Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

**В. В. Петров**

# О РОСТЕ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## 1. Результаты

Пусть $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность независимых случайных величин, и пусть $\{a_n; n = 1, 2, \ldots\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, такая, что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Нас будут интересовать условия, при которых выполнены соотношения

$$\limsup \frac{S_n}{a_n} \leqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

или

$$\limsup \frac{S_n}{a_n} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{2}$$

В дальнейшем $\Psi_c$ (соответственно, $\Psi_d$) будет означать множество функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором $x_0$ и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится (соответственно, расходится). Значение $x_0$ не предполагается одним и тем же для различных функций $\psi$. Например, $\psi(x) = x^{\alpha} \in \Psi_c$ для любого $\alpha > 0$; если $\psi(x) = (\ln x)^{1+\delta}$, то $\psi(x) \in \Psi_c$ для $\delta > 0$ и $\psi(x) \in \Psi_d$ для $\delta = 0$.

Мы будем говорить, что выполнено условие (B), если для любого $\delta > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что $P(S_n - S_k \geqslant -\delta a_n) \geqslant \lambda$ для всех $k \leqslant n$ и всех достаточно больших $n$.

Очевидно, условие (B) выполнено, если случайные величины из рассматриваемой последовательности симметричны, а также в том случае, когда $S_n/a_n \to 0$ по вероятности.

**Теорема 1.** *Пусть выполнено условие* (B). *Пусть, далее, для любого $x$ из некоторого интервала $1 < x < 1 + \beta$ существуют поло-*

Работа была поддержана грантом РФФИ 02-01-00779 и грантом ведущих научных школ 00-15-96019.

*жительная постоянная $C$ и функция $\psi \in \Psi_c$ такие, что*

$$P\big(S_n \geqslant x a_n\big) \leqslant \frac{C}{\psi(a_n)} \tag{3}$$

*для всех достаточно больших $n$. Тогда имеет место неравенство* (1).

**Теорема 2.** *Пусть*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

*Предположим, что условия теоремы* 1 *выполнены для последовательности $\{X_n\}$ и для последовательности $\{-X_n\}$. Предположим также, что для любого $x$ из некоторого интервала $1-\beta < x < 1$ существуют положительная постоянная $c$ и функция $\psi \in \Psi_d$ такие, что*

$$P\big(S_n \geqslant x a_n\big) \geqslant \frac{c}{\psi(a_n)} \tag{5}$$

*для всех достаточно больших $n$. Тогда имеет место равенство* (2).

Можно показать, что условие (B) выполнено для обеих последовательностей $\{X_n\}$ и $\{-X_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $p > \frac{1}{2}$ такая, что $P(|S_n| \leqslant \varepsilon a_n) \geqslant p$ для всех достаточно больших $n$.

Теоремы 1 и 2 представляют собой обобщения результатов работ [1–4].

В [1] была доказана теорема 1 для частного случая $\psi(x) = (\ln x)^{1+\gamma}$, где $\gamma > 0$, при дополнительном условии (4) и при замене условия (B) более сильным условием. В отличие от настоящей работы, в [3] и [4] предполагалось, что случайные величины из рассматриваемой последовательности имеют конечные дисперсии; там найдены достаточные условия для неравенства (1) при $a_n = (2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}$, где $B_n = \operatorname{var} S_n$.

## 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\tau$ – произвольное положительное число. Определим последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ следующим образом: пусть $n_1$ таково, что $a_{n_1} > e$; при данном $k$ ($k \geqslant 2$) определим $n_k$ как наименьшее целое, для которого $a_{n_k} > (1+\tau) a_{n_{k-1}}$.

Здесь мы используем условие $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и предположение о том, что числовая последовательность $\{a_n\}$ не убывает. Таким образом,

$$a_{n_k-1} \leqslant (1+\tau)a_{n_{k-1}} < a_{n_k}. \tag{6}$$

Очевидно, $n_{k-1} < n_k$ для любого $k \geqslant 2$ и $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Неравенство (1) будет доказано, если мы покажем, что

$$P\big(S_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ i.o.}\big) = 0 \tag{7}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть – произвольное положительное число. Положим $\overline{S}_n = \max\limits_{k \leqslant n} S_k$. Принимая во внимание неравенство (6), получаем

$$P\big(S_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ i.o.}\big) \leqslant P\big(\max_{n_{k-1} \leqslant n < n_k} S_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ i.o.}\big) \leqslant$$

$$\leqslant P\big(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\varepsilon)a_{n_{k-1}} \text{ i.o.}\big) \leqslant P\left(\overline{S}_{n_k-1} > \frac{1+\varepsilon}{1+\tau} a_{n_k-1} \text{ i.o.}\right).$$

Пусть $\gamma$ – произвольное положительное число, такое, что $\gamma < \varepsilon$. Если $\tau$ достаточно мало, то $(1+\varepsilon)/(1+\tau) > 1+\gamma$ и

$$P\big(S_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ i.o.}\big) \leqslant P\big(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\gamma)a_{n_k-1} \text{ i.o.}\big). \tag{8}$$

Для доказательства равенства (7) достаточно показать, что

$$\sum_k P\big(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\gamma)a_{n_k-1} \text{ i.o.}\big) < \infty \tag{9}$$

для любого $\gamma > 0$, поскольку в силу леммы Бореля–Кантелли из (9) следует, что правая часть неравенства (8) равна нулю.

