf{E}_x\{F(W(\nu_2))\exp(-\int\limits_0^{\nu_2}f(W(v))dv)\}=:u_{\lambda_2}(x,t_2),$$

$$u(x,t_1,0)=\mathbf{E}_x\{F(W(H^{\nu_1}_{a,b}))\exp(-\int\limits_0^{H^{\nu_1}_{a,b}}f(W(v))dv)\}=:u_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x,t_1).$$

Применив два раза преобразование Лапласа по переменным t_1 и t_2 к уравнению (3.1), получим, что функция $U_{\mu_1}(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty u(x,\vec{t})e^{-\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_2 t_2}dt_1dt_2$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{2}U''(x)-(\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)+f(x))U(x)=$$
$$-\lambda_1 g_1(x)U_{\lambda_2}(x)-\lambda_2 g_2(x)U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x),$$

где функция $U_{\lambda_2}(x)=\int_0^\infty u_{\lambda_2}(x,t_2)e^{-\lambda_2 t_2}dt_2$, и для нее справедлива теорема 2.1 из [2] при $a=-\infty$, $b=\infty$. Функция $U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x)=-\int_0^\infty u_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x,t_1)e^{-\lambda_1 t_1}dt_1$ удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.2) из теоремы 2.1 при $n=1$. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Иначе установить справедливость теоремы 3.1 можно следующим образом (см. [2]). Функция U_{μ_1} представима в виде

$$U_{\mu_1}=U_{H^{\nu_1}_{a,b}}+U_{\lambda_2}-U_{\mu_0}.$$

Убедиться в этом можно с помощью вероятностных рассуждений, переписав равенство в виде

$$U_{\mu_1}+U_{\mu_0}=U_{H^{\nu_1}_{a,b}}+U_{\lambda_2}.$$

Все траектории, для которых реализуется момент μ_1 или момент μ_0, распадаются на два непересекающихся класса. Первый из которых составляют все траектории, для которых, скажем, момент μ_0 совпадает с моментом $H^{\nu_1}_{a,b}$, а ко второму классу относятся все траектории, для которых момент μ_0 совпадает с моментом ν_2. Отсюда следует вышеприведенное равенство.

Выпишем дифференциальное уравнение для функции $U_{H^{\nu_1}_{a,b}}$:

$$\frac{1}{2}U''_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x) - (\lambda_1 g_1(x) + f(x))U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(x) = -\lambda_1 g_1(x)F(x),$$

$$U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(a+) = F(a), \qquad U_{H^{\nu_1}_{a,b}}(b-) = F(b),$$

для функции U_{λ_2}:

$$\frac{1}{2}U''_{\lambda_2}(x) - (\lambda_2 g_2(x) + f(x))U_{\lambda_2}(x) = -\lambda_2 g_2(x)F(x),$$

$$|U(x)| < C, \qquad x \to \pm\infty,$$

и, наконец, для функции U_{μ_0}:

$$\frac{1}{2}U''_{\mu_0}(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x))U_{\mu_0}(x) = -(\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x))F(x),$$

$$U_{\mu_0}(a+) = F(a), \qquad U_{\mu_0}(b) = F(b-).$$

Если сложить первые два уравнения и вычесть третье, то получим результат теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\mu_2 = \mu_2(\tau_1, \tau_2)$. Тогда функция*

$$U_{\mu_2}(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(\mu_2))\exp(-A_0(\mu_2))\Big\}$$

