Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

Н. Д. Кан

МАРТИНГАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Введение

В этой работе изучается классическая задача теории вероятностей о размещении частиц по ячейкам. Еще в 18 веке изучением подобных задач занимались Муавр, Лаплас и Эйлер. В 1976 году в книге В. Ф. Колчина, Б. А. Севастьянова и В. П. Чистякова [2] впервые дается систематическое изложение важного направления в теории вероятностей, связанного со случайными размещениями. Рассматриваемая нами проблема относится к так называемой задаче коллекционера, в которой речь идет о количестве открыток или других предметов, которые надо приобрести, чтобы получить комплект, состоящий из k штук, если приобретение каждого экземпляра происходит всякий раз независимо и случайно.

Мы рассматриваем конечную урновую схему. Пусть в урне находится n абсолютно одинаковых, пронумерованных от 1 до n, шаров. Производится случайный выбор шаров из урны, причем шары извлекаются с возвращением и с одинаковыми вероятностями. Каждый раз, когда вытаскиваем шар из урны, будем говорить что мы совершаем одну попытку. Возникает вопрос – сколько различных шаров мы получим (или не получим) после определенного числа попыток?

Пусть случайная величина (с. в.) $M(r)$ обозначает число полученных различных шаров после r извлечений. Тогда $N(r) = n - M(r)$ можно рассматривать как число еще неполученных после r извлечений шаров. Будем считать, что $N(0) = n$. В другой известной формулировке этой задачи – в классической задаче о дробинках, см. [2], с.в. $N(r)$ представляет число ящиков, оставшихся пустыми после бросания r дробинок. Для $N(r)$ вычислены (см. [2]) производящие функции и различные моменты, в

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 01-01-00031 и 00-15-96019).

том числе факториальные моменты k-го порядка, где $k = 1, 2, \dots$. В [2] моменты получены с помощью метода, использующего разложение с. в. $N(r)$ в виде сумм независимых, одинаково распределенных величин. В [7] получены мартингальные последовательности, как функции от времени ожидания, необходимого для получения коллекции, т.е. рассматривается задача, в некотором смысле обратная той, которую исследуем мы. Мы предлагаем мартингальный метод для нахождения различных моментных характеристик с. в. $N(r)$.

С помощью этого метода, кроме уже известных соотношений для факториальных моментов положительного порядка, можно получить также вид факториальных моментов отрицательного порядка, логарифмических моментов и некоторых других характеристик с.в. $N(r)$. Нами использован подход, который разработал В. Б. Невзоров (см., например, [4] и [5]) для исследования рекордных величин.

Этот метод позволил нам найти также моментные характеристики и для некоторых более общих вариантов задачи коллекционера.

§1. Классическая задача коллекционера

Предложение 1.1. *Последовательность* $N(1)$, $N(2), \dots$ *образует цепь Маркова, причем*

$$\mathrm{P}\{N(r) = m | N(r-1) = m\} = 1 - \frac{m}{n},$$

$$\mathrm{P}\{N(r) = m-1 | N(r-1) = m\} = \frac{m}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Для с. в. $N(r)$ *верна следующая теорема:*

Теорема 1.1. *Последовательность с. в.*

$$(1) \quad T(r) = N(r) \left(\frac{n}{n-1} \right)^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

образует мартингал.

Доказательство. Рассмотрим

$$E(N(r) | N(r-1) = m, \quad N(r-2), \dots, N(1), N(0)) =$$

$$= E(N(r) | N(r-1) = m) = m \left(1 - \frac{m}{n} \right) +$$

$$+(m-1)\frac{m}{n} = m\left(\frac{n-1}{n}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда верно следующее:

$$E\left(N(r)\left(\frac{n}{n-1}\right)^r |N(r-1) = m\right) = m\left(\frac{n}{n-1}\right)^{r-1}, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Последнее утверждение полностью доказывает утверждение теоремы.

Следствие 1.1.

$$EN(r) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

В частности $EN(0) = n$, $EN(1) = n-1$ и т. д. Таким образом, вид мартингальной последовательности (1) позволяет легко получать математические ожидания с. в. $N(r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Полученный в теореме 1.1. результат представляет частный случай более общей теоремы.

Пусть $N_k(r) = N(r)(N(r)-1)\ldots(N(r)-k+1)$. Для с. в. $N_k(r)$ верна следующая теорема.

Теорема 1.2. *Последовательность с. в.*

$$T_k(r) = N_k(r)\left(\frac{n}{n-k}\right)^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

образует мартингал.

