Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

Л. В. Розовский

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

1. Введение. Результаты

Рассмотрим независимые случайные величины $X, X_1, X_2, \dots$ с общей функцией распределения V. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$ $(n \geqslant 1)$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\mathbf{P}\left(S_n < x\,B_n\right) \to \Phi(x),\ n \to \infty, \tag{1.1}$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, а $\{B_n\}$ – некоторая положительная последовательность.

Как известно, из (1.1) следует, что $\mathbf{E}\,X = 0$ и что функция $D(z) = \mathbf{E}\,X^2\,I[|X| < z]$ медленно меняется при $z \to \infty$, а также то, что $B_n \to \infty$ и удовлетворяет условию

$$B_n^2 \sim n\,D(B_n), \quad n \to \infty. \tag{1.2}$$

Целью работы является изучение некоторых аспектов асимптотического поведения вероятностей $\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha b_n\right)$, где α – положительное число, b_n – положительная последовательность, монотонно растущая к бесконечности и удовлетворяющая некоторым дополнительным ограничениям. В частности, получены необходимые и достаточные условия для того чтобы ряд $\sum\limits_n f_n\,\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha b_n\right)$ сходился или, после некоторой нормировки, имел предел при $\alpha \searrow \alpha_0$, где α_0 положительная постоянная, а f_n – некоторая положительная последовательность довольно общего вида.

Работа поддержана грантом Мин. Образования No. E00-1.0-45, грантом РФФИ No. 02-01-01099 и грантом ведущих научных школ No. 00-15-96019 .

Таким образом, мы продолжаем исследования из [1–3, 5–10]. Приведем основной результат работы [7], которая послужила основной мотивацией для настоящего исследования.

Теорема А. *Предположим, что*

$$\mathbf{E}\,X = 0, \quad \mathbf{E}\,X^2 = 1 \tag{1.3}$$

и, кроме того,при некотором $\delta > 0$

$$\mathbf{E}\,[X^2(\ln^+ \ln^+ |X|^{1+\delta}] < \infty. \tag{1.4}$$

Тогда

$$\lim_{\alpha \searrow \sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 - 2} \sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{n}\, \mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \alpha\sqrt{n \ln\ln n}\right) = \sqrt{2}. \tag{1.5}$$

Авторы [7] отмечают, что им неизвестно, будет ли условие (1.4) необходимым для выполнения (1.5), и интересуются возможными односторонними вариантами этого соотношения.

Ответом на эти вопросы является одно следствие полученных нами результатов.

Теорема Б. *Пусть выполняется условие* (1.3). *Если*

$$\int\limits_{|x|>z} x^2 dV(x) = \frac{o(1)}{\ln\ln z}, \quad z \to \infty, \tag{1.6}$$

то

$$\lim_{\alpha \searrow \sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 - 2} \sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{n}\, \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha\sqrt{n \ln\ln n}\right) = \sqrt{2}/2. \tag{1.7}$$

Заметим, что предположение (1.6) в отличие от условия (1.4) является оптимальным.

Перейдем к изложению результатов.

Пусть последовательность $\{b_n\}$ удовлетворяет условиям

$$b_n \;\; \text{не убывает} \;\; , \; \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant M < \infty, \tag{1.8}$$

$$\frac{b_n}{B_n} \to \infty, \quad \frac{b_n}{n} \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty. \tag{1.9}$$

Нас будет интересовать поведение обобщенных сумм

$$I_q(\alpha) = \left(\sum_{n \geqslant n_0} \left(\frac{g(b_n)}{n} \, \mathbf{P} \left(S_n \geqslant \alpha b_n \right) \right)^q \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} \right)^{1/q}, \tag{1.10}$$

где постоянная $q \in [1, \infty]$, положительная функция $g(y)$, $y > 0$, при некотором $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$g(y)/y^\delta \quad \text{убывает на } [1, \infty), \tag{1.11}$$

а $\alpha > 0$ (при $q = \infty$ полагаем $I_\infty(\alpha) = \sup\limits_{n \geqslant n_0} \frac{g(b_n)}{n} \, \mathbf{P} \left(S_n \geqslant \alpha b_n \right)$).

Таким образом, если $q = 1$, то мы имеем дело с рядами, возникающими при изучении закона повторного логарифма и в ряде других ситуаций (см., например, [3 , 5, 12, 13]), случай $q = \infty$ представляет стандартные большие уклонения, а случай $1 < q < \infty$ является промежуточным.

Для того чтобы сформулировать результаты, введем некоторые дополнительные обозначения. Прежде всего, положим

$$||\ldots||_q = \left(\int_1^\infty |\ldots|^q \frac{du}{u} \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty, \quad \text{и} \quad ||\ldots||_\infty = \sup_{u > 1} |\ldots|.$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} L(h, c) &= \int_{-\infty}^{c} e^{hy} \, dV(y), \qquad h \geqslant 0, \\ s(x, c) &= \sup_{h > 0} (xh - \ln L(h, c)), \end{aligned} \tag{1.12}$$

и для всех достаточно больших n (скажем, $n \geqslant n_0$) определим функцию

$$Q_n(\alpha) = n \, s(\alpha \, b_n / n, 1/h_n), \tag{1.13}$$

где последовательность $h_n \to 0$ и удовлетворяет условию

$$h_n \, D(1/h_n) \sim b_n / n, \qquad n \to \infty. \tag{1.14}$$

Отметим, что (см. [11, соотношения (7), (14) и (34)])

$$Q_n(\alpha) \sim \alpha^2 \, b_n \, h_n / 2, \;\; n \to \infty. \tag{1.15}$$

Кроме того (см. (3.14)),

$$h_n > (1-\varepsilon)\,\frac{b_n}{B_n^2}\,\frac{D(B_n)}{D(B_n^2/b_n)} \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{b_n}{B_n^2}, \quad n > n_\varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0, \tag{1.16}$$

и, в частности,

$$h_n \sim b_n/B_n^2, \quad n \to \infty, \tag{1.17}$$

тогда (и только тогда), когда

$$D(B_n) \sim D(B_n^2/b_n), \ n \to \infty. \tag{1.18}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (1.1), (1.8), (1.9) *и* (1.11). *Для того чтобы*

$$I_q(\alpha) < \infty, \tag{1.19}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\|g(u)\,\mathbf{P}\,(X \geqslant u)\|_q < \infty \tag{1.20}$$

и

$$\widehat{I}_q(\alpha) = \left(\sum_{n\geqslant n_0}\left(\frac{g(b_n)}{n}\,\frac{1}{\sqrt{b_n\,h_n}}\,e^{-Q_n(\alpha)}\right)^q \ln\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{1/q} < \infty. \tag{1.21}$$

Кроме того, если положительная функция $f(t) \to 0$ *при* $t \to +0$ *и постоянная* $\alpha_0 > 0$, *то*

$$\lim_{\alpha\searrow\alpha_0} f(\alpha-\alpha_0)\,I_q(\alpha) = 1 \tag{1.22}$$

тогда и только тогда, когда имеют место соотношения (1.20) *и*

$$\lim_{\alpha\searrow\alpha_0} f(\alpha-\alpha_0)\,\widehat{I}_q(\alpha) = \alpha_0\sqrt{2\pi}. \tag{1.23}$$

Замечание 1. Условие (1.20) при $q = 1$ равносильно условию

$$\int_1^\infty \widehat{g}(u)\,dV(u) < \infty, \tag{1.24}$$

где $\widehat{g}(u) = \int_1^u g(u)\,\frac{du}{u}$. Кроме того (доказательство см. в п. 3),

$$\begin{aligned}\|g(u)\,\mathbf{P}\,(X \geqslant u)\|_\infty \leqslant & e^{\delta}\,\|g(u)\,\mathbf{P}\,(X \geqslant u)\|_q \leqslant \\ \leqslant & e^{\delta q}\,\|g(u)\,\mathbf{P}\,(X \geqslant u)\|_1\,,\end{aligned} \tag{1.25}$$

т.е., если условие (1.20) выполняется при $q = 1$, то оно также выполняется при любом $q > 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, дополнительно,* $\widehat{I}_q(\alpha) < \infty$, $\alpha > \alpha_0 > 0$, *и* $\lim\limits_{\alpha \searrow \alpha_0} \widehat{I}_q(\alpha) = \infty$. *Тогда соотношения* (1.20) *и*

$$\lim_{\alpha \searrow \alpha_0} \frac{I_q(\alpha)}{\widehat{I}_q(\alpha)} = \frac{1}{\alpha_0 \sqrt{2\pi}} \tag{1.26}$$

равносильны.

Очевидно, что теорема 2 является следствием теоремы 1 при $f(t) = \alpha_0 \sqrt{2\pi} / \widehat{I}_q(t + \alpha_0)$.

