Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

В. А. Егоров

ОБ ОЦЕНКЕ ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМИРОВАННЫХ И САМОНОРМИРОВАННЫХ СУММ

Оцениванием хвостов распределений сумм независимых случайных величин занимались на протяжении всего развития теории вероятностей. Здесь мы только отметим показательные оценки А. Н. Колмогорова [1] и С. Н. Бернштейна [2], работы Хефдинга [3], Беннета [4], неравенства Д. Х Фука и С. В. Нагаева [5]. Обширную библиографию на эту тему можно найти в монографиях В. В. Петрова [6], [7]. С помощью этих оценок часто удается исследовать асимптотическое поведение сумм случайных величин как с точки зрения слабой, так и с точки зрения сильной сходимости. При исследовании предельного поведения таких сумм обычно предполагают выполненными некоторые условия предельной пренебрегаемости слагаемых отностительно выбранной нормировки.

При переходе к исследованию сумм, имеющих случайную нормировку, т.е. к так называемым самонормированным суммам эти условия превращаются в определенные нелинейные ограничения на слагаемые. Более того, при этих нелинейных ограничениях мы изучаем нормированные суммы, которые в случае самонормировки превращаются в нелинейные функционалы. Таким образом, задача превращается в исследование оценок некоторых нелинейных функций при нелинейных ограничениях в том случае, когда размерность стремится к бесконечности. Такие задачи можно рассматривать и без предположения о том, что исходные переменные являются случайными величинами.

Ниже мы решим одну из таких задач для сумм неотрицательных чисел и используем результат для получения верхних оценок вероятностей больших уклонений сумм положительных независимых или определенным образом зависимых случайных величин.

Данное исследование частично поддержано грантами Минобразования Е00-1.0-45 и грантом РФФИ 02-01-01099а.

Основная теорема работы, приводимая ниже, является усовершенствованием более ранних исследований автора [8], [9].

Введем следующие обозначения.

Пусть $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ - вектор размерности n с неотрицательными компонентами, $T_n = T_n(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j$ – исследуемая сумма его компонент. Положим

$$J_{n,k} = \{(j_1, j_2, \dots, j_k) : 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n\},$$

$$R_{n,k} = R_{n,k}(z) = \sum_{J_{n,k}} z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Ниже мы сравним предельное поведение T_n и $k \cdot (R_{n,k})^{1/k}$.

Теорема 1. *Пусть $A > 0$ и выполнены условия*

$$\max_{j \le n} z_j \le \epsilon A \text{ и } \alpha = e\epsilon < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Тогда, если

$$(R_{n,k})^{1/k} \le A, \tag{2}$$

то справедливо неравенство

$$\frac{T_n}{kA} \le \frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k}. \tag{3}$$

Здесь

$$d_k = (\sqrt{2\pi k})^{1/k} e^{5/(24k^2)} \cdot \frac{1}{1-\alpha}.$$

Если же

$$(R_{n,k})^{1/k} \ge A, \tag{4}$$

то справедливо неравенство

$$\frac{c_k}{e} \le \frac{T_n}{kA}. \tag{5}$$

Здесь

$$c_k = (\sqrt{2\pi k} e^{-\frac{1}{12k}})^{\frac{1}{k}}.$$

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 положить*

$$A = (R_{n,k})^{1/k},$$

то получим двойное неравенство

$$\frac{c_k}{e} \le \frac{T_n}{k(R_{n,k})^{1/k}} \le \frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k}. \tag{6}$$

Следствие 2. *Пусть в условиях следствия 1* $k = k(n) \longrightarrow \infty$ *и* $\epsilon \longrightarrow 0$. *Тогда*

$$\frac{T_n}{k \cdot (R_{n,k})^{1/k}} \longrightarrow \frac{1}{e}. \tag{7}$$

Если, кроме того, $\epsilon = \epsilon(n) = o(1/k)$, *то*

$$\frac{T_n}{k \cdot (R_{n,k})^{1/k}} = \frac{1}{e} + \frac{\ln 2\pi k}{2ek} + o(\frac{1}{k}). \tag{8}$$

В этом следствии предельный результат для самонормированных сумм не носит вероятностный характер.