для $x \in (a,b)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x))U(x) =$$

$$-\lambda_1 g_1(x)U_{\lambda_2}(x) - \lambda_2 g_2(x)U_{\lambda_1}(x),$$

$$U(a+) = F(a), \qquad U(b-) = F(b),$$

где функции $U_{\lambda_i}(x) = \mathbf{E}_x\Big\{F(W(H_{a,b}\wedge\nu_i))\exp(-A_0(H_{a,b}\wedge\nu_i))\Big\}$, $i = 1,2$, являются единственным ограниченным непрерывным решением задачи при $x \in (a,b)$:

$$\frac{1}{2}U''_{\lambda_i}(x) - (\lambda_i g_i(x) + f(x))U_{\lambda_i}(x) = -\lambda_i g_i(x)F(x), \tag{3.2}$$

$$U_{\lambda_i}(a+) = F(a), \qquad U_{\lambda_i}(b-) = F(b). \tag{3.3}$$

Теорема 3.3. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\mu_3 = \mu_3(\tau_1, \tau_2)$. Тогда функция*

$$U_{\mu_3}(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(\mu_3)) \exp(-A_0(\mu_3)) \Big\}$$

для $x \in (a,b)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x))U(x) = -(\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x))U_{H_{a,b}}(x),$$

где функция $U_{H_{a,b}}(x) = \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(H_{a,b})) \exp(-A_0(H_{a,b})) \Big\}$, $i = 1,2$, является единственным ограниченным непрерывным решением задачи при $x \in (a,b)$:

$$\frac{1}{2}U''_{H_{a,b}}(x) - f(x))U_{H_{a,b}}(x) = 0, \tag{3.4}$$

$$U_{H_{a,b}}(a+) = F(a), \qquad U_{H_{a,b}}(b-) = F(b). \tag{3.5}$$

Теоремы 3.2–3.3 доказываются аналогично. Укажем лишь какие области Δ нужно рассмотреть в каждой из теорем. Для μ_2 следует рассмотреть область $\Delta = [a,b] \times (\{(0,\infty) \times \mathbb{R}^1\} \cup \{\mathbb{R}^1 \times (0,\infty)\})$, для μ_3 – область $\Delta = \{[a,b] \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1\} \cup \{\mathbb{R}^1 \times (0,\infty) \times (0,\infty)\}$.

Прежде, чем сформулировать теорему для момента μ_4, нам необходимо рассмотреть дополнительный результат для момента $H_{a,b} \vee \nu(0,\tau)$.

Теорема 3.4A. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(H_{a,b} \vee \nu(0,\tau))) \exp(-A_0(H_{a,b} \vee \nu(0,\tau))) \Big\}$$

для $x \in (a,b)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda g(x) + f(x))U(x) = -\lambda g(x) U_{H_{a,b}}(x), \tag{3.6}$$

где функция $U_{H_{a,b}}(x)$ определяется как в теореме 3.3 и удовлетворяет уравнениям (3.4), (3.5).

Учитывая замечанме 2.6, эту теорему можно получить как следствие теоремы 3.1, устремив λ_1 к 0.

Теорема 3.4. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x\in[a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\mu_4=\mu_4(\tau_1,\tau_2)$. Тогда функция*

$$U_{\mu_4}(x):=\mathbf{E}_x\Big\{F(W(\mu_4))\exp(-A_0(\mu_4))\Big\}$$

для $x\in(a,b)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x)-(\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)+f(x))U(x)=$$

$$-\lambda_1 g_1(x)U_{H_{a,b}\vee\nu_2}-\lambda_2 g_2(x))U_{H_{a,b}\vee\nu_1}(x),$$

где функции $U_{H_{a,b}\vee\nu_i}(x)=\mathbf{E}_x\Big\{F(W(H_{a,b}\vee\nu_i))\exp(-A_0(H_{a,b}\vee\nu_i))\Big\}$, $i=1,2$, являются единственными ограниченными непрерывными решениями задачи (3.6) *из теоремы* 3.4A.

Теорема 3.5. *Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x\in[a,b]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, $\mu_5=\mu_5(\tau_1,\tau_2)$. Тогда функция*

$$U_{\mu_5}(x):=\mathbf{E}_x\Big\{F(W(\mu_5))\exp(-A_0(\mu_5))\Big\}$$

для $x\in(a,b)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x)-(\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)+f(x))U(x)=$$

$$-\lambda_1 g_1(x)U_{H_{a,b}\wedge\nu_2}-\lambda_2 g_2(x))F(x),$$

где функция $U_{H_{a,b}\wedge\nu_2}(x)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи (3.2), (3.3) *из теоремы* 3.3.