Замечание 2. Если дополнительно известно, что

$$b_n / B_n \sqrt{\ln B_n} \to \infty, \ \ n \to \infty, \tag{1.27}$$

то условие (1.21) выполняется при *всех* $\alpha > 0$ и, следовательно, соотношение (1.23) не может быть справедливым ни при каком $\alpha_0 > 0$.

Замечание 2 несложно проверяется при помощи соотношений (1.15), (1.16) и (1.2), (1.8), (1.9).

Замечание 3. Из доказательств следует, что теоремы 1 и 2 останутся справедливыми, если в их формулировках функцию $g(\cdot)$ заменить функцией $r(\cdot)\, g(\cdot)$, где $r(\cdot)$ удовлетворяет условию $\varepsilon \leqslant r(u) \leqslant 1/\varepsilon$, $u > u_0$, при некотором положительном ε.

Из замечания 3, в частности, следует, что если

$$\frac{b_n}{B_n} \nearrow \infty, \quad \frac{b_n}{n} \searrow 0 \text{ при } n \uparrow \infty, \tag{1.28}$$

а

$$B_n / \sqrt{n} \nearrow, \tag{1.29}$$

то в выражениях $I_q(\alpha)$, $\widehat{I}_q(\alpha)$ множитель $\ln \frac{b_{n+1}}{b_n}$ можно одновременно заменить на $1/n$ без изменения соответствующих результатов.

Отметим, что условия (1.8) и (1.9) вытекают из (1.28), (1.29), а для того чтобы удовлетворить условиям (1.2) и (1.29), можно при $\mathbf{Var}\, X = \sigma^2 < \infty$ положить $B_n = \sigma \sqrt{n}$ или, в общем случае, выбрать в качестве B_n, $n > n_0$, единственное решение уравнения $B_n^2 = n \int\limits_0^{B_n} 2u\, \mathbf{P}\big(|X| > u\big)\, du$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (1.27)–(1.29). *Тогда соотношения* $\int_0^\infty x^t\,dV(x)<\infty$ $(t\geqslant 2)$ *и*

$$\sum_n \frac{b_n^t}{n^2}\,\mathbf{P}\left(S_n\geqslant b_n\right)<\infty \tag{1.30}$$

эквивалентны между собой.

Следствие 1 вытекает из теоремы 1 $(g(u)=u^t)$ и замечаний 1–3.

Следующее утверждение уточняет соответствующие результаты из [3] и [10].

Следствие 2. *Пусть выполнено условие* (1.3). *Если*

$$\phi_n\nearrow\infty \quad \text{и} \quad \phi_n/\sqrt{n}\searrow 0 \quad \text{при} \quad n\uparrow\infty,$$

то

$$I_q(\alpha)=\left(\sum_{n\geqslant n_0}\left(\phi_n^2\,\mathbf{P}\left(S_n\geqslant\alpha\sqrt{n}\phi_n\right)\right)^q\frac{1}{n}\right)^{1/q}<\infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\widehat{I}_q(\alpha)=\left(\sum_{n\geqslant n_0}\left(\phi_n\,e^{-Q_n(\alpha)}\right)^q\frac{1}{n}\right)^{1/q}<\infty,$$

где (*см.* (1.13) *при* $b_n=\sqrt{n}\phi_n$) $Q_n(\alpha)=\alpha\sqrt{n}\phi_n\overline{h}_n-n\ln L(\overline{h}_n,\sqrt{n}/\phi_n)$ *и* $\overline{h}_n$ *является единственным решением уравнения* $\left(\ln L(h,\sqrt{n}/\phi_n)\right)'_h=\alpha\phi_n/\sqrt{n}$.

Кроме того, если $\lim\limits_{\alpha\searrow\alpha_0}\widehat{I}_q(\alpha)=\infty$ *при некотором* $\alpha_0>0$ (*и* $\widehat{I}_q(\alpha)<\infty$ *при всех* $\alpha>\alpha_0$), *то справедливо соотношение* (1.26).

Следствие 2 вытекает из теорем 1, 2 при $g(u)=u^2$, $B_n=\sqrt{n}$ (см. также (1.13), (1.14)) и замечания 3, поскольку по (1.25) условие (1.20) следует из (1.13).

В следующем пункте мы приведем еще несколько следствий теорем 1 и 2.

2. Следствия

Сначала сформулируем некоторые утверждения, которые позволяют в ряде частных случаев упростить процедуру проверки условий (1.21), (1.23). Напомним, что ввиду замечания 2 нам следует рассматривать не слишком быстро возрастающие последовательности $\{b_n\}$.

Пусть

$$R_+(z) = \mathbf{P}\,(X > z), \quad R_-(z) = \mathbf{P}\,(X < -z),$$

$$R(z) = R_+(z) + R_-(z) = \mathbf{P}\,(|X| > z)$$

и (см. (1.2)) $D(z) = \mathbf{E}\,X^2\,I[|X| < z]$.

Лемма 1. *Пусть $b_n = B_n\phi_n$, где $\phi_n = \phi(B_n)$, а функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям*

$$\phi(z) \nearrow \infty \quad \text{и } \phi(z) \sim \phi(z/\phi(z)) \quad \text{при } z \nearrow \infty. \tag{2.1}$$

Если (см. (1.2))

$$\frac{z^2}{D(z)}\,R(z) = O\left(\frac{1}{\phi(z)}\right)^2, \quad z \to \infty, \tag{2.2}$$

и

$$1 - \frac{n}{B_n^2}\,D(B_n/\phi_n) = O\left(\frac{1}{\phi_n}\right)^2, \ n \to \infty, \tag{2.3}$$

то (см. (1.13))

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}\,\phi_n^2 + O(1), \ n \to \infty. \tag{2.4}$$

Если

$$\frac{z^2}{D(z)}\,R(z) = o\left(\frac{1}{\phi(z)}\right)^2, \quad z \to \infty, \tag{2.5}$$

и

$$1 - \frac{n}{B_n^2}\,D(B_n/\phi_n) = o\left(\frac{1}{\phi_n}\right)^2, \ n \to \infty, \tag{2.6}$$

то

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}\,\phi_n^2 + o(1), \ n \to \infty. \tag{2.7}$$

Кроме того, если при некоторых постоянных c_+, c_- *и* a

$$\frac{z^2}{D(z)}\,R_\pm(z) = (c_\pm + o(1))\left(\frac{1}{\phi(z)}\right)^2, \quad z\to\infty, \tag{2.8}$$

и

$$1-\frac{n}{B_n^2}\,D(B_n/\phi_n) = (a+o(1))\left(\frac{1}{\phi_n}\right)^2,\ n\to\infty, \tag{2.9}$$

то

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}\,\phi_n^2 - a\,\alpha^2/2 - c_+\,A(\alpha) - \ c_-\,A(-\alpha) + o(1),\ n\to\infty, \tag{2.10}$$

где

$$A(\alpha) = 1 + 2\alpha + 2\alpha^2\int_0^\alpha \frac{e^t-1-t-t^2/2}{t^3}dt.$$

При этом, соотношения (2.4), (2.7) *и* (2.10) *выполняются равномерно по* $0<\varepsilon\leqslant\alpha<1/\varepsilon$ $(\forall\varepsilon>0)$.

Доказательство леммы 1 приведено в п. 4.

Обращаем внимание на то, что из условий (2.3) и (1.2) вытекает (1.18) и, следовательно, имеет место (1.17). Другими словами, в условиях леммы 1 $b_n\,h_n\sim\phi_n^2$, $n\to\infty$. Заметим еще, что (2.1) выполняется, если

$$\phi(z)\to\infty \quad\text{и}\quad 0<z\phi'(z) = o(1)\phi(z)/\ln\phi(z) \quad\text{при } z\to\infty. \tag{2.11}$$

В самом деле, в этом случае при $t=\ln\phi(z)$ и $\theta\in(0,1)$

$$\phi(z)\geqslant\phi(ze^{-t}) = \phi(z) - t\phi'(ze^{-\theta t})ze^{-\theta t}\geqslant$$
$$\geqslant\phi(z) - t\max_{z/\phi(z)\leqslant u\leqslant z} u\phi'(u)\sim\phi(z),\ z\to\infty.$$

Из леммы 1 и теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть последовательность* B_n *из условия* (1.1) *не убывает, а функции* $g(y)$ *и* $\phi(z)$ *удовлетворяют условиям* (1.11) *и* (2.1); $b_n = B_n\phi_n$, *где* $\phi_n = \phi(B_n)$.