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности, будем считать, что $A = 1$. Тогда, используя формулу Стирлинга, получим

$$1 \le (R_{n,k})^{1/k} \le (\frac{(T_n)^k}{k!})^{1/k} \le \frac{eT_n}{k(\sqrt{2\pi k})^{1/k}} \exp(\frac{1}{12k^2}) = c_k^{-1}\frac{e}{k}T_n.$$

Из последнего неравенства следует неравенство (5).

Доказательство неравенства (3) более трудоемко.

Пусть $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ – точка максимума функции $T_n(z)$ на множестве

$$\{z | 0 \le z_j \le \epsilon, j \le n; R_{n,k}(z) \le 1\}.$$

По части переменных максимум функции $T_n(z)$ достигается на границе куба $0 \le z_j \le \epsilon, j \le n$, по остальным переменным внутри этого куба на границе области $R_{n,k}(z) \le 1$. Не умаляя общности, можно считать, что нумерация переменных выбрана таким образом, что

$$0 < z_j^0 < \epsilon \text{ для } j = 1, 2, \dots, p;$$

$$z_j^0 = \epsilon \text{ для } j = p+1, \dots p+m; z_j^0 = 0 \text{ для } j = p+m+1, \dots, n.$$

Таким образом,

$$T_n(z^0) = m\epsilon + \sum_{j=1}^{p} z_j^0.$$

Считая m и p фиксированными, будем искать условный максимум этого выражения с помощью метода множителей Лагранжа. Дифференцируя функционал Лагранжа по переменным $z_j, j \le p$, получим уравнения

$$1 + \lambda(\frac{\partial R_{n,k}}{\partial z_j}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots p.$$

К этим уравнениям добавляется условие

$$R_{n,k} \le 1.$$

Из приведенных уравнений следует

$$\frac{\partial R_{n,k}}{\partial z_j} = \frac{\partial R_{n,k}}{\partial z_i} \quad i, j = 1, 2, \dots p.$$

Эти равенства можно переписать в виде

$$R_{n-1,k-1}(z_1, \dots z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_p, \underbrace{\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon,}_{m \text{ компонент}} \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-p-m) \text{компонент}}) =$$

$$R_{n-1,k-1}(z_1, \dots z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_p, \underbrace{\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon}_{m \text{ компонент}} \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-p-m) \text{ компонент}}).$$

Сокращая одинаковые слагаемые, получим для $i, j = 1, 2, \dots, p$ из последнего соотношения

$$z_i R_{n-2,k-2}(z_1, \dots z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, \dots z_{i-1}, z_{i+1}, \dots z_p, \underbrace{\epsilon, \dots, \epsilon}_{m \text{ компонент}}$$

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-p-m) \text{ компонент}}) =$$

$$z_j R_{n-2,k-2}(z_1, \dots z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, \dots z_{i-1}, z_{i+1}, \dots z_p, \underbrace{\epsilon, \dots, \epsilon}_{m \text{ компонент}}$$

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-p-m) \text{ компонент}}).$$

Из этих соотношений следует, что

$$z_i^0 = z_j^0, \quad i, j = 1, 2, \dots p.$$

Таким образом, мы можем положить для $i = 1, 2, \dots p$

$$z_i^0 = \gamma\epsilon, \gamma \le 1.$$

Тогда задача сводится к следующей экстремальной проблеме.

$$\text{Оценить } T_n(z_0) = \max_{m,p,\gamma}(\epsilon(m + \gamma p))$$

при условии, что $m + p \le n, \quad \gamma \le 1 \quad$ и

$$R(m, p, \gamma) = \epsilon^k \sum_{r=(k-p)^+}^{\min(k,m)} C_m^r C_p^{k-r} \gamma^{k-r} \le 1. \tag{9}$$