Для момента μ_4 следует рассмотреть область $\Delta=\{[a,b]\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\}\cup\{\mathbb{R}^1\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^1\}\cup\{\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times(0,\infty)\}$, для μ_5 – область $\Delta=(\{[a,b]\times\mathbb{R}^1\}\cup\{\mathbb{R}^1\times(0,\infty)\})\times(0,\infty)$.

Теперь рассмотрим, как изменится дифференциальная задача для моментов $\mu_1,\dots,\mu_5$, если наложить условие, что случайный момент реализуется на одном из моментов $H_{a,b}$, ν_1 или ν_2. При этом исследуем все такие случаи, скажем, для момента μ_2.

Для момента μ_2 верны следующие результаты.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.2 *функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(\mu_2))\exp(-A_0(\mu_2)); W(\mu_2) = a\Big\}$$

для $x \in (a,b)$ *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи:*

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x))U(x) =$$
$$-\lambda_1 g_1(x)U_{\lambda_2}(x) - \lambda_2 g_2(x)U_{\lambda_1}(x),$$
$$U(a+) = F(a), \qquad U(b-) = 0,$$

где функции $U_{\lambda_i}(x)$, $i = 1, 2$, *являются единственными непрерывными ограниченными решениями задачи:*

$$\frac{1}{2}U''_{\lambda_i}(x) - (\lambda_i g_i(x) + f(x))U_{\lambda_i}(x) = 0, \qquad x \in (a,b),$$
$$U_{\lambda_i}(a+) = F(a), \qquad U_{\lambda_i}(b-) = 0.$$

Это утверждение немедленно следует из теоремы 3.2, если рассмотреть в качестве $\tilde{F}(x)$ функцию $F(x)\mathbf{1}_{\{a\}}(x)$.

Для точки b справедлив аналогичный результат. Для моментов ν_1, ν_2 не удается получить такие результаты, как следствие теоремы 3.2. Их приходится доказывать отдельно.

Теорема 3.6. *В условиях теоремы* 3.2 *функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(W(\mu))\exp(-A_0(\mu)); \mu_2 = \nu_1\Big\}$$

для $x \in (a,b)$ *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи:*

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x))U(x) = -\lambda_2 g_2(x)U_{\lambda_1}(x),$$
$$U(a+) = 0, \qquad U(b-) = 0,$$

где функция $U_{\lambda_1}(x)$ *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи при* $x \in (a,b)$:

$$\frac{1}{2}U''_{\lambda_1}(x) - (\lambda_1 g_1(x) + f(x))U_{\lambda_1}(x) = -\lambda_1 g_1(x)F(x),$$
$$U_{\lambda_i}(a+) = 0, \qquad U_{\lambda_i}(b-) = 0.$$

Для момента ν_2 результат будет аналогичный.

4. Приложения. Приведем несколько примеров использования п олученных результатов.

Пример 4.1. Вычислим вероятность того, что момент $H_{a,b}\wedge\nu$ для процесса броуновского движения реализуется через границу a, где момент ν определим как $\nu(0,\tau)=\min\{s:\int_0^s \frac{c}{W^2(v)}dv\geqslant\tau\}$. При этом $0<a<b$.

Функция $U(x)=\mathbf{P}_x\{W(H^{\nu}_{a,b})=a\}$ является решением дифференциальной задачи

$$\frac{1}{2}U''(x)-\frac{\lambda c}{x^2}U(x)=0,\qquad U(a)=1,\qquad U(b)=0.$$

Фундаментальные решения этого уравнения имеют вид $\varphi(x)=x^{\frac12+\frac12\sqrt{1+8\lambda c}}$, $\psi(x)=x^{\frac12-\frac12\sqrt{1+8\lambda c}}$.