С этой целью применим теорему 2.3 из [5]: если $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, удовлетворяющие условию

$$P(S_n - S_k \geqslant -C) \geqslant q \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

где $C \geqslant 0$ и $q > 0$ – некоторые постоянные, то

$$P(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant \frac{1}{q} P(S_n \geqslant x - C)$$

для любого $x$. В силу этого предложения из условия (B) следует, что для любого $\delta > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что $P(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant \frac{1}{\lambda} P(S \geqslant x - \delta a_n)$ для любого $x$ и всех достаточно больших $n$.

Пусть $\gamma$ – произвольное положительное число. Если $0 < \delta < \frac{\gamma}{2}$, то

$$P\big(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\gamma)a_{n_k-1}\big) \leqslant \frac{1}{\lambda} P\big(S_{n_k-1} > (1+\gamma)a_{n_k-1} - \delta a_{n_k-1}\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} P\left(S_{n_k-1} > \left(1+\frac{\gamma}{2}\right)a_{n_k-1}\right) \qquad (10)$$

для всех достаточно больших $k$.

Из (6) следуют неравенства

$$a_{n_k-1} \geqslant a_{n_{k-1}} \geqslant (1+\tau)^{k-2} a_{n_1} > (1+\tau)^{k-2} \qquad (11)$$

для любого $k \geqslant 2$. В силу условия (3) для любого $x > 1$ существуют постоянная $C$ и функция $\psi \in \Psi_c$ такие, что

$$P\Big(S_{n_k-1} \geqslant x a_{n_k-1}\Big) \leqslant \frac{C}{\psi(a_{n_k-1})} \leqslant \frac{C}{\psi((1+\tau)^{k-2})} \qquad (12)$$

для всех достаточно больших $k$.

По лемме 1 из [2] ряд $\sum \frac{1}{\psi(r^k)}$ сходится для любой функции $\psi \in \Psi_c$ и любого $r > 1$. Поэтому (9) следует из (10) и (12). Теорема 1 доказана.

## 3. Доказательство теоремы 2

В силу условий теоремы 2 и уже доказанной теоремы 1 справедливо неравенство (1). Поэтому равенство (2) будет доказано, если мы покажем, что

$$P\big(S_n > (1-\varepsilon)a_n \text{ i.o.}\big) = 1 \qquad (13)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть $\tau$ – произвольное положительное число. Определим последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ таким же образом, как в доказательстве теоремы 1. Из (6) и условия (4) вытекает существование предела

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k-1}}} = 1+\tau. \qquad (14)$$

Следовательно,

$$a_{n_k} > \left(1+\frac{\tau}{2}\right)a_{n_{k-1}} \qquad (15)$$

для всех достаточно больших $k$.

Для произвольных событий A и B имеет место неравенство

$$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})\geqslant P(A)-P(\overline{B}),$$

где $\overline{B}$ – событие, противоположное событию B. Поэтому для любого положительного $\gamma<1$ имеем

$$\begin{aligned}
&P\Big(S_{n_k}-S_{n_{k-1}}>(1-\gamma)a_{n_k}\Big)\geqslant\\
\geqslant&P\Big(\Big[S_{n_k}>\Big(1-\frac{\gamma}{2})a_{n_k}\Big]\cap\Big[S_{n_{k-1}}<\frac{\gamma}{2}a_{a_{n_k}}\Big]\Big)\geqslant\\
\geqslant&P\Big(S_{n_k}>\Big(1-\frac{\gamma}{2}\Big)a_{n_k}\Big)-P\Big(S_{n_{k-1}}\geqslant\frac{\gamma}{2}a_{a_{n_k}}\Big)\geqslant\\
\geqslant&P\Big(S_{n_k}>\Big(1-\frac{\gamma}{2}\Big)a_{n_k}\Big)-P\Big(S_{n_{k-1}}\geqslant\frac{\gamma}{2}\Big(1+\frac{\tau}{2}\Big)a_{n_{k-1}}\Big)
\end{aligned}\tag{16}$$

для всех достаточно больших $k$ вследствие (15). Если $\tau$ достаточно велико, то $\frac{\gamma}{2}(1+\frac{\tau}{2})>1$ и

$$P\Big(S_{n_{k-1}}>\frac{\gamma}{2}\Big(1+\frac{\tau}{2}\Big)a_{n_{k-1}}\Big)\leqslant\frac{C}{\psi(a_{n_{k-1}})}$$