Положим $t = m + [\gamma p]$. Тогда

$$C_t^k = \sum_{r=(k-[\gamma p])^+}^{\min(k,m)} C_m^r C_{[\gamma p]}^{k-r}.$$

Из последних двух соотношений следует неравенство

$$R(m, p, \gamma) - \epsilon^k C_t^k \ge \epsilon^k \sum_{r=(k-[\gamma]p)^+}^{\min(k,m)} C_m^r (C_p^{k-r} \gamma^{k-r} - C_{[\gamma p]}^{k-r}). \tag{10}$$

Покажем, что последнее выражение неотрицательно. Имеем

$$C_p^{k-r} \gamma^{k-r} = \frac{1}{(k-r)!}(\gamma p)(\gamma p - \gamma)\gamma p - 2\gamma) \cdots (\gamma p - (k - r + 1)\gamma)$$

$$C_{[\gamma p]}^{k-r} = \frac{1}{(k-r)!}[\gamma p]([\gamma p] - 1)([\gamma p] - 2) \cdots (\gamma p - (k - r + 1)).$$

Каждый сомножитель из второго произведения не превосходит соответствующего сомножителя первого произведения, поэтому выражение (10) неотрицательно. Таким образом,

$$R(m, p, \gamma) \ge \epsilon^k C_t^k.$$

Из этого неравенства следует, что максимум в задаче (9) только увеличится, если условие (9) заменить на условие

$$\epsilon^k C_t^k \le 1. \tag{11}$$

Более того, в этом случае

$$T_n(z_0) \le \epsilon(t+1). \tag{12}$$

Таким образом, для получения верхней оценки величины $T_n(z_0)$ достаточно найти максимальное t (обозначим его t_k) , для которого выполняется условие (11), и подставить t_k вместо t в правую часть неравенства (12).

Если $k \ge \alpha t$, то

$$T_n(z_0) \le \epsilon \frac{k}{\alpha} + \epsilon = \frac{k}{e} + \epsilon,$$

т.е. в этом случае неравенство (3) справедливо.

Если $k < \alpha t$, то в силу формулы Стирлинга для некоторых величин $\theta_0, \theta_i, |\theta_i| \le 1, i = 0, 1, 2, 3$, справедливы соотношения

$$C_t^k = \frac{t!}{k!(t-k)!} =$$

$$\frac{t^t \sqrt{t}}{k^k (t-k)^{t-k} \sqrt{2\pi k(t-k)}} \exp\left(\frac{\theta_1}{12t} + \frac{\theta_2}{12k} + \frac{\theta_3}{12(t-k)}\right) =$$

$$\left(\frac{t}{k}\right)^k \left(1 - \frac{k}{t}\right)^{k-t} \left(2\pi k\left(1 - \frac{k}{t}\right)\right)^{-1/2} \exp \frac{\theta_0}{k}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

$$\ge \left(\frac{t}{k}\right)^k e^k (1-\alpha)^k (2\pi k)^{-1/2} \exp\left(-5/(24k)\right).$$

Значение t только увеличится, если в решаемой нами экстремальной задаче условие (11) заменить условием

$$\left(\epsilon \frac{t}{k}\right) e(1-\alpha)(2\pi k)^{-1/(2k)} \exp\left(\frac{5}{24k^2}\right) \le 1,$$

т.е. условием

$$\epsilon t \le \frac{k}{e(1-\alpha)} (2\pi k)^{1/(2k)} \exp\left(\frac{5}{24k^2}\right).$$

Из этого неравенства следует неравенство (3). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 2. Соотношение (7) вытекает из следствия 1 и сходимости к единице при $k \longrightarrow \infty$ последовательностей c_k и d_k.

Докажем (8). Имеем

$$d_k = \frac{1}{(1-\alpha)}(2\pi k)^{1/(2k)} \exp\left(\frac{5}{24k^2}\right) =$$

$$(1+o(\frac{1}{k}))(1+\frac{\ln 2\pi k}{2k}+o(\frac{1}{k}))(1+o(\frac{1}{k})) =$$

$$1+\frac{\ln 2\pi k}{2k}+o(\frac{1}{k}).$$

Аналогичное соотношение легко получается для последовательности c_k. Из этих соотношений и следствия 1 вытекает соотношение (8).