Если выполнены условия (2.2) *и* (2.3), *то соотношение* (1.19)(*при* $\alpha>0$) *справедливо тогда и только тогда, когда имеют место условия* (1.20) *и*

$$\widetilde{I}_q(\alpha) = \left(\sum_{n\geqslant n_0}\left(\frac{g(b_n)}{n\,\phi_n}\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}\,\phi_n^2}\right)^q \ln\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{1/q} < \infty. \tag{2.12}$$

Если $\widetilde{I}_q(\alpha) < \infty$, $\alpha > \alpha_0 > 0$, $\widetilde{I}_q(\alpha_0) = \infty$ *и выполнены условия* (2.8), (2.9), *то из* (1.20) *следует*

$$\lim_{\alpha \searrow \alpha_0} \frac{I_q(\alpha)}{\widetilde{I}_q(\alpha)} = c(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0\sqrt{2\pi}}\, e^{a\,\alpha_0^2/2 + c_+\,A(\alpha_0) +\ c_-\,A(-\alpha_0)} \tag{2.13}$$

(*и наоборот*).

Приведем одно следствие теоремы 3 (подробнее см. конец п. 3).

Следствие 3. *Пусть выполнены условия* (1.11), (2.11) *и* (2.8), (2.9), $\phi_n = \phi(B_n)$, *причем последовательность* B_n *из условия* (1.1) *такая, что*

$$\lim n\,\frac{B_{n+1}^2 - B_n^2}{B_n^2} = 1. \tag{2.14}$$

Предположим также, что

$$\widetilde{J}_q(\alpha) = \left\| \frac{g(u\phi(u))}{u^2\phi(u)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}\phi^2(u)} \right\|_q < \infty,\ \alpha > \alpha_0 > 0,\ \text{и}\ \widetilde{J}_q(\alpha_0) = \infty.$$

Тогда из условия

$$\|g(u)\,R_+(u)/D(u)\|_q < \infty, \tag{2.15}$$

следует, что

$$\left(\sum_{n\geqslant n_0}\left(\frac{g(B_n\,\phi_n)}{B_n^2}\,\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha B_n\,\phi_n\right)\right)^q \frac{1}{n}\right)^{1/q} \sim$$

$$\sim c(\alpha_0)\,2^{1/q}\,\widetilde{J}_q(\alpha), \quad \alpha \searrow \alpha_0 \tag{2.16}$$

(*и наоборот*). *Здесь* $c(\alpha_0)$ *такое же, как в* (2.13).

Отметим, что если в условии (2.8) $c_+ \neq 0$, то (2.15) равносильно условию $\left\|\frac{g(u)}{u^2\phi^2(u)}\right\|_q < \infty$; если

$$\lim_{u\to\infty}\frac{g(u)}{u^2\phi^2(u)} = \infty\,(q=\infty)\ \text{или}\ \lim\inf_{u\to\infty}\frac{g(u)}{u^2\phi^2(u)} > 0\,(q<\infty),$$

то из (2.15) следует, что в условии (2.8) $c_+ = 0$.

Далее, в форме замечаний приведем некоторые следствия леммы 1, касающиеся возможного выбора нормирующих последовательностей $\{B_n\}$ и соотношений между постоянными $c_\pm$ и a.

Замечание 4. Пусть выполняется условие (1.3). Если $b_n = \sqrt{n}\phi_n$, где $\phi_n = \phi(\sqrt{n})$, а функция $\phi(z)$ удовлетворяет (2.1), то из условия

$$\overline{D}(z) = \int\limits_{|y|>z} y^2 dV(y) = O\left(\frac{1}{\phi(z)}\right)^2, \ z \to \infty, \tag{2.17}$$

следует (2.4), а из условия

$$\overline{D}(z) = (a + o(1))\left(\frac{1}{\phi(z)}\right)^2, \ z \to \infty \tag{2.18}$$

(где a – некоторая неотрицательная постоянная), вытекает соотношение

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}(\phi_n^2 - a) + o(1), \ n \to \infty, \tag{2.19}$$

равномерно по $0 < \varepsilon \leqslant \alpha < 1/\varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$.

Замечание 4 и нижеследующие замечания 5 и 6 будут доказаны в п. 3.

Положим $\widetilde{D}(z) = 2\int\limits_0^z uR(u)du$.

Замечание 5. Пусть B_n, $n > n_0$, является единственным решением уравнения

$$\widetilde{D}(B_n)/B_n^2 = 1/n. \tag{2.20}$$

Если

$$\mu(z) = \frac{2}{D(z)} \int\limits_{z/\phi(z)}^{z} uR(u)du = o(1)\left(\frac{1}{\phi(z)}\right)^2, \ z \to \infty,$$

то выполняется условие (2.7).

Если $\mu(z) = O(1)\,(1/\phi(z))^2$, $z \to \infty$, то имеет место (2.4).

Если при некотором положительном a

$$\mu(z) = \frac{a + o(1)}{\phi^2(z)}, \ z \to \infty, \tag{2.21}$$

и при некоторой постоянной c^*

$$\frac{z^2}{D(z)}\,R(z) = \frac{c^* + o(1)}{\phi^2(z)}, \quad z \to \infty, \tag{2.22}$$

то $c^* = 0$ и справедливо соотношение (2.19).

Отметим, что (2.21) выполняется, когда

$$\frac{z^2}{D(z)}\,R(z) = \frac{a+o(1)}{2\phi^2(z)\,\ln\phi(z)}, \quad z\to\infty. \tag{2.23}$$

Замечание 6. Пусть B_n, $n>n_0$, является (единственным) решением уравнения

$$\widetilde{D}(B_n/\phi_n)/B_n^2 = 1/n. \tag{2.24}$$

Тогда

$$(2.2)\Longrightarrow(2.4);\quad (2.5)\Longrightarrow(2.7);\quad (2.8)\Longrightarrow(2.10)\ \text{ при }\ a=c_-+c_+.$$

Обращаем внимание на следующий факт: если $B_n=\sqrt{n}$ или определяется так же, как в замечаниях 5 и 6, то условие (2.14) удовлетворяется.

Исследуем теперь асимптотическое (по α) поведение функции $\widetilde{J}_q(\alpha)$, введенной в следствии 3, при некотором частном выборе функций g и ϕ.

Введем обозначения. Пусть $\varkappa_\beta(u)$ и $\rho_\gamma(u)$ являются положительными функциями, правильно меняющимися на бесконечности с показателями β и γ, соответственно; $\ln_k u$ обозначает k – кратный натуральный логарифм u, то есть, $\ln_1 u=\ln u$, $\ln_2 u=\ln\ln u,\ldots$; $c_q(\nu)=(\Gamma(q\nu)q^{-q\nu})^{1/q}$, $\nu>0$ (при $q=\infty$ полагаем $c_\infty(\nu)=\lim\limits_{q\uparrow\infty}c_q(\nu)=(\nu/e)^\nu$); $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)=\alpha^2/2-t$, где t – некоторая положительная постоянная.

Лемма 2.

а) *Пусть* $\nu=\frac{1}{q}+\frac{t+1}{2}+\gamma-\beta t>0$ *и*

$$\phi(u)=\sqrt{\ln\left(u\varkappa_\beta(\ln u)\right)};\quad g(u)\sim u^{t+2}\rho_\gamma(\ln u),\ u\to\infty.$$

Тогда

$$\widetilde{J}_q(\alpha)\sim c_q(\nu)(1/\varepsilon)^{\frac{1}{q}+\frac{t+1}{2}}\rho_\gamma(1/\varepsilon)\varkappa_\beta^{-t}(1/\varepsilon),\ \alpha\searrow\sqrt{2t}.$$

б) *Пусть целое* $k\geqslant 1$, $\nu=\frac{1}{q}+\frac{1}{2}+\gamma-\beta t>0$ *и*

$$\phi(u)=\sqrt{\ln\left(\varkappa_\beta(\ln_{k+1}u)\,\ln_k u\right)};$$

$$g(u)\sim u^2\rho_\gamma(\ln_{k+1}u)(\ln_k u)^t/(\prod_{l=1}^{k}\ln_l u)^{1/q}\ \ u\to\infty.$$

Тогда

$$\widetilde{J}_q(\alpha) \sim c_q(\nu)(1/\varepsilon)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}\rho_\gamma(1/\varepsilon)\varkappa_\beta^{-t}(1/\varepsilon),\ \alpha \searrow \sqrt{2t}.$$

c) *Пусть* $0 < \beta < 1/2$, $\nu = \frac{\beta+\gamma}{2\beta} > 0$, *функция* $\varkappa(z)/z^{1-2\beta} \to 0$ *при* $z \to \infty$, *и*

$$\phi(u) = (\ln_k u + \varkappa(\ln_k u))^\beta, \tag{2.25}$$

$$g(u) \sim u^2 \exp\{t\,(\ln_k u)^{2\beta}\}\rho_\gamma(\ln_k u)/\Big(\prod_{l=1}^{k}\ln_l u\Big)^{1/q},\ u \to \infty.$$

Тогда

$$\widetilde{J}_q(\alpha) \sim c_q(\nu)(2\beta)^{-1}\sqrt{1/\varepsilon}\,\rho_\gamma(1/\varepsilon^{\frac{1}{2\beta}}),\ \alpha \searrow \sqrt{2t}. \tag{2.26}$$

Заметим, что в (2.25) $\phi^2(u) = \ln_k^{2\beta}(u) + o(1)$, $u \to \infty$, вследствие чего при вычислении асимптотики (2.26) вместо $\phi(u)$ можно рассматривать $\ln_k^\beta u$.

