Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

Б. П. Харламов

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ МЕР В КЛАССЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

1. Введение

В связи с задачами статистики непрерывных полумарковских процессов возникает необходимость в исследовании условий абсолютной непрерывности и сингулярности мер этих процессов. Для полумарковских процессов, вообще говоря, не выполняется марковское свойство относительно фиксированных моментов времени и потому не могут быть использованы в чистом виде известные результаты об абсолютной непрерывности, опирающиеся на классическое определение стохастического интеграла Ито. Однако оба класса процессов: полумарковский и более узкий марковский, – имеют "марковский след". Слово "след" мы используем как в переносном, так и в прямом смысле, понимая под следом траектории класс траекторий, отличающихся между собой лишь монотонной непрерывной заменой времени. Процессы из обоих этих классов обладают марковским свойством относительно внутренних марковских моментов таких, как моменты первого выхода и их итерации. Это свойство переносится на их случайные следы, т.е. на распределения, индуцированные отображением "траектория $\mapsto$ след", что порождает марковскую структуру на таком распределении. В данной работе мы определяем и используем стохастический интеграл по следу в терминах мартингала, определенного на частично упорядоченном множестве внутренних моментов, а также исследованный ранее криволинейный интеграл по аддитивному функционалу. Выводится плотность меры одного полумарковского процесса относительно другого, которая представима в виде произведения двух плотностей: плотность меры на множестве следов и условная плотность

Поддержано грантом РФФИ 01-01-00613; частично поддержано грантом ведущих научных школ 00-15-96019.

меры процесса хода времени относительно следа. Вторая компонента для полумарковского процесса диффузионного типа соответствует монотонному процессу с независимыми приращениями на линейно упорядоченном множестве внутренних моментов (при фиксированном следе траектории).

2. Определения и обозначения

Мы обозначаем: $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 1)$; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$; $\mathcal{D}$ – пространство функций $\xi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{X}$ (непрерывных справа, имеющих пределы слева) с метрикой Скорохода; далее мы будем рассматривать вероятностные меры на борелевской сигма-алгебре подмножеств этого пространства или его подмножества $\mathcal{C}$ – множества непрерывных функций; $\pi_t : \pi_t\xi = \xi(t)$ – проекция; $\theta_t : (\theta_t\xi)(s) = \xi(t+s)$ $(s, t \geqslant 0)$ – сдвиг; $\mathfrak{A}$ – класс открытых подмножеств множества $\mathbb{X}$; $\sigma_\Delta : \sigma_\Delta\xi = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \notin \Delta\}$ – момент первого выхода из множества $\Delta \in \mathfrak{A}$; для открытого центрального шара введем специальное обозначение: $\sigma_r(\xi) = \sigma_{B(x,r)}(\xi)$, где $x = \xi(0)$, $r > 0$; $\mathcal{F} = \sigma(\pi_t : t \geqslant 0)$ – сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{D}$; $\mathcal{F}_t = \sigma(\pi_s : 0 \leqslant s \leqslant t)$; $\mathcal{T}$ – множество марковских моментов относительно $(\mathcal{F}_t)$; $\pi_\tau : \pi_\tau(\xi) = \pi_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\tau(\xi) < \infty$ $(\tau \in \mathcal{T})$; $\theta_\tau : \theta_\tau(\xi) = \theta_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\tau(\xi) < \infty$ $(\tau \in \mathcal{T})$; $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$ на множестве $\tau_1(\xi) < \infty$ $(\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T})$; σ_r^k $(k \geqslant 1)$ – итерированный момент первого выхода из шаровых окрестностей: $\sigma_r^1 = \sigma_r$, $\sigma_r^{k+1} = \sigma_r^k \dot{+} \sigma_r$; $\mathcal{F}_\tau = \{S \in \mathcal{F} : (\forall t \geqslant 0)\ S \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$ $(\tau \in \mathcal{T})$. Мы используем следующие обозначения для интегралов по вероятностной мере P, заданной на пространстве E:

$$P(f; A) = \int\limits_A f(s)\, P(ds), \qquad P(f) = P(f; E),$$

где f – измеримая функция и A – измеримое подмножество множества E.

Пусть (P_x) – измеримое семейство вероятностных мер на $\mathcal{F}$ такое, что $P_x(\pi_0 = x) = 1$. Семейство мер (P_x) называется *полумарковским*, если для любой измеримой f $(\forall \Delta \in \mathfrak{A})\,(\forall A \in \mathcal{F}_{\sigma_\Delta})$ $P_x(f \circ \theta_{\sigma_\Delta}; A \cap \{\sigma_\Delta < \infty\}) = P_x(P_{\pi_{\sigma_\Delta}}(f); A \cap \{\sigma_\Delta < \infty\})$, иными словами, семейство мер обладает марковским свойством относительно любого момента первого выхода из открытого множества.

Полумарковской переходной функцией называется ядро:

$$F_\tau(A \times S|x) = P_x(\tau \in A,\ \pi_\tau \in S), \quad (\tau \in \mathcal{T},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\ S \in \mathcal{B}(\mathbb{X})).$$

Полумарковской переходной производящей функцией называется лапласов образ переходной функции:

$$f_\tau(\lambda; S|x) = P_x(e^{-\lambda\tau};\ \pi_\tau \in S,\ \tau < \infty) \quad (\lambda \geqslant 0).$$

3. Представление траектории в виде следа и хода времени

Пусть Φ – множество непрерывных неубывающих функций ϕ таких, что

$\phi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ : \phi(0) = 0,\ \phi(t) \to \infty\ (t \to \infty)$;

ϕ^* – обратное к ϕ отображение: $\phi^*(t) = \inf \phi^{-1}[t, \infty)$.

С помощью функций ϕ определяются замены времени по формуле $\xi_1 = \xi \circ \phi$.

Нетрудно проверить, что относительно замены времени моменты и точки первого выхода преобразуются специальным образом, а именно

$\sigma_\Delta(\xi \circ \phi) = \phi^*(\sigma_\Delta \xi),\ \ \pi_{\sigma_\Delta}(\xi \circ \phi) = \pi_{\sigma_\Delta}\xi \ \ (\Delta \in \mathfrak{A})$.

Точно таким же образом преобразуются конечные итерации моментов первого выхода, моменты, получаемые из них с помощью предельного перехода и многих других преобразований. Для исследования полумарковских процессов особую роль играют марковские моменты, обладающие этим свойством, а именно, класс

$\mathcal{T}_* = \{\tau \in \mathcal{T} : (\forall \xi \in \mathcal{D})\,(\forall \phi \in \Phi)\ \tau(\xi \circ \phi) = \phi^*(\tau(\xi))\}$,

который называется множеством *внутренних марковских моментов*.

В дальнейшем мы будем использовать два специальных отображения множества всех траекторий, которые дадут нам возможность выразить плотность меры одного полумарковского процесса относительного меры другого.

След. Первое из этих отображений связано с отношением $\xi_1 \overset{\ell}{\sim} \xi_2$, которое означает: $(\exists \phi_1, \phi_2 \in \Phi)\ \ \xi_1 \circ \phi_1 = \xi_2 \circ \phi_2$.

Пусть $\ell\xi$ – класс эквивалентности функции ξ по отношению $\overset{\ell}{\sim}$, называемый *следом* траектории ξ; $\mathcal{M} = \ell\mathcal{D}$ – фактор-множество по отношению ℓ – множество следов всех функций $\xi \in \mathcal{D}$; $\mathcal{F}^*$ – сигма-алгебра всех множеств $B \in \mathcal{F}$ таких, что для любых $\phi \in \Phi$ и $\xi \in \mathcal{D}$ справедливо $\xi \in B \Leftrightarrow \xi \circ \phi \in B$.

Для решения вопросов измеримости удобно иметь в распоряжении счетнопорожденную сигма-алгебру подмножеств. Для этого мы сконструируем достаточно богатое счетное подмножество множества внутренних моментов. Для любого $\tau \in \mathcal{T}$ определим отображение

$\overline{\pi}_\tau : \overline{\pi}_\tau \xi = \pi_\tau \xi \ (\tau\xi < \infty)$, $\overline{\pi}_\tau \xi = \overline{\infty} \ (\tau\xi = \infty)$, где $\overline{\infty} \notin \mathbb{X}$.