Перейдем к вероятностной части работы. Здесь мы приведем пример, ситуации когда оценить скорость роста величины $R_{n,k}$ намного проще, чем оценить скорость роста величины T_n.

Итак, пусть теперь $z_j, \quad j \le n$ - последовательность неотрицательных случайных величин. Введем условия зависимости этих величин. Будем говорить, что выполнено условие $D(k, C_k)$, если для некоторой положительной постоянной C_k

$$ER_{n,k} \le (C_k)^k \sum_{J_{n,k}} Ez_{j_1} \cdot Ez_{j_2} \cdots Ez_{j_k}.$$

Будем говорить, что выполнено условие D, если для некоторой последовательности $C_k \longrightarrow 1$ условия $D(k, C_k)$ выполнены для всех k.

Приведем примеры видов зависимости, при которых выполняются условия $D(k, 1)$.

1. Они, очевидно, выполняются для независимых случайных величин $z_j, j \le n$.

2. Они также выполняются для отрицательно ассоциированных величин $z_j, j \le n$.

Действительно, для таких величин

$$Ez_{j_1}z_{j_2}\cdots z_{j_k}\le Ez_{j_1}Ez_{j_2}\cdots z_{j_k}\le\ldots\le Ez_{j_1}Ez_{j_2}\cdots Ez_{j_k}.$$

3. Они выполняются, когда величины (z_j-Ez_j), $j\le n$, являются субмартингал-разностями.

Действительно, в этом случае, не умаляя общности, можно предположить, что $j_1\le j_2\le\ldots\le j_k$. Тогда

$$Ez_{j_1}z_{j_2}\cdots z_{j_k}=$$

$$E(Ez_{j_k}z_{j_{k-1}}\cdots z_{j_1}|z_{j_{k-1}}\cdots z_{j_1})\le$$

$$(Ez_{j_k})Ez_{j_{k-1}}\cdots z_{j_1}\le\ldots\le Ez_{j_1}Ez_{j_2}\cdots Ez_{j_k}.$$

Если выполняется условие $D(k,C_k)$, то, применяя неравенство Чебышева, получим

$$P((R_{n,k})^{1/k}>x)\le x^{-k}(C_k)^k\sum_{J_{n,k}}Ez_{j_1}\cdot Ez_{j_2}\cdots Ez_{j_k}$$

$$\le x^{-k}(C_k)^k\frac{(ET_n)^k}{k!}.$$

Заменяя здесь x на xET_n, получим неравенство

$$P((R_{n,k})^{1/k}>xET_n)\le\frac{(C_k)^k}{k!x^k}. \qquad (13)$$

Неравенство (13) с помощью формулы Стирлинга и простых вычислений позволяет получить из следствия 1 следующий результат.

Следствие 3. *Пусть $z_j, j\le n$, неотрицательные случайные величины, для которых выполняются условия $D(k,C_k)$. Тогда*

$$P(T_n>yET_n)\le\frac{(C_k)^kk^k(\frac{d_k}{e}+\frac{\epsilon}{k})^k}{k!y^k}+\sum_{j=1}^nP(z_j>\epsilon R_{n,k}^{1/k})$$

$$\le(\frac{C_k(d_k+\frac{\alpha}{k})}{y})^k\frac{\exp(\frac{1}{12k})}{\sqrt{2\pi k}}+\sum_{j=1}^nP(z_j>\epsilon R_{n,k}^{1/k}).$$

Применим теперь теорему 1 непосредственно к выводу оценок вероятностей больших уклонений для случайных сумм T_n. При этом будем предполагать, что величина A является детерминированной. В этом случае при выполнении условий (1), (2) теоремы 1 выполняется неравенство

$$T_n \leq kA(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k}),$$

поэтому

$$P(T_n > kA(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k})) \leq \sum_{j=1}^{n} P(z_j > \epsilon A) + P(R_{n,k} > A^k) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n} P(z_j > \epsilon A) + \frac{ER_{n,k}}{A^k}.$$