Доказательство. Поскольку

$$E(N_k(r)|N(r-1) = m, \quad N(r-2), \ldots, N(0)) =$$

$$= m(m-1)\ldots(m-k+1)\left(1-\frac{m}{n}\right) + (m-1)\ldots(m-k)\frac{m}{n} =$$

$$= (m-1)\ldots(m-k+1)m\left(\frac{n-k}{n}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n, \quad k \le n-1,$$

то получаем равенство

$$E(N_k(r)|N_k(r-1), \ldots, N_k(0)) = E(N_k(r)|N_k(r-1)) =$$

$$= \left(\frac{n-k}{n}\right)N_k(r-1),$$

из которого следует утверждение теоремы.

Замечание 1.1. Результат теоремы 1.2 другим способом был получен в работе [2].

Заметим, что

$$N_k(r) = 0, \quad \text{если} \quad r > 0 \quad \text{и} \quad k \geq n;$$
$$N_k(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1), \quad \text{при} \quad k \leq n;$$
$$N_k(0) = 0, \quad \text{если} \quad k > n.$$

Из теоремы 1.2 получаем следующий результат.

Следствие 1.2.

$$ET_k(r) = \begin{cases} \dfrac{(n)!}{(n-k)!}, & k < n, \\ 0, \quad k \geq n, & r \geq 1, \\ n!, \quad k = n, & r = 0, \end{cases}$$

тогда

$$EN_k(r) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^r, & k < n, \quad r \geq 0, \\ \dfrac{n!}{(n-k)!}, & k \leq n, \quad r = 0, \\ 0, \quad k > n, & r = 0, \\ 0, \quad k \geq n, & r \geq 1. \end{cases}$$

Используя теорему 1.2, легко вычислить начальные и центральные моменты второго порядка.

Следствие 1.3.

$$EN^2(r) = \begin{cases} n(n-1)\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^r + n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r, & n \geq 2, \\ 0, \quad n = 1, & r \geq 1, \\ 1, \quad n = 1, & r = 0, \end{cases}$$

и

$$DN(r) = \begin{cases} n(n-1)\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^r + n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r - n^2\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2r}, & n \geq 2, \\ 0, \quad r = 1, & n = 1. \end{cases}$$

Для смешанных моментов второго порядка имеет место следующий результат.

Следствие 1.4. *Пусть $k < l$, тогда*

$$ET(k)T(l) = E\left(ET(k)T(l)|T(k)\right) = ET(k)E\left(T(l)|T(k)\right) = ET^2(k)$$

и

$$EN(k)N(l) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k+l} ET(k)T(l) =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k+l} EN^2(k)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2k} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{l-k} EN^2(k).$$

Следствие 1.5. *Если $k \le l$, то*

$$\operatorname{cov}\left(N(k), N(l)\right) =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{l-k}\left(n(n-1)\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k} + n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right) - \\ - n^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{l+k}, \quad n \ge 2, \\ 0, \quad n = 1, \quad l + k \ge 1, \quad l \ge 1 \\ n - n^2, \quad n = 1, \quad l = k = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $0 \le i < j < l < m$. Рассмотрим отношения

$$V_1 = \frac{T(j)}{T(i)} \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{T(m)}{T(l)}.$$

Для V_1 и V_2 справедлив следующий результат.

Лемма 1.1. *Справедливы равенства*

$$EV_1 = EV_2 = 1, \quad \operatorname{cov}(V_1, V_2) = 0.$$

Доказательство.

$$EV_1 = E\frac{T(j)}{T(i)} = E\left(E\left(\frac{T(j)}{T(i)}|T(i)\right)\right) = E\left(\frac{1}{T(i)}E(T(j)|T(i))\right) = 1.$$

Аналогично $EV_2 = 1$.
Для доказательства второго равенства достаточно доказать, что $EV_1V_2 = 1$. Справедливы соотношения

$$EV_1V_2 = E(EV_1V_2|T(l)) = E\left(V_1\frac{1}{T(l)}E(T(m)|T(l))\right) =$$

$$= EV_1 \frac{1}{T(l)} T(l) = EV_1 = 1.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.1 следует, что

$$E\frac{N(j)}{N(i)} = E\frac{T(j)}{T(i)} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-i} \quad \text{для любых} \quad 0 \le i < j,$$

и

$$\operatorname{cov}\left(\frac{N(j)}{N(i)}, \frac{N(m)}{N(l)}\right) = 0, \quad \text{для любых} \quad 0 \le i \le j \le l \le m.$$

Обозначим $N_{-k}(r) = \frac{1}{(N(r)+1)\ldots(N(r)+k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $EN_{-k}(r)$ представляют собой факториальные моменты отрицательного порядка. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Последовательность*

$$T_{-k}(r) = N_{-k}(r) \left(\frac{n}{n+k}\right)^r, \quad r = 0, 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2\ldots$$