Пусть $\mathfrak{A}_{r_n}$ – счетное открытое покрытие множества $\mathbb{X}$ ранга r_n; $\mathcal{T}_n$ – множество, замкнутое относительно операции $\dot{+}$, содержащее все σ_Δ $(\Delta \in \mathfrak{A}_{r_n})$; $\mathcal{T}_o = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$, где $(r_n \to 0)$. Очевидно, что $\mathcal{T}_o \subset \mathcal{T}_*$, при этом (как нетрудно доказать) на множестве непрерывных функций сигма-алгебра $\mathcal{F}^o = \sigma(\overline{\pi}_\tau : \tau \in \mathcal{T}_o)$ совпадает с сигма-алгеброй подмножеств множества $\mathcal{C}^\infty$, порожденной отображением ℓ, где $\mathcal{C}^\infty$ – пространство непрерывных функций, не имеющих интервала постоянства на бесконечности.

Пусть $\mathcal{T}_*(\ell\xi)$ – множество сужений $\tau \in \mathcal{T}_*$ на $\ell^{-1}\ell\xi$, в котором произведено определение порядка в соответствии с $\tau(\xi)$. Очевидно, что если $\xi_1, \xi_2 \in \ell^{-1}\ell\xi$, то

$$\tau_1(\xi_1) < \tau_2(\xi_1) \Rightarrow \tau_1(\xi_2) < \tau_2(\xi_2), \quad \tau_1(\xi_1) = \tau_2(\xi_1) \Rightarrow \tau_1(\xi_2) = \tau_2(\xi_2).$$

Это линейно упорядоченное множество служит множеством параметров, в терминах которого мы будем определять плотности мер. Обозначим $\Pi(\ell\xi)$ – соответствующее отношение порядка на $\mathcal{T}_*(\ell\xi)$. Множество $\mathcal{T}_o(\ell\xi)$ всех сужений $\tau \in \mathcal{T}_o$ на множество $\ell^{-1}\ell\xi$ играет роль счетного всюду плотного множества в $\mathcal{T}_*(\ell\xi)$. Последнее понятие можно уточнить, рассмотрев метрику в этом пространстве. А именно, для любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_*$ определим функцию ρ_ℓ на $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$\rho_\ell(\tau_1, \tau_2 | \cdot) = \inf\{\operatorname{diam}\Delta : \tau_1 \le \tau_2 < \tau_1 \dot{+} \sigma_\Delta \text{ или } \tau_2 \le \tau_1 < \tau_2 \dot{+} \sigma_\Delta\},$$

где нижняя граница вычисляется по множеству всех $\Delta \in \mathfrak{A}$. Легко доказать, что при любом $\xi \in \mathcal{D}$ функция $\rho_\ell(\cdot, \cdot | \xi)$ является метрикой на $\mathcal{T}_*(\ell\xi)$, а при любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_*$ она $\mathcal{F}^o$-измерима [3, ц. 303]. При этом каждый след $\ell\xi$ для $\xi \in \mathcal{C}^\infty$ определяется отношением $\Pi(\ell\xi)$ линейной упорядоченности, определенным на $\mathcal{T}_*$, а также согласованными с ним отображениями: $\tau \mapsto \overline{\pi}(\xi)$ $(\tau \in \mathcal{T}_*)$.

Ход времени. Второе из этих отображений связано с внутренними моментами следующим образом. Пусть Ψ – множество всех отображений $\psi : \mathcal{T}_* \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$. Нас будет интересовать отображение

$\eta : \mathcal{D} \mapsto \Psi$ такое, что $(\forall \xi \in \mathcal{D})\quad \eta(\xi) \in \Psi$ – строго возрастающее отображение относительно порядка $\Pi(\ell\xi)$. Это отображение определяется равенством $\eta(\xi)(\tau) = \tau(\xi)$. Оно измеримо относительно $\mathcal{F}$ и сигма-алгебры $\mathcal{G}$ подмножеств множества Ψ, порожденной всеми цилиндрическими множествами.

Представление траектории. Теперь каждое $\xi \in \mathcal{D}$ может быть представлено в виде согласованной пары $(\ell(\xi), \eta(\xi))$. Это отображение взаимно однозначно и измеримо. При заданном распределении функции $\xi \in \mathcal{D}$ каждый элемент этой пары индуцирует вероятностную меру на соответствующем пространстве. Нас будут интересовать меры:

$R_x = P_x \circ \ell^{-1}$ следа $\ell\xi$ и условное распределение

$S_x(\cdot|\ell) = (P_x \circ \eta^{-1})(\cdot|\ell)$ хода времени относительно следа, где

$P_x(\cdot|\ell) \equiv P_x(\cdot|\mathcal{F}^o)$ – условное распределение относительно следа.

Пусть $A \in \eta^{-1}\mathcal{G}$ и $B \in \mathcal{F}^o$. Нетрудно показать, что мера P_x определяется своими значениями на пересечениях множеств этого вида. При этом $P_x(A \cap B)$ равно

$$P_x(P_x(A|\ell);\, B) = P_x(P_x(\eta^{-1}\widetilde{A}|\ell);\, \ell^{-1}\ell B) = \\ = P_x(S_x(\widetilde{A}|\ell);\, \ell^{-1}\ell B) = R_x(S_x(\widetilde{A}|\cdot);\, \ell B),$$

где $\widetilde{A} \in \mathcal{G}$, $S_x(\widetilde{A}|\cdot) \circ \ell = S_x(\widetilde{A}|\ell)$. Согласно известному свойству плотностей [1], абсолютная непрерывность мер, заданных на произведении пространств, определяется свойствами соответствующих маргинальных и условных мер. Отсюда следует возможность отдельного изучения свойств абсолютной непрерывности мер: 1) на множестве следов траекторий полумарковского процесса, 2) на множестве ходов времени относительно следа. Искомая плотность (если она существует) представляется в виде произведения двух соответствующих плотностей: $\rho_{21}(\xi) = \overline{\rho}_{21}(\ell(\xi))\widetilde{\rho}_{21}(\eta(\xi))$, где $\rho_{21} = dP_x^{(2)}/dP_x^{(1)}$, $\overline{\rho}_{21} = dR_x^{(2)}/dR_x^{(1)}$ и $\widetilde{\rho}_{21} = dS_x^{(2)}/dS_x^{(1)}$.

4. Абсолютная непрерывность мер на множестве следов

4.1. Одномерный процесс.

4.1.1. Асимптотика распределения точки первого выхода.

Необходимость использования стохастического интеграла по следу возникает при анализе абсолютной непрерывности мер в классе полумарковских процессов. Наиболее простая конструкция стохастического интеграла по следу получается в случае одномерного полумарковского процесса диффузионного типа. Траектории такого процесса непрерывны, а распределение точки первого выхода из любого интервала сосредоточено в граничных точках интервала. Полумарковская переходная производящая функция такого процесса для момента первого выхода из малой симметричной окрестности начальной точки имеет асимптотическое представление

$$f_{\sigma_r}(\lambda; x_1|x) = 1/2 + b(x)(x_1 - x)/2 - c(\lambda, x)\, r^2/2 + o(r^2), \qquad (1)$$

где $r \to 0$, $x_1 \in \{x - r, x + r\}$ (таким образом, $|x_1 - x| = r$), функция $c(\lambda, x)$ неотрицательна, причем $(\forall x \in \Delta)$ $\partial c(\lambda, x)/\partial\lambda$ – вполне монотонная функция от λ; в данной статье мы рассматриваем случай, когда $c(0, x) = 0$ (нет терминальной остановки ни в одной из точек пространства состояний). При непрерывной по x функции $c(\lambda, x)$ и непрерывной и дифференцируемой функции $b(x)$ функция $f_{\sigma_{(a,b)}}(\lambda; x_1|x)$ $(x_1 \in \{a, b\})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1/2)u'' + b(x)u' - c(\lambda, x)u = 0$$

с граничными условиями $u(x_1) = 1$, $u(x_2) = 0$ $(x_2 \in \{a, b\} \setminus x_1)$.