Обозначим $\rho(x,y)=\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi(x)$, тогда

$$\mathbf{P}_x\{W(H^{\nu}_{a,b})=a\}=\frac{\rho(x,b)}{\rho(a,b)}.$$

Пример 4.2. Найдем вероятность того, что момент $\mu_2(\tau_1,\tau_2)=H_{a,b}\wedge[\nu_1(0,\tau_1)\vee\nu_2(0,\tau_2)]$ реализуется на моменте остановки $\nu_1(0,\tau_1)$. Пусть $g_1(x)=\frac{c_1}{x^2}$, $g_2(x)=\frac{c_2}{x^2}$, $f(x)=0$ для всех $x\in[a,b]$, $0<a<b$. Тогда обозначим $U(x)=\mathbf{P}_x(\mu_2(\tau_1,\tau_2)=\nu_1(0,\tau_1))$. Функция $U(x)$ является решением задачи

$$\frac{1}{2}U''(x)-\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2}{x^2}U(x)=-\frac{\lambda_2c_2}{x^2}U_{\lambda_1}(x), \tag{4.1}$$

$$U(a)=0,\qquad U(b)=0, \tag{4.2}$$

где функкия $U_{\lambda_1}(x)=\mathbf{P}_x(H_{a,b}\wedge\nu_1=\nu_1)$, в свою очередь, удовлетворяет задаче

$$\frac{1}{2}U''_{\lambda_1}(x)-\frac{\lambda_1c_1}{x^2}U_{\lambda_1}(x)=-\frac{\lambda_1c_1}{x^2}, \tag{4.3}$$

$$U_{\lambda_1}(a)=0,\qquad U_{\lambda_1}(b)=0. \tag{4.4}$$

Общее решение уравнения (4.3) имеет вид:

$$U_{\lambda_1}(x)=1+c_1\varphi(x)+c_2\psi(x),$$

где $\varphi(x)=x^{\frac12+\frac12\sqrt{1+8\lambda_1c_1}}$, $\psi(x)=x^{\frac12-\frac12\sqrt{1+8\lambda_1c_1}}$ – фундаментальные решения (4.3).

Обозначая $\rho(x,y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$, с учетом граничных условий (4.4), находим решение уравнения (4.3):

$$U_{\lambda_1}(x) = 1 + \frac{\psi(a)-\psi(b)}{\rho(a,b)}\varphi(x) - \frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{\rho(a,b)}\psi(x).$$

Подставляя найденную функцию $U_{\lambda_1}(x)$ в уравнение 4.1, находим общее решение:

$$U(x) = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2} + \frac{\psi(a)-\psi(b)}{\rho(a,b)}\varphi(x) - \frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{\rho(a,b)}\psi(x) + \varkappa_1\tilde{\varphi}(x) + \varkappa_2\tilde{\psi}(x),$$

где $\tilde{\varphi}(x) = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8(\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2)}}$, $\tilde{\psi}(x) = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+8(\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2)}}$ – фундаментальные решения (4.1).

Обозначая $\tilde{\rho}(x,y) = \tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(y) - \tilde{\varphi}(y)\tilde{\psi}(x)$, при условиях (4.2) находим константы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и получаем окончательный результат:

$$\begin{aligned} U(x) = {}& \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2} + \frac{\psi(a)-\psi(b)}{\rho(a,b)}\varphi(x) - \frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{\rho(a,b)}\psi(x) + \\ & + \frac{\tilde{\psi}(a)\Big(U_{\lambda_1}(b) - \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2}\Big) - \tilde{\psi}(b)\Big(U_{\lambda_1}(a) - \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2}\Big)}{\tilde{\rho}(a,b)}\tilde{\varphi}(x) + \\ & - \frac{\tilde{\varphi}(a)\Big(U_{\lambda_1}(b) - \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2}\Big) - \tilde{\varphi}(b)\Big(U_{\lambda_1}(a) - \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2}\Big)}{\tilde{\rho}(a,b)}\tilde{\psi}(x). \end{aligned}$$