Поскольку величина A здесь произвольна, можно положить

$$kA(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k}) = xET_n.$$

Тогда, применяя формулу Стирлинга, получим

$$P(T_n > xET_n) \leq \sum_{j=1}^{n} P(z_j > \epsilon x \frac{ET_n}{k(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k})}) +$$

$$\frac{(C_k)^k k^k}{k!} (\frac{(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k})}{x})^k$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} P(z_j > \epsilon x \frac{ET_n}{k(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k})}) +$$

$$(C_k)^k (\frac{(d_k + \frac{\alpha}{k})}{x})^k \cdot \frac{e^{1/(12k)}}{\sqrt{2\pi k}}.$$

Таким образом, мы доказали

Следствие 4. *Пусть $z_j, j \le n$, неотрицательные случайные величины, для которых выполняются условия $D(k, C_k)$. Тогда выполняется неравенство*

$$P(T_n > yET_n) \le \sum_{j=1}^{n} P(z_j > \epsilon y \frac{ET_n}{k(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k})}) +$$

$$(C_k)^k \left(\frac{d_k + \frac{\alpha}{k}}{y} \right)^k \cdot \frac{e^{1/(12k)}}{\sqrt{2\pi k}}.$$

Следствие 5. *Предположим, что выполнено условие D,а также условия*

$$k = k(n) \longrightarrow \infty, \ \epsilon = \epsilon(n) \longrightarrow 0.$$

Предположим также, что сумма в правой части неравенства Следствия 3

$$\sum_{j=1}^{n} P(z_j > \epsilon R_{n,k}^{1/k}) = O(y^{-k}),$$

(или сумма в правой части неравенства Следствия 4)

$$\sum_{j=1}^{n} P\left(z_j > \epsilon y \frac{ET_n}{k(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k})} \right) = O(y^k).$$

Тогда

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{T_n}{ET_n} \le 1 \text{ п.н.}$$

с вероятностью единица.

Действительно, легко видеть, что при $y > 1$ правая часть соответствующего неравенства убывает со скоростью порядка $1/y^k$. Это позволяет с помощью стандартных рассуждений, обычно используемых при доказательстве сильных предельных теорем (см., например, [8]), получить доказываемую оценку в усиленном законе больших чисел. При выводе этого утверждения следует выбрать $k = k(n)$ таким образом, чтобы $(\ln \ln ET_n)/k \longrightarrow 0$.

Литература

1. A. N. Kolmogoroff, *Üeber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.* — Math. Ann., **99** (1928), **102** (1929).
2. С. Н. Бернштейн, *Теория вероятностей.* — Гостехиздат, М.-Л., 1946.
3. W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* — J. Amer. Statist. Assos., **58**, No. 301 (1963), 13–30.
4. G. Bennet, *Probability inequalities for the sum of independent random variables.* — J. Amer. Statist. Assos., **57**, No. 297 (1962), 33–45.
5. Д. Ф. Фук, С. В. Нагаев, *Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.*— Теория вероятностей и ее применения, **21**, No. 4 (1971), 600–675.
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* — М., Наука, 1972.
7. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — М., Наука, 1987.
8. В. А. Егоров, *Несколько теорем об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее применения, **17**, No. 1 (1972), 84–98.
9. В. А. Егоров, *Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для мартингалов и сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее применения, **35**, No. 4 (1990), 691–704.

Egorov V. A. An estimate of the tail of the destribution for normolized and self-normolized sums.

Some combinatorical inequality is derived. Using it, new estimates are proved for probabilities of large deviation of normalized and self-normalized sums of independent and dependent positive random values. As a consequence a right-hand estimate is derived for strong law of large numbers.

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет

E-mail: usr.etu.spb.ru