Рассмотрим операцию "горизонтального квантования", соответствующую последовательности моментов первого выхода из сдвигаемых шаровых окрестностей $L_r : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$, $L_r(\xi)(t) = \pi_{\sigma_r^k} \Leftrightarrow \sigma_r^k \leqslant t < \sigma_r^{k+1}$. Пусть ξ – траектория процесса, выходящая из точки x и впервые покидающая интервал (a, b) через границу b. Таким образом $b = \pi_{\sigma_{(a,b)}}(\xi)$. Чтобы не усложнять обозначения мы будем считать, что процесс останавливается в момент первого выхода из этого интервала. Без потери общности можно предположить, что отношение $(b - x)/(x - a)$ – рациональное число, например n_0/m_0, и положить $r = (b - x)/n_0$. Такой выбор интервала квантования позволяет использовать преимущество одномерного процесса, которое состоит в том, что для данной траектории $\sigma_{(a,b)}\xi = \sigma_{(a,b)}L_r(\xi)$. Кроме того, если задать последовательность $(r_n)_1^\infty$ так, что $r_1 = r$ и $r_{n+1} = r_n/2$, то последовательность моментов $(\sigma_{r_n}^k(\xi))_{k=0}^{N_n}$ является подпоследовательностью $(\sigma_{r_{n+1}}^k(\xi))_{k=0}^{N_{n+1}}$, где N_n – число скачков квантованного процесса $L_{r_n}\xi$ до момента первого выхода из интервала (a,b). Очевидно, что след ступенчатого процесса, останавливающегося в момент первого выхода из интервала, представляет собой конечную последовательность точек. Для процесса $\xi_n \equiv L_{r_n}\xi$ – это последовательность точек $\ell\xi_n = (x, x_{n1}, \ldots, x_{nN_n})$, где $x_{nk} = \pi_{\sigma^k_{r_n}}(\xi)$. Последовательность ступенчатых функций (ξ_n) при $n \to \infty$ равномерно сходится к непрерывной функции ξ. Из этого следует, что последовательность следов $(\ell\xi_n)$ также стремится к пределу $\ell\xi$, где сходимость понимается относительно метрики в пространстве следов (кривых), индуцированной метрикой в пространстве функций.

4.1.2. Стохастический интеграл по следу (одномерный).

Пусть $(P_x^{(i)})$ $(i = 1.2)$ – два полумарковских семейства мер с соответствующими переходными производящими функциями $f_\tau^{(i)}$ и коэффициентами дифференциального уравнения $b_i(x)$, $c_i(\lambda, x)$. Вероятность (плотность) реализации следа $\ell\xi_n$ выражается формулой

$$P_x^{(i)}(\ell L_{r_n} = (x, x_{n1}, \ldots, x_{nN_n})) = \prod_{k=1}^{N_n} f^{(i)}_{\sigma_{r_n}}(0; x_k | x_{k-1}).$$

Плотность $\overline{\rho}_{21} \equiv dR_x^{(2)}/dR_x^{(1)}$ меры $R_x^{(2)}$ относительно меры $R_x^{(1)}$ (где $R_x^{(i)} \equiv P_x^{(i)} \circ \ell^{-1}$) выражается пределом $P_x^{(1)}$-почти наверное

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}_{21}(\ell\xi) &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N_n} \frac{f^{(2)}_{\sigma_{r_n}}(0; x_k|x_{k-1})}{f^{(1)}_{\sigma_{r_n}}(0; x_k|x_{k-1})} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N_n} \frac{1/2 + b_2(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})/2 + o(r^2)}{1/2 + b_1(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})/2 + o(r^2)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{N_n}((b_2(x_{k-1}) - b_1(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) - \right. \\
&\left. -\frac{1}{2}(b_2^2(x_{k-1}) - b_1^2(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})^2 + o(r^2))\right).
\end{aligned}$$

В показателе экспоненты мы получили две суммы: членов с первыми степенями и членов с квадратами приращений следа.

Рассмотрим сумму первых степеней:

$$\sum_{k=1}^{N_n} A(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

По форме эта сумма напоминает интегральную сумму стохастического интеграла (интегрируется функция от случайного аргумента по приращениям некоторого случайного процесса). Особенностью этой суммы являются приращения, которые относятся к аргументу $\tau \in \mathcal{T}_*$ специального случайного процесса, который мы называем следом траектории процесса. Можно показать, что при некотором выборе функции $A(x)$ и последовательности разбиений множества аргументов предел последовательности интегральных сумм этого рода существует в средне-квадратическом смысле. Мы называем этот предел *стохастическим интегралом по следу*.

Для любой дифференцируемой функции $A(x)$ имеем

$$\int_x^y A(s)\,ds = A(x)(y-x) + \frac{1}{2}A'(x)(y-x)^2 + o(y-x)^2 \quad (y - x \to 0),$$

причем формула остается верной, если $x > y$ (перестановка пределов местами меняет знак интеграла на противоположный). При этом, как легко видеть,

$$\sum_{k=1}^{N_n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} A(s)\,ds = \int_x^b A(s)\,ds.$$

Отсюда сумма первых степеней представляется в виде

$$\int_x^b A(s)\,ds - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_n}(A'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2 + o(r^2)).$$

Следовательно, в рассматриваемом одномерном случае вопрос о существовании стохастического интеграла по следу сводится к вопросу о существовании предела сумм с квадратами приращений.

Рассмотрим сумму членов с квадратами приращений.

$$\sum_{k=1}^{N_n} B(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2.$$

Обозначим $m_r(x_1,x_2)=P_{x_1}^{(1)}(\sigma_r|\pi_{\sigma_r}=x_2)$. Из разложения (1) следует, что для процессов диффузионного типа с дифференцируемым в нуле коэффициентом $c_1(\lambda,x)$ имеет место асимптотика математического ожидания момента первого выхода:

$$m_r(x_1,x_2)=\gamma_1(x)\,r^2+o(r^2)$$

равномерно по всем парам точек x_1,x_2 ($|x_2-x_1|=r$), где $\gamma_1(x)=\partial c_1(\lambda,x)/\partial\lambda$ при $\lambda=0$. Это означает, что в сумме мы можем заменить квадраты на эти функции:

$$\sum_{k=1}^{N_n}B(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^2=\sum_{k=1}^{N_n}B(x_{k-1})\gamma_1^{-1}(x_{k-1})m_r(x_{k-1},x_k)(1+o(1)),$$

Для нахождения предела этого выражения рассмотрим сперва сумму одних только членов $m_r(x_{k-1},x_k)$. Заметим, что для любого $k:k=1,\dots,N_n$

$$m_r(x_{k-1},x_k)=P_x^{(1)}(\sigma_r\circ\theta_{\sigma_r^{k-1}}|\pi_{\sigma_r^{k-1}}=x_{k-1},\pi_{\sigma_r^k}=x_k)=$$

$$=P_x^{(1)}(\sigma_r\circ\theta_{\sigma_r^{k-1}}|\pi_{\sigma_r^1}=x_1,\pi_{\sigma_r^2}=x_2,\dots,\pi_{\sigma_r^{N_n}}=x_{N_n}).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{N_n}m_r(x_{k-1},x_k)=$$

$$=P_x^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{N_n}\sigma_r\circ\theta_{\sigma_r^{k-1}}|\pi_{\sigma_r^1}=x_1,\pi_{\sigma_r^2}=x_2,\dots,\pi_{\sigma_r^{N_n}}=x_{N_n}\right)=$$

$$=P_x^{(1)}(\sigma_{(a,b)}\circ L_{r_n}|\pi_{\sigma_r^1}=x_1,\pi_{\sigma_r^2}=x_2,\dots,\pi_{\sigma_r^{N_n}}=x_{N_n})=$$

$$=P_x^{(1)}(\sigma_{(a,b)}|\pi_{\sigma_r^1}=x_1,\pi_{\sigma_r^2}=x_2,\dots,\pi_{\sigma_r^{N_n}}=x_{N_n}).$$

Известно, что последовательность математических ожиданий $P_x^{(1)}(\sigma_{(a,b)}|\pi_{\sigma_r^1},\dots,\pi_{\sigma_r^{N_n}})$ при $n\to\infty$ является мартингалом относительно меры $P_x^{(1)}$ и соответствующей последовательности сигма-алгебр [4]. Ее пределом $P_x^{(1)}$-почти наверное является условное математическое ожидание $\mu(\sigma_{(a,b)}) \equiv P_x^{(1)}(\sigma_{(a,b)}|\mathcal{F}^o)$ – значение аддитивного функционала μ_τ в точке $\tau = \sigma_{(a,b)}$ [3]. Нетрудно теперь доказать, что для любой непрерывной ограниченной функции $B(x)$ существует предел P_x^1-почти наверное

$$\sum_{k=1}^{N_n} B(\pi_{\sigma_r^{k-1}}) m_r(\pi_{\sigma_r^{k-1}}, \pi_{\sigma_r^k}) \to \int\limits_0^{\sigma_{(a,b)}} B(\pi_\tau)\, d\mu_\tau$$

– *криволинейный интеграл по аддитивному функционалу* μ [3]. Отсюда $P_x^{(1)}$-почти наверное существует предел

$$\lim_{r\to 0} \sum_{k=1}^{N_n} A(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \equiv \int\limits_0^{\sigma_{(a,b)}} A(\pi_\tau)\, d\pi_\tau =$$

$$= \int\limits_x^{\pi_{\sigma_{(a,b)}}} A(s)\, ds - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sigma_{(a,b)}} A'(\pi_\tau)\, d\mu_\tau .$$

Существование этого предела доказывает существование для функции A стохастического интеграла по следу.