Пример 4.3. Рассмотрим теперь распределение функционала, остановленного в момент $H_{a,b} \wedge \nu(0,\tau)$, где положим функцию $g(x)$ для момента $\nu(0,\tau)$ равной $\mathbf{1}_{[r,\infty)}(x)$, то есть $\nu(0,\tau) = \min\{s : \int_0^s \mathbf{1}_{[r,\infty)}(W(v))dv \geqslant \tau\}$. Пусть $F(x) = 1$, $f(x) = \alpha$, $a < r < b$.

Функция $U(x) = \mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(H_{a,b}\wedge\nu(0,\tau))}\}$ является при $x \in (a,b)$ непрерывным вместе с первой производной решением следующей дифференциальной задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda\mathbf{1}_{(r,b)}(x) + \alpha)U(x) = -\lambda\mathbf{1}_{(r,b)}(x),$$
$$U(a) = U(b) = 1.$$

Решением такой задачи будет функция

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{\varkappa_1}{\zeta}\dfrac{\operatorname{sh}((x-a)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})} + \dfrac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})}, & x \in [a,r), \\ \dfrac{\lambda}{\lambda+\alpha} + \dfrac{\varkappa_2}{\zeta}\dfrac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})} + & \\ \qquad + \dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha}\dfrac{\operatorname{sh}((x-a)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})}, & x \in [r,b], \end{cases}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda+\alpha}}\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})(1-\operatorname{ch}((b-r)\sqrt{2(\lambda+\alpha)}))+$$

$$\sqrt{\alpha}\operatorname{ch}((b-r)\sqrt{2\alpha})\operatorname{sh}((b-r)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})-$$

$$\sqrt{\lambda+\alpha}\operatorname{ch}((b-r)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})\operatorname{sh}((b-r)\sqrt{2\alpha}),$$

$$\varkappa_2 = \sqrt{\alpha}\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})(1-\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\operatorname{ch}((r-a)\sqrt{2\alpha}))-$$

$$\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}[\sqrt{\alpha}\operatorname{ch}((r-a)\sqrt{2\alpha})\operatorname{sh}((r-a)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})-$$

$$\sqrt{\lambda+\alpha}\operatorname{ch}((r-a)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})\operatorname{sh}((r-a)\sqrt{2\alpha})],$$

$$\zeta = \sqrt{\lambda+\alpha}\operatorname{ch}((b-r)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})\operatorname{sh}((r-a)\sqrt{2\alpha})+$$

$$\sqrt{\alpha}\operatorname{sh}((b-r)\sqrt{2(\lambda+\alpha)})\operatorname{ch}((r-a)\sqrt{2\alpha}).$$

Пример 4.4. Вычислим распределение интегрального функционала, остановленного в момент максимума из моментов, обратных к локальным временам.

Пусть $\nu_1(\beta_1,\tau_1) = \min\{s : \beta_1\ell(r,s) \geqslant \tau_1\}$, $\nu_2(\beta_2,\tau_2) = \min\{s : \beta_2\ell(q,s) \geqslant \tau_2\}$, $F(x)=1$, $f(x)=\alpha$.

Функция $U(x) = \mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(\nu_1\vee\nu_2)}\}$ по теореме 3.2 из [2] удовлетворяет в области $x\in(a,b)\backslash\{r,q\}$ дифференциальной задаче

$$\frac{1}{2}U''(x) - \alpha U(x) = 0,$$

$$U'(r+) - U'(r-) = 2\lambda_1\beta_1 U(r) - 2\lambda_1\beta_1 U_{\lambda_2}(r),$$

$$U'(q+) - U'(q-) = 2\lambda_2\beta_2 U(q) - 2\lambda_2\beta_2 U_{\lambda_1}(q),$$

и условию ограниченности на бесконечности $|U(\pm\infty)| < \infty$.