образует мартингал и

$$EN_{-k}(r) = \left(\frac{n+k}{n}\right)^r \frac{n!}{(n+k)!}, \quad r = 0, 1, \ldots, n \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство.

$$E(N_{-k}(r) | N(r-1) = m, N(r-2), \ldots, N(0)) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)} \left(1 - \frac{m}{n}\right) + \frac{1}{m(m+1)\ldots(m+k-1)} \frac{m}{n} =$$

$$= \frac{1}{n(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)} \left(\frac{n-m}{m+k} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)(m+k)} \left(\frac{n+k}{n}\right).$$

Если $m = 0$, тогда $E(N_{-k}(r) | N(r-1) = 0) = \frac{1}{k!}$. Случай $m = 0$ возможен лишь при $r > n$, цледовательно, при $r = 0, 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$ последовательность

$$T_{-k}(r) = N_{-k}(r) \left(\frac{n}{n+k}\right)^r$$

образует мартингал, что доказывает утверждение теоремы.

Обозначим
$$f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Новый вид мартингальной последовательности для $N(r)$ дает следующая теорема.

Теорема 1.4. *Последовательность*
$$T(r) = n\,(f(n-1) - f(N(r))) - r + 1, \quad r = 1, 2, \ldots$$
образует мартингал и
$$Ef(N(r)) = f(n-1) - \frac{r-1}{n}.$$

Доказательство. Рассмотрим
$$E\,(T(r)|N(r-1) = m, N(r-2), \ldots, N(0)) =$$
$$= (n(f(n-1) - f(m)) - r + 1)\,\frac{n-m}{n} +$$
$$+ (n(f(n-1) - f(m-1)) - r + 1)\,\frac{m}{n} =$$
$$= (n-m)f(m-1) - (n-m)f(m) - \frac{(r-1)(n-m)}{n} +$$
$$+ mf(n-1) - mf(m-1) - \frac{m(r-1)}{n} = nf(n-1) - nf(m) +$$
$$+ m(f(m) - f(m-1)) - r + 1 = n(f(n-1) - f(m)) - r + 2,$$
таким образом, доказали, что $T(r)$, $r = 1, 2, \ldots$ образует мартингальную последовательность. Отсюда сразу же следует, что
$$Ef(N(r)) = f(n-1) - \frac{r-1}{n}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$
что и требовалось доказать.

Из теорем 1.3 и 1.4 вытекает следующее следствие.

Следствие 1.6.

$$E\ln N(r)=\ln n-2c-\frac{r}{n}-\frac{1}{2(n+1)}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r}\right)-$$
$$-\frac{5}{12(n+1)(n+2)}\left(1+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{r}\right)+$$
$$+\frac{5\theta}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(1+\left(1+\frac{3}{n}\right)^{r}\right),$$

где $c=0,5772\ldots$ *– константа Эйлера,* $|\theta|\leq 1$.

§2. Коллекционирование комплектами

Рассмотрим теперь более общий случай задачи коллекционера, когда шары из урны извлекаются не по одному, а комплектами по s штук. Предположим вначале, что s, где $1\leq s\leq n$, некоторая постоянная величина.

Тогда $N(0)=n$, $N(1)=n-s$.

Если $s=n$, то $N(1)=0$ и все $N(r)=0$, $r=1,2,\ldots$.

Будем считать, что $1\leq s<n$.

Предложение 2.1. *Последовательность* $N(1),N(2),\ldots$ *образует цепь Маркова, причем*

$$\mathrm{P}\{N(r)=m|N(r-1)=m\}=\frac{C_{n-m}^{s}}{C_n^s},\quad n-m\geq s\geq 1,$$

$$\mathrm{P}\{N(r)=m-k|N(r-1)=m\}=\frac{C_m^k C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s},\quad k\leq m,\quad s-k\leq n-m.$$

При $s=1$, мы получаем условия классической задачи коллекционера и, заметим, что теорема 1.1 является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Последовательность*

$$T(r)=N(r)\left(\frac{n}{n-s}\right)^{r},\quad r=0,1,2,\ldots,$$

образует мартингал.

Следствие 2.1.

$$EN(r) = \frac{(n-s)^r}{n^{r-1}}.$$

Заметим, что $EN(1) = n - s$. Таким же образом получим факториальные моменты положительного порядка. Пусть

$$N_k(r) = N(r)(N(r)-1)\dots(N(r)-k+1), \quad 1 \le s < n,$$

тогда верна следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть $k \le n - s$, тогда последовательность*

$$T_k(r) = N_k(r)\left(\frac{C_n^s}{C_{n-k}^s}\right)^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

образует мартингал.