4.1.3. Плотность меры на множестве следов (одномерная).

Мы доказали, что $P_x^{(1)}$-почти наверное

$$\rho_{21} = \exp\left(\int\limits_x^{\sigma_{(a,b)}} (b_2(\pi_\tau) - b_1(\pi_\tau))\, d\pi_\tau - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sigma_{(a,b)}} (b_2^2(\pi_\tau) - b_1^2(\pi_\tau))\, \frac{d\mu_\tau}{\gamma_1(\pi_\tau)} \right).$$

Существование и ограниченность этой функции доказывает абсолютную непрерывность меры $R_x^{(2)}$ относительно меры $R_x^{(1)}$. Покажем связь этой формулы с соответствующей плотностью для марковских процессов. Для этого построим для процесса $(P_x^{(1)})$ ассоциированный марковский процесс $(\overline{P}_x^{(1)})$, т.е. процесс с тем же распределением на множестве следов и с тем же аддитивным функционалом μ, что и у полумарковского процесса. Известно [6], что для марковского процесса диффузионного типа любой внутренний марковский момент τ совпадает $\overline{P}_x^{(1)}$-почти наверное с $\mathcal{F}^o$-измеримой функцией, т.е. $\tau = \mu(\tau)$ (вырожденное распределение хода времени относительно следа). Отсюда $\overline{P}_x^{(1)}$-почти наверное

$$\int_0^{\sigma_{(a,b)}} B(\pi_\tau)\,d\mu_\tau = \int_0^{\sigma_{(a,b)}} B(\pi_\tau)\,d\eta_\tau = \int_0^{\sigma_{(a,b)}} B(\pi_t)\,dt.$$

Далее, используя формулу Ито, получаем

$$\int_x^{\pi_{\sigma_{(a,b)}}} A(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma_{(a,b)}} A'(\pi_t)\,\frac{dt}{\gamma(\pi_\tau)} = \int_0^{\sigma_{(a,b)}} A(\pi_t)\Big(\frac{b_1(\pi_t)\,dt}{\gamma(\pi_t)} + \frac{dW(t)}{\gamma_1^{1/2}(\pi_t)}\Big).$$

где $d\overline{\xi}(t) = \gamma_1^{-1}(\overline{\xi}(t))b_1(\overline{\xi}(t))\,dt + \gamma_1^{-1/2}(\overline{\xi}(t))dW(t)$ – стохастический дифференциал диффузионного марковского процесса $\overline{\xi}(t)$ с семейством мер $(\overline{P}_x^1)$, $W(t)$ – индуцированный винеровский процесс. В терминах ассоциированного марковского процесса имеем

$$\rho_{21} = \exp\Big(\int_0^{\sigma_{(a,b)}} (b_2(\overline{\xi}(t)) - b_1(\overline{\xi}(t)))\,d\overline{\xi}(t) - \int_0^{\sigma_{(a,b)}} \frac{b_2^2(\pi_t) - b_1^2(\pi_t)}{2\gamma_1(\pi_t)}\,dt\Big)$$

$(\overline{P}_x^1)$-почти наверное. Переписывая эту формулу в терминах винеровского процесса, имеем

$$\rho_{21} = \exp\Big(\int_0^{\sigma_{(a,b)}} \frac{b_2(\overline{\xi}(t)) - b_1(\overline{\xi}(t))}{\gamma_1^{1/2}(\overline{\xi}(t))}\,dW(t) - \int_0^{\sigma_{(a,b)}} \frac{(b_2(\pi_t) - b_1(\pi_t))^2}{2\gamma_1(\pi_t)}\,dt\Big)$$

$(\overline{P}_x^1)$-почти наверное, что соответствует плотности меры одного диффузионного марковского процесса относительно меры другого [1].

4.2. Многомерный процесс

4.2.1. Разбиение интервала внутренними марковскими моментами.

При анализе абсолютной непрерывности мер следов многомерных процессов возникают принципиально новые элементы. Во-первых, это области, определяющие промежуточные моменты первого выхода, которые в этом случае имеют эллипсоидальную форму. Во-вторых, заданный интервал на множестве внутренних моментов (в данном случае – интервал от нуля до момента первого выхода из некоторого открытого множества) не может быть представлен в виде суммы конечного числа интервалов, определяемых моментами первого выхода из простых центрально симметричных окрестностей (в данном случае – эллипсоидальных); приходится представлять заданный интервал в виде бесконечного ряда интервалов, определяемых моментами первого выхода из эллипсоидальных областей с убывающими диаметрами. В-третьих, для построения монотонной последовательности разбиений в многомерном случае мы вынуждены использовать последовательности порядкового типа ω^n при $n \to \infty$.

Эллипсоидальные окрестности возникают при анализе полумарковских процессов диффузионного типа, у которых переходные полумарковские производящие функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}u''_{ij} + \sum_{i=1}^{d} b^i u'_i - cu = 0 \tag{2}$$

в некоторой открытой ограниченной области $G \subset \mathbb{X}$, где $(\forall x \in [G])$ $(a^{ij}(x))$ – положительно определенная матрица коэффициентов такая, что $\sum_{i=1}^{d} a^{ii}(x) = d$, все функции $a^{ij}(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы; все функции $b^i(x)$ непрерывно дифференцируемы; функция $c = c(\lambda, x)$ при любом $\lambda > 0$ непрерывна и положительна по x, при любом x $c(0,x) = 0$, $c(\lambda, x)$ бесконечно дифференцируема по λ, причем $\partial c(\lambda, x)/\partial\lambda$ – вполне монотонная функция по λ ($[G]$ – замыкание области G).

В общем случае $(a^{ij}) \not\equiv (\delta^{ij})$ на G (δ^{ij} – символ Кронекера). Однако в окрестности любой точки $x_0 \in G$ можно линейно преобразовать пространство так, что точка x_0 останется неподвижной, а преобразованное уравнение (2) будет иметь соответствующую матрицу коэффициентов в виде $\overline{a}^{ij}(x_0) = \delta^{ij}$. Для уравнения такого вида асимптотика распределения точки первого выхода из сферических окрестности имеет особенно простой вид [6]. Сферической окрестности точки x_0 преобразованного пространства соответствует эллипсоидальная окрестность в исходном пространстве. Именно эти эллипсоидальные окрестности для каждой точки области G мы используем, когда исследуем свойство абсолютной непрерывности.

Уточним форму этих эллипсоидальных областей. Предположим, что на множестве $[G]$ определена непрерывная невырожденная матричная функция $M = M_x$, матрица M_x обратима и справедливо представление $(a^{ij}(x)) = \overline{M}_x^T\, \overline{M}_x$, где $\overline{M} = M^{-1}$ – обращенная матрица M, $\overline{M}^T$ – транспонированная матрица $\overline{M}$. Для преобразования матрицы коэффициентов уравнения (2) в точке x_0 в (δ^{ij}) достаточно применить линейное преобразование $x \mapsto y = M_{x_0}(x - x_0) + x_0$ [6]. Окрестность Δ точки x_0 преобразуется в $M_{x_0}(\Delta - x_0) + x_0$. И если $M_{x_0}(\Delta - x_0) = B(x_0, r) - x_0 \equiv B(0, r)$, то $\Delta = M_{x_0}^{-1} B(0, r) + x_0$ – эллипсоид, который мы обозначаем $\mathrm{el}\,(x_0, r, M_{x_0})$.