Отметим также, что гладкие варианты функций $\phi(u)$ из леммы 2 удовлетворяют условию (2.11). Лемму 2 докажем в п. 3.

Комбинируя следствие 3, замечания 4–6 и лемму 2, можно получить ряд утверждений типа теоремы Б с относительно простыми формулировками.

Следствие 4. *Пусть постоянная* $t > 0$, *а постоянная* γ *удовлетворяет условию* $\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \gamma > 0$ *(напоминаем, что* $1 \leqslant q \leqslant \infty$*). Если выполняется условие* (1.3) *и*

$$\int\limits_{|x|>z} x^2 dV(x) = \frac{a + o(1)}{\ln\ln z},\ z \to \infty, \tag{2.27}$$

то

$$\lim_{\alpha\searrow\sqrt{2t}} (\alpha^2 - 2t)^\nu \times$$

$$\left(\sum_{n\geqslant 3}\Big((\ln n)^t(\ln\ln n)^{\gamma+1}\,\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha\sqrt{n\ln\ln n}\right)\Big)^q \frac{1}{n\ln n}\right)^{1/q} =$$

$$\frac{e^{at}}{\sqrt{\pi t}}\,2^{\nu-1}\left(\Gamma(q\nu)q^{-q\nu}\right)^{1/q}$$

тогда и только тогда, когда

$$\left(\int\limits_3^\infty \left(u^2 (\ln u)^t (\ln\ln u)^\gamma \ \mathbf{P}\left(X \geqslant u\right)\right)^q \frac{du}{u \ln u}\right)^{1/q} < \infty.$$

В частности, если $\gamma > -\frac{3}{2}$ *и*

$$\mathbf{E}\, X^2 (\ln X)^{t-1} (\ln\ln X)^\gamma \, I[X > 3] < \infty, \tag{2.28}$$

то

$$\lim_{\alpha \searrow \sqrt{2t}} (\alpha^2 - 2t)^{\frac{3}{2}+\gamma} \sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{n} (\ln n)^{t-1} (\ln\ln n)^{\gamma+1} \ \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha\sqrt{n \ln\ln n}\right) =$$

$$\frac{e^{at}}{\sqrt{2\pi t}}\, 2^{\gamma+1}\, \Gamma(\gamma + 3/2), \tag{2.29}$$

а, если $\frac{1}{2} + \gamma > 0$ *и* $\mathbf{P}\left(X > u\right) = O(u^{-2} (\ln u)^{-t} (\ln\ln u)^{-\gamma})$, $u \to \infty$, *то*

$$\lim_{\alpha \searrow \sqrt{2t}} (\alpha^2 - 2t)^{\frac{1}{2}+\gamma} \sup_{n \geqslant 3} (\ln n)^t (\ln\ln n)^{\gamma+1} \ \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha\sqrt{n \ln\ln n}\right) =$$

$$\frac{e^{at}}{2\sqrt{\pi t}} \left(\frac{1+2\gamma}{e}\right)^{\frac{1}{2}+\gamma}.$$

Чтобы обосновать следствие 4, нужно воспользоваться следствием 3 при $B_n = \sqrt{n}$, $\phi(z) = \sqrt{\ln 2 \ln z}$, замечанием 4 ((2.18), (2.19)) и леммой 2(б) при $k = 1$, $\beta = 0$, $\varkappa_\beta(u) = 2$, $\rho_\gamma(u) = 2^{t-1/q} u^\gamma$ и $g(u) = u^2 (2 \ln u)^{t-1/q} (\ln\ln u)^\gamma$ (напоминаем, что при условии (1.3) $D(u) \to 1$, $u \to \infty$).

Следствие 5. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и* (2.27). *Тогда*

$$\lim_{\alpha \searrow \sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 - 2} \sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{n} \, \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha\sqrt{n \ln\ln n}\right) = e^a \sqrt{2}/2. \tag{1.4}$$

Этот результат вытекает из следствия 4 (2.29) при $t = 1$, $\gamma = -1$ (условие (2.28) при таких t и γ выполняется, поскольку оно информативно лишь при $t > 1$ и $\forall \gamma$ или $t = 1$ и $\gamma > 0$).

При $a = 0$ следствие 5 совпадает с теоремой Б.

3. Доказательства

Положим $\overline{V}_n(x,c) = \mathbf{P}\,(S_n \geqslant x,\ \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \leqslant c)$, $\overline{V}(x) = 1 - V(x)$.

Первым делом покажем, что при всех $n > n_0$, где n_0 достаточно велико,

$$\mathbf{P}\,(S_n \geqslant \alpha b_n) \geqslant \overline{V}_n(\alpha b_n, 1/h_n) + q_n(\alpha)\, n\overline{V}(\alpha b_n),\ \ b_n\, h_n \geqslant 1/\alpha, \tag{3.1}$$

и

$$\mathbf{P}\,(S_n \geqslant \alpha b_n) \leqslant \overline{V}_n(\alpha b_n, 1/h_n) + c(l,\alpha)\, \frac{n}{b_n^l} \int\limits_0^{b_n} u^{l-1}\overline{V}(u)du, \tag{3.2}$$

где $q_n(\alpha) = \mathbf{P}\,(S_{n-1} \geqslant 0) - n\,\overline{V}(\alpha b_n)$, $l > 1$ – любая постоянная, а $c(l,\alpha)$ непрерывно зависит лишь от l и α.

Обозначим $V_c(x) = V(\min(c,x))$, $\overline{V}_c(x) = V(x) - \overline{V}_c(x)$. Имеем,

$$\mathbf{P}\,(S_n < x) = V^{*n}(x) = V_c^{*n}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} V^{*k} * V_c^{*(n-k-1)} * \overline{V}_c(x),$$

откуда, принимая во внимание, что $V_c^{*n}(\infty) - V_c^{*n}(x) = \overline{V}_n(x,c)$, получим

$$\overline{V}_n(x,c) + n\int\limits_c^{\infty} \overline{V}_{n-1}(x-y,c)dV(y) \leqslant \mathbf{P}\,(S_n \geqslant x) \leqslant$$

$$\overline{V}_n(x,c) + n\int\limits_c^{\infty} \mathbf{P}\,(S_n \geqslant x-y)dV(y). \tag{3.3}$$

Далее,

$$\overline{V}_{n-1}(z,c) \geqslant \mathbf{P}\,(S_{n-1} \geqslant z) - n\overline{V}(c). \tag{3.4}$$

Используя (3.4) в левой части (3.3) при $x = c = \alpha b_n$ и имея в виду, что $\overline{V}_n(x,c)$ убывает по c, докажем (3.1).

Теперь проверим неравенство (3.2). Докажем вначале, что при $m \leqslant n$, $l > 4$ и $x \in [\alpha b_n, 2\alpha b_n]$ для всех достаточно больших n

$$P_m(x) = \mathbf{P}\,(S_m \geqslant x) \leqslant n\overline{V}(x/l) + \left(el\,\frac{nD(x)}{x^2}\right)^{l/4}. \tag{3.5}$$

Действительно,

$$P_m(x) \leqslant n\overline{V}(x/l) + \overline{P}_m(x),$$

где $\overline{P}_m(x) = \mathbf{P}\,(\sum_{k=1}^m \overline{X}_k \geqslant x)$, а $\overline{X}_k = X_k I[|X_k| \leqslant c]$, $c = x/l$. Учитывая, что

$$|\,\mathbf{E}\,\overline{X}_k| = |\int_{-c}^{c} udV(u)| \leqslant \int_{|y|>c} |u|dV(u) = o(1)D(c)/c, \ c \to \infty$$

(напоминаем, что $\mathbf{E}\,X_k = 0$, а $D(c) = \mathbf{E}\,\overline{X}_k^2$ медленно меняется при $c \to \infty$), легко получим(см. также (1.2)) при всех $n > n_0$

$$\overline{P}_m(x) \leqslant \mathbf{P}\,(\sum_{k=1}^{m}(\overline{X}_k - \mathbf{E}\,\overline{X}_k) \geqslant x/2).$$

Остается оценить последнюю вероятность по лемме 3 из п. 5, положив в ней $Y_k = \overline{X}_k - \mathbf{E}\,\overline{X}_k$, $c = x/l$, $y = x/2$, принимая во внимание, что $Y_k \leqslant 2c$ и $\mathbf{Var}\,Y_k \leqslant D(c) \leqslant D(x)$.