для некоторой функции $\psi\in\Psi_c$ и всех достаточно больших $k$ в силу условия (3). Используя неравенства (11), получаем

$$\sum_k P\Big(S_{n_{k-1}}>\frac{\gamma}{2}\Big(1+\frac{\tau}{2}\Big)a_{n_{k-1}}\Big)<\infty.\tag{17}$$

Из условия (5) следует, что

$$P\Big(S_{n_k}>\Big(1-\frac{\gamma}{2}\Big)a_{n_k}\Big)\geqslant\frac{c}{\psi(a_{n_k})}$$

для всех достаточно больших $k$, где $c$ – положительная постоянная и $\psi$ – некоторая функция класса $\Psi_d$. В силу (14) имеем $a_{n_k}<(1+2\tau)a_{n_{k-1}}$ для $k\geqslant k_0$ и некоторого $k_0$. Поэтому

$$a_{n_k}<(1+2\tau)^{k-1}a_{n_1}<(1+2\tau)^k,$$

если $k\geqslant k_0$ и $\tau$ достаточно велико. Таким образом,

$$P\Big(S_{n_k}>\Big(1-\frac{\gamma}{2}\Big)a_{n_k}\Big)\geqslant\frac{c}{\psi((1+2\tau)^k)}$$

для $k\geqslant k_0$

Нетрудно показать, что ряд $\sum \frac{1}{\psi(r^k)}$ расходится для любой функции $\psi \in \Psi_d$ и любого $r > 1$; доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы 3.27 из [6], соответствующей значению $r = 2$. Отсюда заключаем, что

$$\sum_k P\Big(S_{n_k} > \Big(1 - \frac{\gamma}{2}\Big) a_{n_k}\Big) = \infty. \qquad (18)$$

В силу (16)–(18) имеем

$$\sum_k P\Big(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma) a_{n_k}\Big) = \infty$$

и

$$P\Big(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma) a_{n_k} \text{ i.o.}\Big) = 1 \qquad (19)$$

для любого положительного $\gamma < 1$ в силу леммы Бореля–Кантелли.

Условия теоремы 2 обеспечивают выполнение неравенства (1) для последовательности $\{-X_n\}$, и мы получаем

$$\limsup \frac{-S_n}{a_n} \leqslant 1 \quad \text{п. н.}$$

и

$$\liminf \frac{S_n}{a_n} \geqslant -1 \quad \text{п. н.}$$

Отсюда и из (1) следует, что

$$\limsup \frac{|S_n|}{a_n} \leqslant 1 \quad \text{п. н.} \qquad (20)$$

Пусть $\Omega$ – пространство элементарных событий, на котором определены случайные величины из последовательности $\{X_n\}$. Принимая во внимание неравенство (20), находим, что $|S_n(\omega)| \leqslant 2a_n$ для $n \geqslant n_0(\omega)$ и всех $\omega \in \Omega$, за исключением множества точек нулевой вероятностной меры. Пусть $\varepsilon$ – произвольное положительное число. Выберем положительные числа $\gamma$ и $\tau$ таким образом, что $1 - \gamma - \frac{2}{1+\tau/2} > 1 - \varepsilon$. В силу (15) имеем

$$(1-\gamma) a_{n_k} - 2a_{n_{k-1}} > \Big(1 - \gamma - \frac{2}{1+\frac{\tau}{2}}\Big) a_{n_k}$$

для всех достаточно больших $k$. Поэтому

$$P\Big(S_{n_k} > (1-\varepsilon)a_{n_k}\ \text{i.o.}\Big) \geqslant P\Big(S_{n_k} > (1-\gamma)a_{n_k} - 2a_{n_{k-1}}\ \text{i.o.}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant P\Big(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma)a_{n_k}\ \text{i.o.}\Big) = 1$$

вследствие (19). Отсюда следует (13). Теорема 2 доказана.

Пользуюсь случаем отметить две существенные опечатки в работе [4]. Автором статьи 4 из списка литературы на стр. 186 является В. А. Егоров. В определении последовательности целых чисел $\{n_k\}$ на стр. 184 слова “определим $B_{n_k}$” следует заменить словами “определим $n_k$”.

## Литература

1. В. В. Петров, *О росте сумм независимых случайных величин.* — Доклады АН СССР **205**, No. 6 (1972), 1296–1299.
2. В. В. Петров, *Некоторые оценки для сумм зависимых случайных величин, имеющие место почти наверное.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **55** (1976), 113–116.
3. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее примен. **46**, No. 3 (2001), 569–571.
4. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 182–186.
5. V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory.* Oxford University Press (1995).
6. У. Рудин, *Основы математического анализа.* Мир, М. (1966).

Petrov V.V. On the growth of sums of independent random variables.

Some estimates of the growth of sums of independent random variables almost surely are established without any moment conditions.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 1 ноября 2002 г.