Фиксируем ограниченное открытое множество G и траекторию непрерывного процесса $\xi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{X}$ с начальной точкой $\xi(0) = x_0 \in G$. Момент первого выхода из этого множества представим в виде бесконечной суммы моментов первого выхода из эллипсоидальных окрестностей:

$$\sigma_G = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{E_k} \circ \theta_{\tau_{k-1}}, \tag{3}$$

где $\tau_0 = 0$, τ_n – частная сумма этого ряда $(n \geqslant 1)$, $E_k = \mathrm{el}\,(\xi(\tau_{k-1}), r_k, M_{\xi(\tau_{k-1})})$, $(r_k)_1^\infty$ – невозрастающая последовательность чисел $(r_k \to 0)$, зависящая неупреждающим образом от ξ. Возможность представления (3) вытекает из очевидного свойства [6]

$$\lim_{r \to 0} \sigma_{G^{-r}} \widetilde{L}_r \xi \to \sigma_G \xi,$$

где $G^{-r} = \{x \in G : \rho(x, G^c) > r\}$ (G^c – дополнение G, ρ – метрика в $\mathbb{X}$); $r = C_G r_1$, где $C_G = \max\{\mathrm{diam}\,\mathrm{el}\,(x, 1, M_x) : x \in G\} < \infty$; $\widetilde{L}_r \xi$ – ступенчатая функция, для которой $(\forall t < \sigma_G \xi)$

$$\tau_n(\xi) \leqslant t < \tau_{n+1}(\xi) \Rightarrow (\widetilde{L}_r \xi)(t) = \pi_{\tau_n}(\xi).$$

Действительно, пусть $N_\tau(\xi)$ – число скачков функции ξ до момента $\tau(\xi)$ включительно. Очевидно, что для функции с конечным моментом первого выхода из G число $n_1 = N_{\sigma_{G^{-r}}} \widetilde{L}_r \xi$ конечно $(n_1 \geqslant 0)$. Также конечны числа $n_2 = N_{\sigma_{G^{-r/2}}} \widetilde{L}_{r/2}(\theta_{t_1} \xi)$, где $t_1 = \sigma_{G^{-r}} \widetilde{L}_r \xi$, $n_3 = N_{\sigma_{G^{-r/3}}} \widetilde{L}_{r/3}(\theta_{t_2} \xi)$, где $t_2 = t_1 + \sigma_{G^{-r}} \widetilde{L}_r(\theta_{t_1} \xi)$, и т.д. Пусть теперь $r_k = r/C_G$ для всех $k < n_1$, $r_k = r/(2C_G)$ для всех $n_1 \leqslant k < n_1 + n_2$ и т.д., $r_k = r/(mC_G)$ для всех $n_1 + \cdots + n_{m-1} \leqslant k < n_1 + \cdots + n_m$ (может оказаться, что так построенная последовательность начинается со значения r/m_0, когда $n_1 = \cdots = n_{m_0-1} = 0$ и $n_{m_0} \geqslant 1$, но для любого $x \in G$ такое m_0 существует; то же касается выбора остальных членов последовательности – изменения в нумерации членов последовательности при пропуске некоторых порядков очевидны). При заданной траектории ξ в момент $\tau_k(\xi)$ значение r_{k+1} зависит только от значений ξ на интервале $[0, \tau_k(\xi)]$, т.е. последовательность (r_k) неупреждающая; при этом $r_k \to 0$ P_{x_0}-почти наверное.

В случае многомерного полумарковского процесса для доказательства предельных теорем мы используем метод разбиения интервала внутренних моментов более сложный, чем используется при разбиении числового интервала или тот, который мы использовали для одномерного процесса.

Для каждой реализации ξ с конечным моментом первого выхода из G мы рассмотрим последовательность $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательностей эллиптических окрестностей точек траектории. Каждая последовательность δ_n является последовательностью порядкового типа ω^n. При этом мы получаем упорядоченную последовательность разбиений траектории точками моментов первых выходов из этих окрестностей, в которой каждое следующее разбиение мельче предыдущего.

Исходная (первая) последовательность окрестностей δ_1, соответствующая последовательности (r_k) (построенная выше), служит основой для построения второй последовательности δ_2 порядкового типа ω^2. Так же, как множество G "исчерпывается" эллипсоидами $\mathrm{el}\,(x_{k-1}, r_k, M_{x_{k-1}})$ последовательности δ_1, каждый такой эллипсоид "исчерпывается" эллипсоидами второго порядка $\mathrm{el}\,(x_{k_1(k_2-1)}, r_{k_1k_2}, M_{x_{k_1(k_2-1)}})$: для каждого индекса k_1, момента $t_{k_1} = \tau_{k_1}(\xi)$ и точки $x_{k_1} = \pi_{\tau_{k_1}}(\xi)$ определяется последовательность $(r_{k_1n})_{n=1}^{\infty}$ $(r_{k_1n} \to 0)$; одновременно с этим определяются последовательности $t_{k_1n} = \tau_{k_1n}(\xi)$ и $x_{k_1n} = \pi_{\tau_{k_1n}}(\xi)$ и эллипсоиды $E_{k_1k_2} = \mathrm{el}\,(x_{k_1(k_2-1)}, r_{k_1k_2}, M_{x_{k_1(k_2-1)}})$, при этом $t_{k_10} = t_{k_1}$, $t_{k_1n} = \tau_{k_1(n-1)}(\xi) + \sigma_{E_{k_1n}}(\theta_{\tau_{k_1(n-1)}}(\xi))$. По построению,

$$\sigma_{E_{k_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{E_{k_1n}} \circ \theta_{\tau_{k_1(n-1)}}.$$

Далее построение ведется по индукции, так что

$$\sigma_{E_{k_1\ldots k_n}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{E_{k_1\ldots k_n m}} \circ \theta_{\tau_{k_1\ldots k_n(m-1)}},$$

где $\tau_{k_1\ldots k_n 0} = \tau_{k_1\ldots k_n}$, $\tau_{k_1\ldots k_n m}$ – частная сумма ряда.

4.2.2. Стохастический интеграл по следу (многомерный).

Рассмотрим ступенчатую функцию $\widetilde{L}_r\xi$, для которой момент $\sigma_G(\xi)$ является точкой накопления бесконечного числа скачков. Эта функция определяется последовательностью пар $(t_k, x_k)_0^\infty$ моментов разрыва $t_k = \tau_k(\xi)$ и значений этой функции в моменты разрыва $x_k = \pi_{\tau_k}(\xi)$ (ступенчатая функция непрерывна справа). При этом точка x_k $(k \geqslant 1)$ принадлежит поверхности эллипсоида $\mathrm{el}\,(x_{k-1}, r_k, M_{x_{k-1}})$. Для непрерывной на замыкании множества G векторной функции $A(x)$ рассмотрим ряд

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\pi_{\tau_{k-1}}), (\pi_{\tau_k} - \pi_{\tau_{k-1}})), \tag{4}$$

где под знаком суммы стоит скалярное произведение двух d-мерных векторов. Каждая частная сумма и ряд (если он сходится в каком-либо смысле) рассматриваются как случайные величины, т.е. как измеримые функции от $\xi \in \mathcal{D}$. Более того, так как τ_k – внутренние марковские моменты, то π_{τ_k} и все суммы – $\mathcal{F}^\circ$-измеримые случайные величины. Сходимость частных сумм к пределу при $n \to \infty$ справедлива для любой непрерывной функции ξ, для которой $\sigma_G\xi < \infty$. Нас интересует сходимость ряда S_1 к пределу при стремлении параметра r мелкости разбиения к нулю.

Мы будем рассматривать случай, когда полумарковское семейство мер (P_x) таково, что $(\forall x \in G)\ P_x(\sigma_G < \infty) = 1$. При заданной начальной точке траектории x_0 рассмотрим математическое ожидание ряда (4), т.е. интеграл от этого ряда по мере P_{x_0}.

$$P_{x_0}(S_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{x_0}((A(\pi_{\tau_{k-1}}), (\pi_{\tau_k} - \pi_{\tau_{k-1}}))) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_{x_0}((A(\pi_{\tau_{k-1}}), (P_{\pi_{\tau_{k-1}}}(\pi_{\sigma_{E'_k}}) - \pi_{\tau_{k-1}}))),$$

где $E'_k = \mathrm{el}\,(\pi_0, r_k, M_{\pi_0})$. Для заданной начальной точки $x \in G$ имеем

$$P_x(\pi_{\sigma_{E'_k}}) = \int\limits_{\partial\, E_k} p\, h_{E^x_k}(0, p \,|\, x)\, dS(p),$$

где $h_{E^x_k}(0, p \,|\, x)$ – плотность распределения точки первого выхода из эллипсоида $E^x_k = \mathrm{el}\,(x, r_k, M_x) \equiv M_x^{-1}B(0, r_k) + x \equiv r_k M_x^{-1}B + x$ в точку p, если начальная точка $\xi(0) = x$ $(B = B(0,1))$. Применим преобразование сдвига, чтобы поместить начало координат в точку x. Пусть $h^x_\Delta(0, p \,|\, 0)$ – преобразованная плотность: $h^x_\Delta(0, p - x \,|\, 0) = h_{\Delta + x}(0, p \,|\, x)$. Тогда

$$P_x(\pi_{\sigma_{E'_k}}) = \int\limits_{\partial(r_k M_x^{-1}B)+x} p\, h^x_{r_k M_x^{-1}B}(0, p - x \,|\, 0)\, dS(p) =$$

$$= \int\limits_{\partial(r_k M_x^{-1}B)} (y + x)\, h^x_{r_k M_x^{-1}B}(0, y \,|\, 0)\, dS(y) =$$

$$= x + \int\limits_{\partial r_k B} (M_x^{-1}y)\, h^x_{r_k M_x^{-1}B}(0, M_x^{-1}y \,|\, 0) \left(J^{M_x}_{r_k M_x^{-1}B}(M_x^{-1}y) \right)^{-1} dS(y),$$