Продолжим наши рассуждения. Пусть

$$\lambda_n = n\,(\overline{V}(1/h_n) - \overline{V}(\gamma b_n)), \quad \gamma = \alpha/l.$$

Заметим, что

$$\lambda_n \leqslant n h_n^k \int_0^{\gamma b_n} u^k dV(u), \quad k = l/4 - 1. \tag{3.6}$$

Сначала предположим, что $\lambda_n \geqslant 1$. Получим по (3.5) при $m = n$ и $x = \alpha b_n$, обозначив (el/α^2) через c_0,

$$P_n(\alpha b_n) \leqslant n\overline{V}(\gamma b_n) + c_0\,\lambda_n \,\left(\frac{nD(\alpha b_n)}{b_n^2}\right)^{k+1} \leqslant$$

$$n\overline{V}(\gamma b_n) + c_0\,\frac{n}{b_n^k} \int_0^{\gamma b_n} u^k dV(u)(b_n h_n)^k \left(\frac{nD(\alpha b_n)}{b_n^2}\right)^{k+1} \leqslant$$

$$c(k,\alpha)\,\frac{n}{b_n^k} \int_0^{b_n} u^{k-1}\overline{V}(u)du, \tag{3.7}$$

с учетом того, что

$$\overline{V}(\gamma b_n) \leqslant l\gamma^{-l}\, b_n^{-l} \int\limits_0^{b_n} u^{l-1}\overline{V}(u)du, \tag{3.8}$$

и

$$(b_n h_n)^k \left(\frac{nD(\alpha b_n)}{b_n^2}\right)^{k+1} =$$

$$\left(\frac{b_n}{B_n}\right)^{(2+o(1))k} \left(\frac{B_n}{b_n}\right)^{(2+o(1))(k+1)} = o(1),\ n \to \infty$$

(см. (1.2), (1.4), (1.9)). Таким образом, оценка (3.2) в случае $\lambda_n \geqslant 1$ доказана.

Теперь займемся случаем $\lambda_n < 1$. Пользуясь обозначениями из (3.5), с помощью правой части соотношения (3.3) при $x = \alpha b_n$, $c = 1/h_n$ и $\gamma = \alpha/l$, легко получим

$$P_n(\alpha b_n) \leqslant \overline{V}_n(\alpha b_n, 1/h_n) + n\overline{V}(\gamma b_n) + \max(0, \lambda_n)\, P_{n-1}(\overline{\alpha}\, b_n), \tag{3.9}$$

где $\overline{\alpha} = \alpha\,(1 - 1/l)$.

При $\lambda_n \leqslant 0$ отсюда следует (3.2).

Наконец, пусть $0 < \lambda_n < 1$. Оценим $P_{n-1}(\overline{\alpha}\, b_n)$ по (3.5) при $m = n-1$ и $x = \overline{\alpha}\, b_n$. Тогда в виду (3.6) и (3.8), полагая $\overline{\gamma} = \overline{\alpha}/l$, получим как в (3.7)

$$\lambda_n\, P_{n-1}(\overline{\alpha}\, b_n) \leqslant n\overline{V}(\overline{\gamma} b_n) + (el/\overline{\alpha}^2)^k\, \frac{n}{b_n^k} \int\limits_0^{\gamma b_n} u^k dV(u) \leqslant$$

$$c(k, \alpha)\, \frac{n}{b_n^k} \int\limits_0^{b_n} u^{k-1}\overline{V}(u)du.$$

Отсюда и из (3.9) вытекает неравенство (3.2). Таким образом, (3.2) полностью доказано.

Доказательство теоремы 1. Для того чтобы показать, что (1.19) влечет (1.20), применим неравенство (3.1), принимая во внимание тот факт, что из соотношения (1.1) следует оценка

$q_n(\alpha) \geqslant 1/3$ при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $n \geqslant n_0$. Тогда по (1.8) и (1.11) получим

$$I_q(\alpha) \geqslant c_1 \left(\int\limits_{c_2}^{\infty} \left(g(u)\,\overline{V}(u)\right)^q \frac{du}{u} \right)^{1/q}, \tag{3.10}$$

где c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные.

В самом деле, по (3.1), (1.11) и (1.8) при $\gamma = \max(1, \alpha)$

$$I_q(\alpha) \geqslant \frac{1}{3} \left(\sum_{n \geqslant n_0} \left(g(b_n)\,\overline{V}(\gamma\, b_n)\right)^q \int\limits_{\gamma\, b_n}^{\gamma\, b_{n+1}} \frac{du}{u} \right)^{1/q} \geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b_{n_0}}{\gamma\, b_{n_0+1}}\right)^{\delta} \left(\int\limits_{\gamma\, b_{n_0}}^{\infty} \left(g(u)\,\overline{V}(u)\right)^q \frac{du}{u} \right)^{1/q},$$

что и требовалось показать.

Таким образом, импликация (1.19) $\longrightarrow$ (1.20) проверена.

То, что (1.21) вытекает из (1.19), является следствием (3.1) и асимптотического равенства, справедливого равномерно по α из любого замкнутого отрезка на положительной полуоси,

$$\overline{V}_n(\alpha b_n, 1/h_n) \sim \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi b_n h_n}}\, e^{-Q_n(\alpha)}, \quad n \to \infty \tag{3.11}$$

(см. [11, лемма 1], а также [9, (24), (25)]).

Покажем теперь, что (1.20) и (1.21) влекут (1.19). Воспользуемся неравенством (3.2). Имеем,

$$I_q(\alpha) \leqslant \left(\sum_{n \geqslant n_0} \left(\frac{g(b_n)}{n}\, \overline{V}_n(\alpha b_n, 1/h_n) \right)^q \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} \right)^{1/q}$$

$$+c(l,\alpha) \left(\sum_{n \geqslant n_0} \left(\frac{g(b_n)}{b_n^l} \int\limits_0^{b_n} u^{l-1}\, \overline{V}(u) du \right)^q \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} \right)^{1/q} =$$

$$A_1(\alpha) + c(l,\alpha)\, A_2(\alpha). \tag{3.12}$$

В виду (3.11) является очевидным, что величины $A_1(\alpha)$ и $\widehat{I}_q(\alpha)$ ограничены одновременно. Оценим $A_2(\alpha)$. Пусть $1 \leqslant q < \infty$. Положим

$$T(y) = \frac{g(y)}{y^l} \int_0^y u^{l-1}\, \overline{V}(u)du, \ y > 0.$$

По условию (1.11) функция $T(y)/y^\delta$ убывает на $[1, \infty)$. Отсюда при $\mu = 1/M$ (см. (1.8)) и $b_n \leqslant u \leqslant b_{n+1}$

$$T(b_n) \leqslant b_n^\delta T(\frac{b_n}{b_{n+1}}\, u)/(\frac{b_n}{b_{n+1}}\, u)^\delta \leqslant b_n^\delta T(\mu\, u)/(\mu\, u)^\delta \leqslant \mu^{-\delta} T(\mu\, u).$$

Поэтому,

$$T^q(b_n) \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \mu^{-\delta q} \int_{b_n}^{b_{n+1}} T^q(\mu\, u) \frac{du}{u} = \mu^{-\delta q} \int_{\mu b_n}^{\mu b_{n+1}} T^q(u) \frac{du}{u}.$$

Таким образом, соотношение $A_2(\alpha) < \infty$ вытекает из $\|T(y)\|_q < \infty$(см. рассуждения, приведшие к (3.10)). Остается заметить, что последнее условие при $l > \delta$ является следствием (1.11), (1.20) и леммы 4 из п. 5. Таким образом, первое утверждение теоремы 1 при $q < \infty$ доказано. Случай $q = \infty$ проверяется аналогично.

Второе утверждение доказывается при помощи следующих рассуждений. Если условие (1.22) выполняется, то $I_q(\alpha) \leqslant 2/f(\alpha - \alpha_0) < \infty$ при некотором $\alpha > \alpha_0$ и,следовательно, имеет место (1.20). Тогда по (3.1), (3.2), (3.12) и лемме 4,

$$A_1(\alpha) \leqslant I_q(\alpha) \leqslant A_1(\alpha) + c, \quad \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + 1, \tag{3.13}$$

где c равномерно ограничено на отрезке $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$.

Соотношение (1.23) является очевидным следствием (3.13) и (3.11). Таким образом, необходимость (1.20) и (1.23) для (1.22) доказана. Достаточность проверяется аналогично. Теорема 1 полностью доказана.