Если $k > n - s$, то

$$T_k(r) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad r = 0,$$

и

$$T_k(r) = 0, \quad r = 1, 2, \dots.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$E(N_k(r)|N(r-1) = m) =$$

$$= \sum_{l=0}^{s}(m-l)(m-l-1)\dots(m-l-k+1)\frac{C_m^l C_{n-m}^{s-l}}{C_n^s} =$$

$$= \frac{m!}{C_n^s}\sum_{l=0}^{s}\frac{(m-l)\dots(m-l-k+1)}{(m-l)!l!}C_{n-m}^{s-l} =$$

$$= \frac{m!}{C_n^s}\sum_{l=0}^{s}\frac{(m-l)!}{(m-l-k)!(m-l)!l!}C_{n-m}^{s-l} =$$

$$= \frac{m!}{C_n^s}\sum_{l=0}^{\min(m-k,s)}\frac{1}{(m-l-k)!l!}C_{n-m}^{s-l} =$$

$$= \frac{m!}{(m-k)!C_n^s} \sum_{l=0}^{\min(m-k,s)} \frac{(m-k)!}{(m-l-k)!l!} C_{n-m}^{s-l} =$$

$$= \frac{m!}{C_n^s(m-k)!} \sum_{l=0}^{\min(m-k,s)} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l}.$$

Отметим, что $E(N_k(r)|N(r-1)=m)=0$, если $m<k$.
Поэтому можно считать, что $m \geq k$.
Далее,

$$\sum_{l=0}^{\min(m-k,s)} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{m-k} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l} = \sum\limits_{l=0}^{s} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l}, & s > m-k, \\ \sum\limits_{l=0}^{s} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l}, & s \leq m-k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{l=0}^{\min(m-k,s)} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l} = \sum_{l=0}^{s} C_{m-k}^l C_{n-m}^{s-l} = C_{n-k}^s.$$

Получили, что

$$E(N_k(r)|N(r-1)=m) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!} \dfrac{C_{n-k}^s}{C_n^s}, & m \geq k, \\ 0, & m < k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$E(N_k(r)|N(r-1)=m) = N_k(r-1)\frac{C_{n-k}^s}{C_n^s}.$$

Отметим также, что $N(r) \leq N(1) = n-s$, если $r \geq 1$; тогда $EN_k(r)=0$, если $k>n-s$ для любого $r=1,2,\ldots$.

Поскольку $N(0)=n$, то $EN_k(0)=0$, если $k>n$ и

$$EN_k(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1), \quad \text{если} \quad k \leq n.$$

Так как $N_k(r-1)=0$, если $k>N(r-1)$, получаем, что

$$T_k(r)=N_k(r)\left(\frac{C_n^s}{C_{n-k}^s}\right)^r, \quad r=0,1,2,\dots$$

является мартингалом, если $k\le n-s$.

Если $k>n-s$, то $N_k(0)=\frac{n!}{(n-k)!}$, а $N_k(r)=0$, $r=1,2,\dots$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.2.

$$EN_k(r)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-k)!}\left(\dfrac{C_{n-k}^s}{C_n^s}\right)^r, & r=0,1,2,\dots,\quad k=1,2,\dots,n-s,\\ 0, & r=1,2,\dots,\quad k=n-s+1,n-s+2,\dots,\\ \dfrac{n!}{(n-k)!}, & r=0,\quad k=n-s+1,\dots,n,\\ 0, & r=0,\quad k=n+1,n+2,\dots.\end{cases}$$

Отметим, что если $s=1$, то

$$EN_k(r)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-k)!}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^r, & r=0,1,2,\dots,\quad k=1,2,\dots n-1,\\ 0, & r=1,2,\dots,\quad k=n,n+1,\dots,\\ \dfrac{n!}{(n-k)!}, & r=0,\quad k\le n,\\ 0, & r=0,\quad k=n+1,n+2,\dots.\end{cases}$$

Если $k=1$, то $EN_1(r)=EN(r)=n\left(\frac{n-s}{n}\right)^r=\frac{(n-s)^r}{n^{r-1}}$, $r=0,1,2,\dots$, что совпадает с уже полученными результатами.

Рассмотрим теперь случай, когда размер комплекта случаен. Пусть S – случайное число шаров, извлеченных за одну попытку. Обозначим $\mathrm{P}(S=s)=p_s$ и $a_k=\mu_k(n-S)=E(n-S)(n-S-1)\dots(n-S-k+1)$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3. *Если $a_k\ne 0$, тогда последовательность*

$$T_k(r)=N_k(r)\left(\frac{n!}{(n-k)!a_k}\right)^r, \quad r=0,1,2,\dots$$

образует мартингал.