где $J^M_\Delta(x)$ – коэффициент преобразования размера элемента поверхности множества Δ в точке x при линейном отображении M ("якобиан"). Деленная на якобиан плотность под знаком интеграла представляет собой преобразованную плотность при линейном отображении M_x, которую мы обозначим $h^{x, M_x}_{r_k B}(0, y \,|\, 0)$. При этом обозначении предыдущее выражение равно

$$x + \int\limits_{\partial r_k B} (M_x^{-1}y)\, h^{x, M_x}_{r_k B}(0, y \,|\, 0)\, dS(y) =$$

$$= x + \int\limits_{\partial B} r_k^d (M_x^{-1}p)\, h^{x, M_x}_{r_k B}(0, r_k p \,|\, 0)\, dS(p).$$

Известна асимптотика плотности

$$\tilde{h}_B(\lambda, y|0) \equiv \tilde{h}^{r_k}_B(\lambda, y|0) \equiv r_k^{d-1} h^{x, M_x}_{r_k B}(\lambda, r_k y \,|\, 0)$$

(см. [6], теорема 5.12):

$$\tilde{h}_B(\lambda, p|0) = \frac{1}{\omega_d}\left(1 + r_k\left(\sum_{i=1}^{d} b^i(x)p^i + X_x(p)\right) + \right.$$

$$\left. + r_k^2\left(-c(\lambda, x)\frac{1}{d} + Y_x(p)\right) + o(r_k^2)\right) \qquad (5)$$

равномерно по $x \in G$ и $(\forall l > 0)$ равномерно по $\lambda \in [0, l)$, члены $X_x(p)$, $Y_x(p)$ как функции от p ограничены и ортогональны по отношению к любой постоянной и любой линейной функции на поверхности шара B. Подставляя это выражение под знак интеграла, мы получаем, что предыдущее выражение равно

$$x + r_k^2 \int_{\partial B} (M_x^{-1}p)\,\frac{1}{\omega_d}\sum_{i=1}^{d} b^i(x)p^i\,dS(p) + o(r_k^2) =$$

$$= x + \frac{r_k^2}{d}(M_x^{-1}b(x)) + o(r_k^2),$$

где $b(x)$ – вектор с координатами $b^i(x)$. Отсюда полученное выше выражение для математического ожидания ряда представимо в виде

$$P_{x_0}(S_1) = P_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(A(\pi_{\tau_{k-1}}), \left(r_k^2\frac{1}{d}(M_{\pi_{\tau_{k-1}}}^{-1} b(\pi_{\tau_{k-1}})) + o(r_k^2)\right)\right)\right). \quad (6)$$

Мы докажем, что ряд под знаком интеграла сходится в среднем квадратичном как $\mathcal{F}^\circ$-измеримая функция к некоторому пределу и найдем значение этого предела при $r_1 \to 0$. Для этого мы сперва рассмотрим асимптотику момента первого выхода из эллипсоидальной окрестности начальной точки.

Пусть $m_{E_k}(x, y)$ – условное математическое ожидание момента первого выхода из эллипсоида E_k при фиксированных начальной точке x и точке первого выхода y, т.е. P_x-почти наверное

$$m_{E_k}(x, y) \equiv P_x(\sigma_{E_k} \mid \pi_{\sigma_{E_k}} = y) = \frac{m_{E_k}(y \mid x)}{h_{E_k}(0, y \mid x)},$$

где

$$m_{E_k}(y \mid x) = -\frac{\partial}{\partial\lambda} h_{E_k}(\lambda, y \mid x)\Big|_{\lambda=0}.$$

Из равномерной по λ асимптотики (5) следует, что

$$m_{E_k}(x,y)=\frac{1}{d\,\omega_d}(\gamma(x)\,r_k^2+o(r_k^2))J^{M_x}_{M_x^{-1}B}(y'),$$

где $y'=(y-x)/r_k$ и

$$\gamma(x)=\frac{\partial}{\partial\lambda}c(\lambda,x)\Big|_{\lambda=0}.$$

С другой стороны,

$$h_{E_k}(0,y\,|\,x)=\frac{1}{\omega_d}(1+o(1))J^{M_x}_{M_x^{-1}B}(y').$$

Отсюда

$$m_{E_k}(x,y)=\frac{\gamma(x)}{d}\,r_k^2+o(r_k^2). \tag{7}$$

Следовательно, условное математическое ожидание момента первого выхода из эллипсоидальной окрестности имеет главный член асимптотики, который P_x-почти наверное не зависит от точки первого выхода, когда форма эллипсоидальной окрестности согласована с матрицей диффузионных коэффициентов уравнения (2) полумарковского процесса. Подставим в (6) значения r_k^2, выраженные через условные m_{E_k}:

$$P_{x_0}(S_1)=P_{x_0}\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(A(\pi_{\tau_{k-1}}),\biggl(\frac{(M^{-1}_{\pi_{\tau_{k-1}}}b(\pi_{\tau_{k-1}}))}{\gamma(\pi_{\tau_{k-1}})}+$$

$$+o(1)\biggr)\biggr)m_{E_k}(\pi_{\tau_{k-1}},\pi_{\tau_k})\biggr). \tag{8}$$

Выражение под знаком интеграла фактически представляет собой интегральную сумму и сходится в средне квадратичном смысле к некоторому $\mathcal{F}^{\circ}$-измеримому пределу. Чтобы доказать это утверждение и найти предел, удобнее всего использовать рассмотренный выше метод разбиения интервала внутренних моментов с помощью последовательностей внутренних моментов порядкового типа ω^n. Вместо ряда (4) мы рассмотрим ряд

$$S_n=\sum_{k_1,\dots,k_n}(A(\pi_{\tau_{k_1\dots k_{n-1}(k_n-1)}}),(\pi_{\tau_{k_1\dots k_n}}-\pi_{\tau_{k_1\dots k_{n-1}(k_n-1)}})) \tag{9}$$

и его математическое ожидание – обобщение представления (8):

$$P_{x_0}(S_n) =$$

$$= P_{x_0}\Bigg(\sum_{k_1,\ldots,k_n} \Bigg(A(\pi_{\tau_{k_1\ldots(k_n-1)}}), \Bigg(\frac{(M^{-1}_{\pi_{\tau_{k_1\ldots(k_n-1)}}} b(\pi_{\tau_{k_1\ldots(k_n-1)}}))}{\gamma(\pi_{\tau_{k_1\ldots(k_n-1)}})} +$$

$$+o(1)\Bigg)\Bigg) m_{E_{k_1,\ldots,k_n}}(\pi_{\tau_{k_1\ldots(k_n-1)}}, \pi_{\tau_{k_1\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})\Bigg). \qquad (10)$$

Точно так же, как в одномерном случае, мы убеждаемся, что последовательность сумм условных матаматических ожиданий моментов первого выхода из промежуточных эллипсоидальных окрестностей образует мартингал, сходящийся к значению аддитивного функционала $\mu_\tau \equiv P_{\pi_0}(\tau | \mathcal{F}^\circ)$ в точке σ_G при росте порядка разбиения, при котором расстояние между разбивающими точками (в метрике пространства внутренних моментов) стремится к нулю; при этом выражение (10) стремится к математическому ожиданию криволинейного интеграла по аддитивному функционалу μ_τ [6]

$$P_{x_0}(S_n) \to P_{x_0}\left(\int_0^{\sigma_G} \left(A(\pi_\tau), \frac{(M^{-1}_{\pi_\tau} b(\pi_\tau))}{\gamma(\pi_\tau)} \right) d\mu_\tau \right).$$

Обозначим

$$\alpha_\tau = \int_0^\tau \frac{(M^{-1}_{\pi_{\tau_1}} b(\pi_{\tau_1}))}{\gamma(\pi_{\tau_1})} d\mu_{\tau_1}, \quad \beta_\tau = \pi_\tau - \alpha_\tau.$$

Из предыдущей формулы следует, что для любого внутреннего момента τ $P_{x_0}(\beta_\tau) = x_0$. Докажем, что для любого внутреннего момента τ_1

$$P_{x_0}(\beta_\tau | \mathcal{F}^\circ_{\tau_1}) = \beta_{\tau_1}$$

на множестве $\{\tau_1 \leqslant \tau\}$ (P_{x_0}-почти наверное), т.е. функционал β_τ является мартингалом как функция от внутреннего момента. Действительно, для любых $\tau_i \in \mathcal{T}_\circ$ $(i = 1, 2)$ таких, что $\{\tau_1 < \tau_2\}$, существует $\tau'_2 \in \mathcal{T}_\circ$ такое, что $\tau_2 = \tau_1 \dot{+} \tau'_2$ [6]. Отсюда $\pi_{\tau_2} = \pi_{\tau'_2}\theta_{\tau_1}$.