Проверим (1.16). Из (1.2), (1.9), (1.14) и того, что функция $D(z)$ медленно меняется на бесконечности, следует (далее во всех предельных соотношениях предполагается, что $n \to \infty$)

$$B_n\, h_n \frac{D(B_n/B_n\, h_n)}{D(B_n)} \sim (B_n\, h_n)^{1+o(1)} \sim \frac{b_n}{B_n} \to \infty.$$

Поэтому,

$$h_n \sim \frac{b_n}{B_n^2}\frac{D(B_n)}{D(1/h_n)} > (1-\frac{1}{2}\,\varepsilon)\,\frac{b_n}{B_n^2}, \quad n > n_\varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Отсюда,

$$h_n \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{b_n}{B_n^2}\,D(B_n)/D\left(\frac{B_n^2}{(1-\varepsilon)b_n}\right) \sim (1-\varepsilon)\,\frac{b_n}{B_n^2}\,\frac{D(B_n)}{D(B_n^2/b_n)}, \quad (3.14)$$

что доказывает (1.16).

Теперь проверим соотношение (1.25) из замечания 1. Пусть $1 \leqslant q < \infty$ и $K(u) = g(u)(1-V(u))$. Тогда $\|K(u)\|_q \geqslant \left(\int_{a/e}^a K^q(u)\frac{du}{u}+\right)^{1/q} \geqslant \inf\limits_{u\in(a/e,a)} K(u)$. Допустим, что a удовлетворяет условию $\sup\limits_{u\geqslant 1} K(u) \leqslant K(a)(1+\varepsilon)$ с некоторым положительным ε. Тогда ввиду (1.11)

$$\inf_{u\in(a/e,a)} K(u) \geqslant \frac{K(a)}{a^\delta}\inf_{u\in(a/e,a)} u^\delta = K(a)\,e^{-\delta} \geqslant \frac{e^{-\delta}}{1+\varepsilon}\,\|K(u)\|_\infty\,.$$

Поэтому, $\|K(u)\|_q \geqslant \|K(u)\|_\infty\,\frac{e^{-\delta}}{1+\varepsilon}$, или, в силу произвольной малости ε,

$$\|K(u)\|_\infty \leqslant e^\delta\,\|K(u)\|_q\,. \quad (3.15)$$

Далее,

$$\|K(u)\|_q \leqslant \|K(u)\|_1^{1/q}\,\|K(u)\|_\infty^{1-1/q} \leqslant \|K(u)\|_1^{1/q}\,\left(e^\delta\,\|K(u)\|_q\right)^{1-1/q}$$

по (3.15), откуда $\|K(u)\|_q \leqslant e^{(q-1)\delta}\,\|K(u)\|_1$. Таким образом, соотношение (1.25) доказано.

Проверим замечание 4. Если выполняются условия (1.3) и (2.18), то имеет место (2.9) и, кроме того,

$$R(z) = -\int_z^\infty \frac{1}{y^2}\,d\overline{D}(y) = 2\int_z^\infty \frac{\overline{D}(z)-\overline{D}(y)}{y^3}\,dy = o(1)\frac{a+o(1)}{z^2\,\phi^2(z)}, \; z\to\infty,$$

то есть, $c_- + c_+ = 0$. Отсюда и из (2.10) получим (2.19). Другое утверждение обосновывается аналогично.

Докажем третье утверждение в замечании 5 (первые два проверяются аналогично с упрощениями). Предварительно отметим, что условие (2.9) в случае (2.22) равносильно соотношению

$$1 - \frac{n}{B_n^2}\,\widetilde{D}(B_n/\phi_n) = \frac{a - c^* + o(1)}{\phi_n^2},\ \ n \to \infty. \tag{3.16}$$

Если значение B_n определяется равенством (2.20), то из (2.22) и (3.16) следует, что

$$1 - \frac{\widetilde{D}(B_n/\phi_n)}{\widetilde{D}(B_n)} \sim \mu(B_n) \sim \frac{2\,(c^* + o(1))}{\phi_n^2} \int\limits_{B_n/\phi_n}^{B_n} \frac{du}{u} =$$

$$\frac{c^* + o(1)}{\phi_n^2}\,\ln \phi_n^2,\ \ n \to \infty. \tag{3.17}$$

Из (2.21) и (3.17), принимая во внимание равносильность соотношений (2.9) и (3.16), заключаем, что $c^* = 0$ и имеет место (2.19).

То, что из (2.23) следует (2.21), проверяется так же, как (3.17).

Докажем замечание 6. Сначала покажем, что значение B_n при всех достаточно больших n определяется равенством (2.24) единственным образом. Нам достаточно проверить, что функция $\xi(z) = \frac{1}{z^2}\,\widetilde{D}(z/\phi(z)) = 2\int_0^{1/\phi(z)} uR(uz)du$ монотонно убывает при всех достаточно больших z. Дело обстоит именно так, поскольку функция $R(uz)$ не возрастает, а функция $\phi(z)$ возрастает по z.

Если B_n определяется равенством (2.24), то из (3.16) (и (2.8)) следует, что $a - c^* = 0$, или $a = c_+ + c_-$, что доказывает третью импликацию в замечании 6. Две первые проверяются аналогично.

Доказательство леммы 2. Все три утверждения леммы 2 проверяются единообразно, и мы ограничимся доказательством пункта “б” для случая $q = 1$. Имеем,

$$\widetilde{J}_1(\alpha) = 2\Big(\int\limits_1^{\ln 1/\varepsilon} \cdots + \int\limits_{\ln 1/\varepsilon}^{\infty} \cdots\Big) = 2(A_1 + A_2).$$

Положим $c = \alpha^2/2$. Имеем при $\varepsilon \downarrow 0$

$$A_2 \sim \int\limits_{\ln 1/\varepsilon}^{\infty} (\ln_k u)^{-c} \, (\varkappa_\beta(\ln_{k+1} u))^{-c} \, \frac{u^2 \sqrt{\ln_{k+1} u}\,(\ln_k u)^t \rho_\gamma(\ln_{k+1} u)}{u^2 \prod_{l=1}^k \ln_l u} du/u$$

$$= \int\limits_{\ln_{k+2} 1/\varepsilon}^{\infty} e^{-\varepsilon x} x^{0.5+\gamma-c\beta} \rho_0(x)/(\varkappa_0(x))^c \, dx = A_3,$$

делая подстановку $x = \ln_{k+1} u$ под знаком интеграла и принимая во внимание, что $dx = du/u \prod_{l=1}^k \ln_l u$ и $\varepsilon = c - t$.

Пусть $\xi = \ln_{k+2} 1/\varepsilon$ и $\omega(x) = \rho_0(x)/(\varkappa_0(x))^t$. Тогда при $\varepsilon \downarrow 0$

$$A_3 = (1 + o(1)) \int\limits_{\xi}^{1/\varepsilon^2} e^{-\varepsilon x} x^{\nu-1} \omega(x) dx + o(1),$$

поскольку $x^{-\varepsilon\beta} \to 1$ равномерно по $x \in (1, 1/\varepsilon^2)$. Далее,

$$\int\limits_{\xi}^{1/\varepsilon^2} \dots = \varepsilon^{-\nu} \int\limits_{\varepsilon\xi}^{1/\varepsilon} e^{-y} \, y^{\nu-1} \, \omega(y/\varepsilon) dy \sim \varepsilon^{-\nu} \omega(1/\varepsilon) \Gamma(\nu), \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

по свойствам медленно меняющихся функций. Чтобы закончить доказательство, остается заметить, что

$$\varepsilon^{-\nu}\omega(1/\varepsilon) = \varepsilon^{-3/2} \rho_\gamma(1/\varepsilon)/(\varkappa_\beta(1/\varepsilon))^t$$

и что $A_1 = o(\ln 1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. В заключение пункта 3 покажем, почему теорема 3 влечет следствие 3. Прежде всего заметим, что из (2.14) и (2.11) при $b_n = B_n \, \phi_n$ следует

$$\ln \frac{b_{n+1}}{b_n} \sim \ln \frac{B_{n+1}}{B_n} \sim \frac{1}{2n}, \;\; n \to \infty, \tag{3.18}$$

и, кроме того (см. (1.2) и (1.18))

$$n \, D(b_n) \sim B_n^2, \;\; n \to \infty. \tag{3.19}$$

Далее воспользуемся теоремой 3 с функцией $\frac{g(y)}{D(y)}$ вместо $g(y)$. Принимая во внимание (3.18) и (3.19), видим, что в этом случае выражение $I_q(\alpha)$ (см. (1.10)) в формулировке теоремы 3 можно заменить левой частью соотношения (2.16), умноженной на $2^{-1/q}$, а вместо $\widetilde{I}_q(\alpha)$ в (2.13) подставить $\widetilde{J}_q(\alpha)$.