Доказательство. Рассмотрим

$$E(N_k(r)|N(r-1)=m, S=s)=\begin{cases} m(m-1)\dots(m-k+1)\dfrac{C_{n-k}^s}{C_n^s}, \\ m\ge k, \quad n-k\ge s, \\ 0, \quad m<k \quad \text{или} \quad n-k<s. \end{cases}$$

Тогда

$$E(N_k(r)|N(r-1)=m)=\begin{cases} m(m-1)\dots(m-k+1)\displaystyle\sum_{s=0}^{n}\frac{C_{n-k}^s}{C_n^s}p_s, \\ m\ge k, \\ 0, \quad k>m. \end{cases}$$

После несложных вычислений получаем, что

$$E(N_k(r)|N(r-1)=m)=\begin{cases} m(m-1)\dots(m-k+1)\dfrac{(n-k)!}{n!}a_k, \\ m\ge k, \\ 0, \quad k>m. \end{cases}$$

То есть $E(N_k(r)|N(r-1)=m)=N_k(r-1)\frac{(n-k)!}{n!}a_k$, $r=1,2,\dots$. Отсюда получаем утверждение теоремы.

Замечание 2.1. В случае, когда $a_k=0$, имеем

$$\mathrm{P}\,(S\ge n-k+1)=1.$$

Тогда $EN_k(r)=0$, $r=1,2,\dots$. Заметим также, что

$$EN_k(0)=n(n-1)\dots(n-k+1), \quad k\le n$$

и

$$E_k(0)=0, \quad k>n.$$

Следствие 2.3.

$$EN_k(r)=\begin{cases} \left(\dfrac{(n-k)!}{n!}\right)^{r-1} a_k^r, \quad k\le n, \quad a_k>0, \quad r=1,2,\dots, \\ 0, \quad k>n, \quad r=0,1,2,\dots, \\ 0, \quad a_k=0, \quad r=1,2,\dots, \\ \dfrac{n!}{(n-k)!}, \quad a_k=0, \quad r=0. \end{cases}$$

В том случае, когда $\mathrm{P}(S=s)=1$ получаем, что

$$a_k = \frac{(n-s)!}{(n-s-k)!}$$

и

$$EN_k(r) = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{C_{n-k}^s}{C_n^s}\right)^r,$$

что совпадает с результатом следствия 2.2. Если $k=1$ и S – случайная величина, то

$$EN(r) = \left(\frac{1}{n}\right)^{r-1} a_1^r, \quad \text{где} \quad a_1 = E(n-S) = n-a,$$

т. е.

$$EN(r) = n\left(\frac{a_1}{n}\right)^r = n\left(1-\frac{a}{n}\right)^r.$$

Автор выражает благодарность В. Ф. Колчину и В. Б. Невзорову за ценные замечания и поддержку.

Литература

1. Н. Д. Кан, *Мартингальный подход к задаче о коллекционировании купонов.* — Обозр. прикл. и пром. математики **8** (1), (2001), 204.
2. В. Ф. Колчин, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, *Случайные размещения.* Наука, М. (1976).
3. В. Б. Невзоров, *Мартингальные методы исследования рекордов.* — В кн.: Статистика и управление случайными процессамию, М. (1989), 156–160.
4. В. Б. Невзоров, *Рекорды. Математическая теория.* Фазис, М. (2000).
5. В. Б. Невзоров, *Рекорды.* — Теория вероятн. и ее применен. **32** (2), (1987), (219–251).
6. В. Б. Невзоров, А. В. Степанов, *Рекорды: мартингальный подход к нахождению моментов.* — В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей вып.2, Л., ЛГУ (1988), 171–181.
7. N. Pintacuda, *Coupons Collectors via the Martingales.* — Bolletino U M.I. **17**-A, (5) (1980), 174–177.
8. A. Rényi, *Three new proofs and a generalization of a theorem of Irving Weiss.* — Publ. Math. Hung. Acad. Sci. **7** (1962), 203–214.
9. W. Stadje, *The collector's problem with group drawings.* — Adv. in Appl. Probab. **22** (4), (1990), 866–882.

Kan N. D. Martingale approach to the coupon collection problem.

The new method for obtaining different moment characteristics in the coupon collector's problem is developed. Various martingale consequences were obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
emails: natalya_ kan@pochtamt.ru
ntalk@yandex.ru

Поступило 12 ноября 2002 г.