Здесь функции $U_{\lambda_i}(x) = \mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(\nu_1)}\}$, $i=1,2$, по теореме 2.2 из [2] удовлетворяют в области $x\in(a,b)\backslash\{r,q\}$ дифференциальной задаче

$$\frac{1}{2}U''_{\lambda_i}(x) - \alpha U_{\lambda_i}(x) = 0,$$

$$U'_{\lambda_i}(r+) - U'_{\lambda_i}(r-) = 2\lambda_i\beta_i U_{\lambda_i}(r) - 2\lambda_i\beta_i,$$

$$U'_{\lambda_i}(q+) - U'_{\lambda_i}(q-) = 2\lambda_i\beta_i U_{\lambda_i}(q) - 2\lambda_i\beta_i,$$

и условиям ограниченности на бесконечности $|U_{\lambda_i}(\pm\infty)| < \infty$.

Решение будет иметь вид:

$$U(x)=\begin{cases} \Big[\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\Big(1-(1+\frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_2\beta_2})e^{2\sqrt{2\alpha}(q-r)}\Big)- \\ -\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1\beta_1}e^{\sqrt{2\alpha}(q-r)}\Big]\dfrac{e^{(x-r)\sqrt{2\gamma}}}{\gamma}, & x\leqslant r, \\ \Big(\dfrac{\alpha_1}{\gamma_1}-\dfrac{\alpha_2}{\gamma_2}(1+\dfrac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_2\beta_2})e^{(q-r)\sqrt{2\gamma}}\Big)\dfrac{e^{(q-x)\sqrt{2\alpha}}}{\gamma}+ \\ \qquad +\Big(\dfrac{\alpha_2}{\gamma_2}-\dfrac{\alpha_1}{\gamma_1}(1+\dfrac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1\beta_1})e^{(q-r)\sqrt{2\alpha}}\Big)\dfrac{e^{(x-r)\sqrt{2\alpha}}}{\gamma}, & r<x\leqslant q, \\ \Big[\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\Big(1-(1+\frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1\beta_1})e^{2\sqrt{2\alpha}(q-r)}\Big)- \\ -\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_2\beta_2}e^{\sqrt{2\alpha}(q-r)}\Big]\dfrac{e^{(q-x)\sqrt{2\alpha}}}{\gamma}, & q<x, \end{cases}$$

где при $i=1,2$

$$\gamma_i=(\lambda_i\beta_i)^2-e^{2\sqrt{2\alpha}(q-r)}\big(\lambda_i\beta_i+\sqrt{2\alpha}\big)^2,$$

$$\alpha_i=(\lambda_i\beta_i)^2(1-e^{2\sqrt{2\alpha}(q-r)})-\lambda_i\beta_i\sqrt{2\alpha}e^{\sqrt{2\alpha}(q-r)}(1+e^{\sqrt{2\alpha}(q-r)}),$$

$$\gamma=1-\Big(1+\frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_1\beta_1}\Big)\Big(1+\frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda_2\beta_2}\Big)e^{2\sqrt{2\alpha}(q-r)}.$$

5. Описание общего случая, когда момент остановки содержит операции максимумов и минимумов. Перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть наш момент остановки μ образован из момента $H_{a,b}$ и n моментов, обратных к интегральному функционалу – $\nu_1(0,\tau_1),\ldots,\nu_n(0,\tau_n)$ – при помощи произвольной комбинации максимумов и минимумов. Мы можем преобразовать наш момент остановки, раскрыв все скобки, к виду $\mu=I_1\vee I_2\vee\ldots\vee I_k$, $k\leqslant n+1$, где каждый момент I_l, $l=1,\ldots,k$ образован только посредством операции минимума из наших моментов. Заметим, что каждый момент I_l содержит не все моменты $H_{a,b}$, $\nu_1(0,\tau_1),\ldots,\nu_n(0,\tau_n)$, а не более n моментов (случай, когда момент μ состот из одного момента I_1 тривиален и описан нами в теореме 2.1).