Рассмотрим последний шаг подробнее. Ограничимся для определенности случаем $q = 1$. Положим

$$c = \alpha^2/2, \quad b_n = B_n\,\phi_n, \quad u_n = \frac{g(b_n)}{B_n^2\,\phi_n}\,e^{-c\phi_n^2}\ln\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

и

$$v_n = \int\limits_{B_n}^{B_{n+1}} \frac{g(u\phi(u))}{u^2\,\phi(u)}\,e^{-c\phi^2(u)}\frac{du}{u}.$$

Нам достаточно показать, что

$$\liminf \frac{u_n}{v_n} \geqslant 1 \text{ и } \limsup \frac{u_n}{v_{n-1}} \leqslant 1. \tag{3.20}$$

Имеем, с учетом условия (1.11) и того, что

$$\ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = \ln\frac{B_{n+1}}{B_n} + \ln\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} \geqslant \ln\frac{B_{n+1}}{B_n} =$$

$$\int\limits_{B_n}^{B_{n+1}}\frac{du}{u} : u_n \geqslant \left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^{\delta} v_n.$$

Отсюда следует первое утверждение из (3.20). Далее, принимая во внимание (3.18), видим, что при $n \to \infty$

$$u_n \sim \frac{g(b_n)}{B_n^2\,\phi_n}\,e^{-c\phi_n^2}\int\limits_{B_{n-1}}^{B_n}\frac{du}{u} \leqslant \left(\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^{\delta} v_{n-1},$$

что приводит ко второму утверждению из (3.20).

Итак, следствие 3 действительно вытекает из теоремы 3.

4. Доказательство леммы 1

Положим $x = \alpha b_n = \alpha B_n\,\phi_n$ и для краткости обозначим $1/h_n$ (см. (1.14)) и $L(h, 1/h_n)$ через c и $L(h)$, соответственно. Имеем, $\frac{1}{n}\,Q_n(\alpha) = h\,m(h) - \ln L(h)$, где $m(h) = L'(h)/L(h)$, а h – единственное решение уравнения $m(h) = x/n$. Отсюда

$$\frac{1}{n}\left(Q_n(\alpha) - \frac{x^2}{2B_n^2}\right) = -\left(L(h) - 1 - \frac{h^2 B_n^2}{2n}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{n}{B_n^2}(m(h)-h\frac{B_n^2}{n})^2-(\ln L(h)-(L(h)-1)). \tag{4.1}$$

Из [11, лемма 1] следует

$$m(h)\sim h\,D(1/h)\sim x/n, \quad L(h)-1\sim\frac{1}{2}\,h^2\,D(1/h),\ \ n\to\infty,$$

равномерно по α, $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 1/\varepsilon$ (здесь ε – произвольно малая положительная постоянная), вследствие чего

$$\ln L(h)-(L(h)-1)=O(h^4\,D^2(1/h)),$$

$$\begin{aligned} m(h)=&L'(h)-(L(h)-1)\,m(h)=\\ &L'(h)+O(h^3\,D^2(1/h)), \quad n\to\infty. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Далее (напоминаем, что $\mathbf{E}\,X=0$),

$$L'(h)-h\frac{B_n^2}{n}=-h\left(\frac{B_n^2}{n}-D(c)\right)+$$

$$\int\limits_{-c}^{c}(e^{hy}-1-hy)y\,dV(y)+\int\limits_{-\infty}^{-c}(e^{hy}-1)y\,dV(y)-\int\limits_{c}^{\infty}y\,dV(y)=$$

$$-h\left(\frac{B_n^2}{n}-D(c)\right)+\theta_1\left(c^{-2}\int\limits_{-c}^{c}|y|^3\,dV(y)+\int\limits_{|y|>c}|y|\,dV(y)\right), \tag{4.3}$$

где $|\theta_1|\leqslant 1\vee\frac{1}{2}\,(hc)^2\,e^{hc}$, и, аналогично,

$$L(h)-1-\frac{h^2}{2}\,\frac{B_n^2}{n}=-\frac{h^2}{2}\left(\frac{B_n^2}{n}-D(c)\right)+$$

$$\theta_2\left(c^{-3}\int\limits_{-c}^{c}|y|^3\,dV(y)+c^{-1}\int\limits_{|y|>c}|y|\,dV(y)\right), \tag{4.4}$$

$|\theta_2|\leqslant 1+hc\vee\frac{1}{6}\,(hc)^3\,e^{hc}$.

Принимая во внимание соотношения (4.1)–(4.3) и тождество

$$c^{-3}\int\limits_{-c}^{c}|y|^3\,dV(y)+c^{-1}\int\limits_{|y|>c}|y|\,dV(y)=$$

$$c^{-1}\int\limits_c^\infty R(y)\,dy + 3\,c^{-3}\int\limits_0^c R(y)\,y^2\,dy, \tag{4.5}$$

заключаем, что

$$Q_n(\alpha) - \frac{x^2}{2B_n^2} = -n\,\left(L(h) - 1 - \frac{h^2 B_n^2}{2n}\right) + O\,(I_n)\,, \tag{4.6}$$

где

$$I_n = n\,h^4\,D^2(1/h) + \frac{n^2}{B_n^2}\biggl\{h^6\,D^4(1/h) + h^2\left(\frac{B_n^2}{n} - D(c)\right)^2 +$$

$$\left(\int\limits_c^\infty R(y)\,dy + c^{-2}\int\limits_0^c R(y)\,y^2\,dy\right)^2\biggr\}. \tag{4.7}$$

Пусть положительная функция $\phi(z)$ медленно меняется на бесконечности и выполнены условия (2.2) и (2.3).

Из (2.3) следует, что $D(B_n) \sim D(B_n/\phi_n)$, $n \to \infty$, и (см. (1.17), (1.18)) поэтому при $n \to \infty$

$$c \sim B_n/\phi_n, \tag{4.8}$$

$$h \sim \alpha\frac{\phi_n}{B_n}, \quad h\,D(1/h) \sim \alpha\frac{B_n\,\phi_n}{n},\ \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon, \tag{4.9}$$

и, в частности, $hc = h/h_n \sim \alpha$, $n \to \infty$.

Вследствие (4.9) имеем равномерно по α, $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon$, при $n \to \infty$

$$n\,h^4\,D^2(1/h)\left(1 + \frac{n}{B_n^2}\,h^2\,D^2(1/h)\right) \sim$$

$$n\,h^2\left(\frac{\alpha\,B_n\phi_n}{n}\right)^2\left(1 + (1+o(1))\left(\frac{\alpha\,b_n}{n}\right)^2\frac{n}{B_n^2}\right) \sim$$

$$\frac{\alpha^4\,\phi_n^2}{B_n^2}\,D(B_n)\left(1 + (1+o(1))\frac{\alpha^2\,\phi_n^2}{B_n^2}\,D(B_n)\right) = O\left(\frac{\phi_n^2}{\phi^4(c)}\right). \tag{4.10}$$

Далее, из (2.2) и свойств медленно меняющихся функций, получим

$$J(c) = \int\limits_c^\infty R(y)\,dy + c^{-2}\int\limits_0^c R(y)\,y^2\,dy = O\,\left(\frac{D(c)}{c\phi^2(c)}\right),\ c \to \infty, \tag{4.11}$$

и с учетом (4.8) найдем

$$n\frac{n}{B_n^2}\,J^2(c) = O\left(\frac{\phi_n^2}{\phi^4(c)}\right),\ \ n\to\infty. \tag{4.12}$$

Теперь,

$$\frac{n^2}{B_n^2}\,h^2\left(\frac{B_n^2}{n} - D(c)\right)^2 \sim \alpha^2\,\phi_n^2\,\left(1 - \frac{n}{B_n^2}\,D(c)\right)^2 =$$

$$O\left(\frac{1}{\phi_n^2} + \frac{\phi_n^2}{\phi^4(c)}\right),\ \ n\to\infty, \tag{4.13}$$

вследствие (2.2), (2.3) и соотношений

$$1 - \frac{n}{B_n^2}\,D(c) = 1 - \frac{n}{B_n^2}\,D(B_n/\phi_n) + (1+o(1))\,\frac{D(c) - D(B_n/\phi_n)}{D(B_n)},$$

$$|D(c) - D(B_n/\phi_n)| = |\int\limits_{B_n/\phi_n)}^{c} y^2\,dR(y)\,dy| \leqslant$$

$$\max\left(c^2\,R(B_n/\phi_n), (B_n/\phi_n)^2\,R(c)\right) = O\left(\frac{D(c)}{\phi^2(c)}\right).$$

Итак, если положительная функция $\phi(z)$ медленно меняется на бесконечности и выполнены условия (2.2) и (2.3), то из (4.7), (4.10), (4.12), (4.13) следует

$$Q_n(\alpha) - \frac{x^2}{2B_n^2} = -n\left(L(h) - 1 - \frac{h^2B_n^2}{2n}\right) + O\left(\frac{1}{\phi_n^2} + \frac{\phi_n^2}{\phi^4(c)}\right),\ \ n\to\infty,$$

равномерно по α, $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon$.