Кроме того для любой ограниченной функции $f(x)$ $(x \in G)$ справедливо

$$\int_0^{\tau_2} f(\pi_\tau)\,d\mu_\tau = \int_0^{\tau_1} f(\pi_\tau)\,d\mu_\tau + \left(\int_0^{\tau_2'} f(\pi_\tau)\,d\mu_\tau\right) \circ \theta_{\tau_1}.$$

Отсюда для любого $B \in \mathcal{F}^\circ_{\tau_1}$

$$P_x(\beta_{\tau_2}; B \cap \{\tau_1 < \tau_2\}) = P_x(\beta_{\tau_1}; B \cap \{\tau_1 < \tau_2\}) +$$

$$+ P_x(\pi_{\tau_2} - \pi_{\tau_1} - \alpha_{\tau_2} + \alpha_{\tau_1}; B \cap \{\tau_1 < \tau_2\}).$$

При этом, согласно полумарковскому свойству процесса,

$$P_x(\pi_{\tau_2'}\theta_{\tau_1} - \alpha_{\tau_2'}\theta_{\tau_1} - \pi_{\tau_1}; B \cap \{\tau_1 < \tau_2\}) =$$

$$= P_x(P_{\pi_{\tau_1}}(\beta_{\tau_2'}) - \pi_{\tau_1}; B \cap \{\tau_1 < \tau_2\}) = 0.$$

Мартингальное свойство доказано для моментов $\tau \in \mathcal{T}_\circ$. Известно, что множество $\mathcal{T}_\circ$, дополненное $\mathcal{F}^\circ$-измеримыми линейными комбинациями, плотно в $\mathcal{T}_*$ относительно метрики ρ_ℓ. Отсюда следует, что мартингал β_τ продолжается на $\mathcal{T}_*(\ell\xi)$ с сохранением свойства мартингала [3]. Сумму (4) теперь можно переписать в виде двух сумм

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\pi_{\tau_{k-1}}), (\beta_{\tau_k} - \beta_{\tau_{k-1}})) + \sum_{k=1}^{\infty} (A(\pi_{\tau_{k-1}}), (\alpha_{\tau_k} - \alpha_{\tau_{k-1}})).$$

Вторую сумму можно записать в виде криволинейного интеграла

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(A(\pi_{\tau_{k-1}}), \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{(M_{\pi_\tau}^{-1} b(\pi_\tau))}{\gamma(\pi_\tau)}\,d\mu_\tau \right) = \int_0^{\sigma_G} \frac{(F(\tau), (M_{\pi_\tau}^{-1} b(\pi_\tau)))}{\gamma(\pi_\tau)}\,d\mu_\tau,$$

где $F(\tau) = A(\pi_{\tau_{k-1}})$ тогда и только тогда, когда $\tau_{r-1} \leqslant \tau < \tau_r$. При этом для любой траектории ξ $\rho(\pi_\tau(\xi), \pi_{\tau_{k-1}}(\xi)) \leqslant C_G r_k$. Поэтому ясно, что для непрерывной векторной функции $A(x)$ $(x \in G)$ пределом второй суммы является криволинейный интеграл

$$\int_0^{\sigma_G} \frac{(A(\pi_\tau), (M_{\pi_\tau}^{-1} b(\pi_\tau)))}{\gamma(\pi_\tau)}\,d\mu_\tau.$$

Первая сумма является интегральной суммой стохастического интеграла по мартингалу (многомерный вариант), который исследован в случае одномерного параметрического множества ([4] и др.). Особенностью его в нашем случае является то, что множество параметров не является линейно упорядоченным. Мы покажем, что первая сумма стремится к пределу в средне квадратическом смысле при стремлении параметра мелкости разбиения к нулю. Для этого мы сперва докажем, что мартингал β_τ является квадратично интегрируемым, т.е. $P_{x_0}((\beta_{\sigma_G})^2) < \infty$, где $(\beta_{\sigma_G})^2 = (\beta_{\sigma_G}, \beta_{\sigma_G}) = \sum_{i=1}^d (\beta^i_{\sigma_G})^2$ – скалярный квадрат вектора β_{σ_G}. Действительно, при данном разбиении интервала $[0, \sigma_G)$ имеем

$$P_{x_0}((\beta_{\sigma_G})^2) = P_{x_0}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{\tau_k} - \beta_{\tau_{k-1}})\right)^2\right) =$$

$$= P_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{\tau_k} - \beta_{\tau_{k-1}})^2\right) =$$

$$= P_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\pi_{\tau_k} - \alpha_{\tau_k} - \pi_{\tau_{k-1}} + \alpha_{\tau_{k-1}})^2\right) =$$

$$= P_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}((\pi_{\tau_k} - \pi_{\tau_{k-1}})^2 + (\alpha_{\tau_k} - \alpha_{\tau_{k-1}})^2 - 2(\pi_{\tau_k} - \pi_{\tau_{k-1}}, \alpha_{\tau_k} - \alpha_{\tau_{k-1}}))\right) =$$

$$= P_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}((\pi_{\tau_k} - \pi_{\tau_{k-1}})^2 + o(r_k^2))\right) \leqslant P_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(C_G^2 r_k^2 + o(r_k^2))\right) < \infty.$$

Рассмотрим использованную нами ранее иерархическую последовательность разбиений порядковых типов ω^n $(n \to \infty)$. Докажем, что в случае квадратично интегрируемого мартингала последовательность интегральных сумм, получаемых из (9) заменой приращений π_τ на приращения β_τ, сходится в себе в среднеквадратическом смысле. Имеем при $m < n$

$$\epsilon_{mn} \equiv P_{x_0}\Bigg(\Bigg(\sum_{k_1,\dots,k_m}(A(\pi_{\tau_{k_1\dots k_{m-1}(k_m-1)}}), (\beta_{\tau_{k_1\dots k_m}} - \beta_{\tau_{k_1\dots k_{m-1}(k_m-1)}})) -$$

$$- \sum_{k_1,\dots,k_m,\dots,k_n}(A(\pi_{\tau_{k_1\dots k_{n-1}(k_n-1)}}), (\beta_{\tau_{k_1\dots k_n}} - \beta_{\tau_{k_1\dots k_{n-1}(k_n-1)}}))\Bigg)^2\Bigg) =$$

$$= P_{x_0}\left(\Bigl(\sum_{k_1,\ldots,k_m,\ldots,k_n}((A(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_{m-1}(k_m-1)}})-\right.$$

$$\left.- A(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})), (\beta_{\tau_{k_1\ldots k_n}} - \beta_{\tau_{k_1\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})))\Bigr)^2\right),$$

где мы использовали представление приращения мартингала при разбиении низшего порядка через приращения мартингала при разбиении высшего порядка:

$$\beta_{\tau_{k_1\ldots k_m}} - \beta_{\tau_{k_1\ldots k_{m-1}(k_m-1)}} =$$

$$= \sum_{k_{m+1},\ldots,k_n}(\beta_{\tau_{k_1\ldots k_m\ldots k_n}} - \beta_{\tau_{k_1\ldots k_m\ldots k_{n-1}(k_n-1)}}).$$

Пользуясь свойством мартингала, мы заменяем под знаком интеграла квадрат суммы на сумму квадратов

$$P_{x_0}\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m,\ldots,k_n}\Bigl((A(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_{m-1}(k_m-1)}})-\right.$$

$$\left.-A(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_m\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})), (\beta_{\tau_{k_1\ldots k_m\ldots k_n}} - \beta_{\tau_{k_1\ldots k_m\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})\Bigr)^2\right).$$

Так как $\rho(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_{m-1}(k_m-1)}}, \pi_{\tau_{k_1\ldots k_{n-1}(k_n-1)}}) \leqslant C_G r_{k_1\ldots k_m}$ и функция $A(x)$ равномерно непрерывна на G, то для любого $\epsilon > 0$ существует порядок разбиения m_0 такой, что при всех $m > m_0$

$$|A(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_{m-1}(k_m-1)}}) - A(\pi_{\tau_{k_1\ldots k_m\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})| < \epsilon.$$

Отсюда

$$\epsilon_{mn} \leqslant \epsilon^2 P_{x_0}\left(\sum_{k_1,\ldots,k_n}(\beta_{\tau_{k_1\ldots k_n}} - \beta_{\tau_{k_1\ldots k_{n-1}(k_n-1)}})^2\right) = \epsilon^2 P_{x_0}((\beta_G)^2).$$

Сходимость последовательности (S_n) в среднеквадратическом смысле доказана. Предел этой последовательности мы называем стохастическим интегралом по следу полумарковского процесса и обозначаем

$$\mathrm{l.i.m.} S_n \equiv \int_0^{\sigma_G} A(\pi_\tau)\,d\pi_\tau.$$

Очевидно, что предел этот не зависит от последовательности разбиений, если параметр мелкости разбиений в этой последовательности стремится к нулю. Выше мы доказали представление этого предела:

$$\int_0^{\sigma_G} A(\pi_\tau)\,d\pi_\tau = \int_0^{\sigma_G} A(\pi_\tau)\,d\beta_\tau + \int_0^{\sigma_G} \frac{(A(\pi_\tau),(M_{\pi_\tau}^{-1}b(\pi_\tau)))}{\gamma(\pi_\tau)}\,d\mu_\tau, \qquad (11)$$

где первый член правой части – это стохастический интеграл по квадратично интегрируемому мартингалу на множестве внутренних моментов, а второй член – криволинейный интеграл по неубывающему $\mathcal{F}^\circ$-измеримому аддитивному функционалу.