Можно распространить принцип, описанный в замечании 3.1 и на моменты, включающие в себя более одной операции максимумов. Таким образом, получим следующую формулу для математических ожиданий от функционалов, остановленных в момент максимальный из данных моментов остановки:

$$U_\mu = \sum_{i=1}^{k} U_{I_i} - \sum_{i<j} U_{I_i \wedge I_j} + \sum_{i<j<l} U_{I_i \wedge I_j \wedge I_l} + \ldots + (-1)^k U_{I_1 \wedge \ldots \wedge I_k}. \quad (5.1)$$

Функции $U_{I_1 \wedge \ldots \wedge I_r}(x)$, $r = 1, \ldots, k$, являются решением задачи о распределении интегрального функционала, остановленного в момент $I_1 \wedge \ldots \wedge I_r$. Таким образом, математическое ожидание функционала, остановленного в момент, включающий в себя произвольные комбинации максимумов и минимумов, выражается через математические ожидания того же функционала, но остановленного в момент, образованный только при помощи операций минимума. А для нахождения распределений таких функционалов достаточно воспользоваться теоремами 2.1–2.5.

Приведем пример, иллюстрирующий вышесказанное. Пусть $n = 4$. Рассмотрим момент

$$\mu(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = [H_{a,b} \wedge \nu_1] \vee [(\nu_2 \vee \nu_3) \wedge \nu_4].$$

Преобразуем его к следующему виду:

$$\mu(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = (H_{a,b} \wedge \nu_1) \vee (\nu_2 \wedge \nu_4) \vee (\nu_3 \wedge \nu_4).$$

В нашем случае $I_1 = (H_{a,b} \wedge \nu_1)$, $I_2 = (\nu_2 \wedge \nu_4)$, $I_3 = (\nu_3 \wedge \nu_4)$.

Функцию $U(x) = \mathbf{E}_x \Big\{ F(W(\mu) \exp(-A_0(\mu)) \Big\}$, учитывая (5.1), перепишем следующим образом:

$$U(x) = U_{I_1} + U_{I_2} + U_{I_3} - U_{I_1 \wedge I_2} - U_{I_1 \wedge I_3} - U_{I_2 \wedge I_3} + U_{I_1 \wedge I_2 \wedge I_3} =$$
$$= U_{H_{a,b} \wedge \nu_1} + U_{\nu_2 \wedge \nu_4} + U_{\nu_3 \wedge \nu_4} -$$
$$- U_{H_{a,b} \wedge \nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_4} - U_{H_{a,b} \wedge \nu_1 \wedge \nu_3 \wedge \nu_4} - U_{\nu_2 \wedge \nu_3 \wedge \nu_4} + U_{H_{a,b} \wedge \nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3 \wedge \nu_4}.$$

Найдя при помощи теоремы 2.1 все функции в правой части выражения, мы тем самым получим распределение функционала, остановленного в момент μ.

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae, Second Edition*. Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser, 2002.
2. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный ко времени пребывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **228** (1996), 39–56.

3. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* С.–Петербург, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Наука, 1994.
4. А. В. Либер, В. А. Смирнова, *О распределении функционалов от броуновского движения с линейным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **244** (1997), 205–217.
5. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* Москва, Физматгиз, 1963.

Vagurina I. V. On distributions of additive functionals of Brownian motion stopped at the different random moments.

The distributions of additive functionals of Brownian motion stopped at the random moments are investigated. The moments are constructed by maximum and minimum operations from well-known random times, such as the moment inverse to some additive functionals and the first exit time.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 сентября 2002 г.