Заметим, что если $\phi(z)\to\infty$, $z\to\infty$, то

$$\frac{\phi_n^2}{\phi^4(c)} = \phi_n^{-2}\left(\frac{\phi_n}{\phi(c)}\right)^4 = \phi_n^{-2+o(1)} = o(1),\ \ n\to\infty,$$

и, следовательно,

$$Q_n(\alpha) - \frac{x^2}{2B_n^2} =$$

$$-\,n\left(L(h) - 1 - \frac{h^2B_n^2}{2n}\right) + o(1),\ \ \varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 1/\varepsilon,\ \ n\to\infty. \tag{4.14}$$

Потребуем теперь дополнительно, чтобы выполнялось условие (2.1). Тогда функция $\phi(z)$ медленно меняется на бесконечности и из (4.4), (4.5), (4.11), (4.13) и (4.14) следует, что

$$Q_n(\alpha) = \frac{x^2}{2B_n^2} + O\left(\frac{\phi_n^2}{\phi^2(c)}\right) = \frac{x^2}{2B_n^2} + O(1), \ n \to \infty,$$

равномерно по α, $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon$. Таким образом, соотношение (2.4) доказано. Соотношение (2.7) проверяется аналогично.

Пусть теперь выполняются условия (2.1), (2.8) и (2.9). Покажем, что тогда имеет место (2.10). Положим $\tau(t) = e^t - 1 - t - t^2/2$. Имеем,

$$-\left(L(h) - 1 - \frac{h^2 B_n^2}{2n}\right) = -\int\limits_0^c \tau(hy)dV(y) - \int\limits_{-c}^0 \tau(hy)dV(y) +$$

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{B_n^2}{n} - D(c)\right) + \int\limits_{|y|>c} (1+hy)dV(y) = A_1 + \cdots + A_4. \tag{4.15}$$

Далее (см. (4.8), (4.9) и обозначения в (2.10)),

$$A_1 = \int\limits_0^c \tau(hy)dR_+(y) = \tau(c)\, R_+(c) - h\int\limits_0^c R_+(y)\tau'(hy)dy =$$

$$\frac{\tau(\alpha)\,(c_+ + o(1))}{c^2\phi^2(c)}\, D(c) - \int\limits_0^{ch} \tau'(t)R_+(t/h)dt =$$

$$\frac{c_+ + o(1)}{c^2\phi^2(c)}\, D(c)\left(\tau(\alpha) - \alpha^2\int\limits_0^{\alpha} \tau'(t)\frac{dt}{t^2}\right) =$$

$$\frac{-c_+\, A(\alpha) + o(1)}{c^2\phi^2(c)}\, D(c), \ \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon, \ n \to \infty,$$

откуда следует, что

$$n\, A_1 = -c_+\, A(\alpha) + o(1), \ \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon, \ n \to \infty. \tag{4.16}$$

Аналогично устанавливается, что

$$n\, A_2 = -c_-\, A(-\alpha) + o(1), \ \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon, \ n \to \infty. \tag{4.17}$$

Далее,

$$n\,A_3 \sim \frac{1}{2}\,\alpha^2\,\phi_n^2\,\left(1-\frac{n}{B_n^2}\,D(c)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\,\alpha^2\,a+o(1), \quad \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1/\varepsilon, \quad n\to\infty, \tag{4.18}$$

поскольку (см. (4.13) и ниже), если $c_+ + c_- > 0$ (при $c_+ + c_- = 0$ рассуждения лишь упрощаются), то

$$\phi_n^2\,\frac{D(c)-D(B_n/\phi_n)}{D(B_n)} \sim \frac{\phi^2(c)\,c^2}{D(c)}\,(R(B_n/\phi_n)-R(c)) \sim$$

$$(c_+ + c_-)\,\frac{R(B_n/\phi_n)-R(c)}{R(c)} = o(1),$$

в силу (4.8) и того, что функция $R(z)$ правильно меняется.

Оценим $n\,A_4$. Имеем,

$$n\,A_4 = n\,R(c)+n\,h\int\limits_c^\infty y\,dV(y+n\,h\int\limits_{-\infty}^{-c} y\,dV(y = I^{(1)}+I^{(2)}+I^{(3)}. \tag{4.19}$$

По аналогии с предыдущим, при $n\to\infty$

$$\begin{aligned} I^{(1)} =&c_- + c_+ + o(1),\\ I^{(2)} =&2\,\alpha\,c_+ + o(1),\\ I^{(3)} =&-2\,\alpha\,c_- + o(1). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Соотношения (4.15)–(4.20) приводят к (2.10). Лемма 1 полностью доказана.

5. Леммы 3 и 4

Лемма 3. *Пусть* $Y_1,\ldots,Y_m$ *– независимые случайные величин. Предположим, что* $Y_k \leqslant c$, $\mathbf{E}\,Y_k = 0$ $(1\leqslant k\leqslant m)$ *и* $\sigma_m^2 = \sum\limits_{k=1}^m \mathbf{E}\,Y_k^2 < \infty$. *Тогда при любом* $y>0$

$$P_m(y) = \mathbf{P}\,(Y_1+\cdots Y_m \geqslant y) \leqslant$$

$$\exp\left\{-\frac{y}{c}\left[(1+\frac{\sigma_m^2}{cy})\ln\,(1+\frac{cy}{\sigma_m^2})-1\right]\right\}.$$

В частности, $P_m(y) \leqslant e^{y/c}\,(1+\frac{cy}{\sigma_m^2})^{-y/c}$, $y>0$.

Лемму 3 можно найти в [14, гл. 3, §6.12]

Следующее утверждение доказано в [8, лемма 3].

Лемма 4. *Пусть функция $g(u)$ удовлетворяет условию* (1.11), *а интегрируемая функция $\overline{V}(u) \geqslant 0$. Тогда при любом $l > \delta$*

$$\left\| \frac{g(u)}{u^l} \int_1^u y^{l-1}\, \overline{V}(y)\, dy \right\|_q \leqslant \frac{1}{l-\delta}\, \left\| g(u) \overline{V}(u) \right\|_q .$$

Литература

1. Н. Н. Амосова, *О скорости сходимости в одностороннем законе больших чисел.* — Литовский матем. сб. **16**, № 3 (1976), 6–12.
2. L. E. Baum and M. Katz, *Convergence rates in the law of large numbers.* — Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 108–123.
3. J. A. Davis, *Convergence rates for the law of the iterated logarithm.* — Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1479–1485.
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 2.* Мир, М. (1984).
5. M. U. Gafurov, *On the estimate of the rate of convergence in the law of iterated logarithm.* — Lect. Notes in Math. **1021** (1983), 137–144.
6. A. Gut, *Convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables with multidimensional indices.* — Ann. Probab. **8** (1980), 298–313.
7. A. Gut and A. Spataru, *Precise asymptotics in the law of the iterated logarithm.* — Ann. Probab. **28** (2000), 1870–1883.
8. Л. В. Розовский, *Оценки скорости сходимости в слабом законе больших чисел.* — Литовский матем. сб. **20**, № 4 (1980), 147–163.
9. Л. В. Розовский, *Некоторые оценки для вероятностей односторонних больших уклонений.* — Теория вероятн. и ее примен. **30** (1985), 800–804.
10. Л. В. Розовский, *Нормальная аппроксимация при вычислении скорости сходимости в слабом законе больших чисел.* — Матем. заметки **40**, № 2 (1986), 252–268.
11. Л. В. Розовский, *Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, № 4 (1989), 686–705.
12. W. Feller, *On the oscillations of sums of idependent random variables.* — Ann. Math. **91** no. 2 (1970), 402–418.
13. Л. В. Розовский, *Уточнение одной теоремы В.Феллера о законе повторного логарифма.* — Записки научн. семин. ПОМИ **216** (1994), 117–123.
14. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М. (1987).

Rozovskii L. V. Limit theorems for large derivations of sums of independent random variables with common distribution function from the domain of attraction of the normal law.

In the note some aspects of an asymptotic behavior of the probability $\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha b_n\right)$ are studied, where S_n is sum of n independent random variables with a common distribution function from the domain of attraction of a normal law, α is a positive number and b_n is a non-decreasing sequence, which tends to infinity and satisfies some additional assumptions. In particular, we obtain the necessary and sufficient conditions under which the series $\sum\limits_n f_n \, \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha b_n\right)$ converges or, being properly normalized, has a limit if $\alpha \searrow \alpha_0$, where α_0 is a positive constant and f_n is some positive sequence of rather a general form.

Санкт-Петербургская
Химико-Фармацевтическая Академия

Поступило 21 октября 2002 г.