4.3.2. Плотность меры на множестве следов (многомерная). Рассмотрим разбиение следа траектории ξ с конечным моментом первого выхода из G с помощью последовательности моментов первого выхода из эллиптических окрестностей (частные суммы ряда (3)). Пусть $(P_x^{(1)})$ и $(P_x^{(2)})$ – два полумарковских семейства мер, соответствующих двум частным дифференциальным уравнениям вида (2) с совпадающими матрицами старших коэффициентов, но с разными векторами коэффициентов при первых производных $b_1(x)$ и $b_2(x)$ и с разными коэффициентами при функции $c_1(\lambda,x)$ и $c_2(\lambda,x)$ $(x\in G, \lambda\geqslant 0)$. Согласованные системы эллипсоидальных окрестностей точек $x\in G$ для этих двух процессов идентичны. Построим последовательность итерированных моментов первого выхода из эллипсоидальных окрестностей, соответствующих последовательности радиусов (r_n) $(r_n\to 0)$ и сходящуюся к σ_G, так что выполняется равенство (2). Пусть $t_n = \tau_n(\xi)$, $x_n = \pi_{\tau_n}(\xi)$. При этом $t_n\to\sigma_G(\xi)$ и $x_n\to\pi_{\sigma_G}(\xi)$. Зная плотности распределения точек первого выхода из эллипсоидальных окрестностей, можно вычислить плотности попадания в точки $(x_1,\dots,x_n)$, соответствующие двум мерам $P_{x_0}^{(1)}$ и $P_{x_0}^{(2)}$.

$$\prod_{k=1}^n h_{E_k}^{(i)}(0,x_k\,|\,x_{k-1}) \quad (i=1,2),$$

где $E_k = \mathrm{el}\,(x_{k-1},r_k,M_{x_{k-1}})$. Эти плотности являются плотностями распределений "квантованного" процесса $\widetilde{L}_r^n(\xi)$, остановленного на n-ом шаге. Если эти плотности конечны и не равны нулю, то существует плотность одного такого распределения относительно другого:

$$\rho_{21}^{n,r}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{h_{E_k}^{(2)}(0, x_k \,|\, x_{k-1})}{h_{E_k}^{(1)}(0, x_k \,|\, x_{k-1})}.$$

Существование предела этой взаимной плотности при $n \to \infty$ зависит от скорости сходимости множителей произведения к единице. Для приведения этой плотности к удобной для анализа форме применим три преобразования: сдвига, масштаба и формы, – которые переводят плотность h в плотность $\tilde{h}$ по формуле

$$h_{E_k}(0, x_k \,|\, x_{k-1}) = \frac{\tilde{h}_B(0, p_k \,|\, 0)}{r^{d-1} J_B^{M_{x_{k-1}}^{-1}}(p_k)},$$

где $p_k = (1/r_k) M_{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1})$. Имеем, согласно формуле (5),

$$\rho_{21}^{n,r}(\xi) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} (\log h_{E_k}^{(2)}(0, x_k \,|\, x_{k-1}) - \log h_{E_k}^{(1)}(0, x_k \,|\, x_{k-1}))\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} (\log \tilde{h}_B^{(2)}(0, p_k \,|\, 0) - \log \tilde{h}_B^{(1)}(0, p_k \,|\, 0))\right) =$$

$$= \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} (\log(1 + (b_2(x_{k-1}), p_k) r_k + X_{x_{k-1}}(p_k) r_k + Y_{x_{k-1}}^{(2)}(p_k) r_k^2 + o(r_k^2)) -$$

$$- \log(1 + (b_1(x_{k-1}), p_k) r_k + X_{x_{k-1}}(p_k) r_k + Y_{x_{k-1}}^{(1)}(p_k) r_k^2 + o(r_k^2)))\Big),$$

где $X_{x_{k-1}}(p_k)$, $Y_{x_{k-1}}^{(1)}(p_k)$, $Y_{x_{k-1}}^{(2)}(p_k)$ – ортогональные члены. Выписывая первые два члена разложения логарифма в ряд Тейлора: $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$, – имеем

$$\rho_{21}^{r}(\xi) \equiv \lim_{n\to\infty} \rho_{21}^{n,r}(\xi) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \Big(r_k \big((b_2(x_{k-1}) - b_1(x_{k-1})), p_k\big) +$$

$$+ r_k^2 \big(Y_{x_{k-1}}^{(2)}(p_k) - Y_{x_{k-1}}^{(1)}(p_k)\big) - \frac{r_k^2}{2} \big(\big(b_2(x_{k-1}), p_k\big)^2 - \big(b_1(x_{k-1}), p_k\big)^2\big) -$$

$$- r_k^2 X_{x_{k-1}}(p_k) \big((b_2(x_{k-1}) - b_1(x_{k-1})), p_k\big) + o(r_k^2)\Big)\Big).$$

Доказательство сходимости $P^{(1)}_{x_0}$-почти наверное при $n \to \infty$ не вызывает затруднений. Далее, благодаря свойству ортогональности функций X_x и $Y^{(i)}_x$ к линейной и постоянной функциям соответственно относительно меры Лебега на поверхности единичного шара, интегралы $P^{(1)}_{x_{k-1}}(p^i_k X_{x_{k-1}}(p_k))$ и $P^{(1)}_{x_{k-1}}(Y_{x_{k-1}}(p_k))$ имеют порядок r_k. Отсюда следует, что

$$P^{(1)}_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p^i_k X_{x_{k-1}}(p_k) r_k^2\right) \to 0, \quad P^{(1)}_{x_0}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} p^i_k X_{x_{k-1}}(p_k) r_k^2\right)^2\right) \to 0,$$

$$P^{(1)}_{x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y^{(i)}_{x_{k-1}}(p_k) r_k^2\right) \to 0, \quad P^{(1)}_{x_0}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y^{(i)}_{x_{k-1}}(p_k) r_k^2\right)^2\right) \to 0$$

при стремлении параметра мелкости разбиения r к нулю, т.е. суммы членов $p^i_k X_{x_{k-1}}(p_k) r_k^2$ и $Y_{x_{k-1}}(p_k) r_k^2$ стремятся к нулю в смысле средних квадратов. Далее, применяя формулу (5), имеем

$$P^{(1)}_{x_{k-1}}((b_i(x_{k-1}), p_k)^2) = \frac{1}{d}\,(b_i(x_{k-1}))^2 + O(r_k).$$

Отсюда

$$P^{(1)}_{x_0}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big((b_i(x_{k-1}), p_k)^2 - \frac{1}{d}\,(b_i(x_{k-1}))^2\Big)\, r_k^2\right)^2\right) \to 0$$

при стремлении параметра r к нулю. Кроме того выразим слагаемые первой суммы через исходные переменные:

$$(b_i(x_{k-1}),\, r_k p_k) = (b_i(x_{k-1}),\, M_{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1})) =$$
$$= (M^T_{x_{k-1}} b_i(x_{k-1}), (x_k - x_{k-1})).$$

Отсюда две суммы в показателе экспоненты стремятся соответственно к стохастическому интегралу и к криволинейному интегралу по следу траектории процесса (в смысле средних квадратов). Сама же плотность ρ^r_{21} стремится к $\mathcal{F}^\circ$-измеримой плотности ρ_{21} меры $R^{(2)}_{x_0}$ относительно меры $R^{(2)}_{x_0}$, где $R^{(i)}_{x_0} = P^{(i)}_{x_0} \circ \ell^{-1}$ ($\ell\xi$ – след траектории ξ). Таким образом,

$$\rho_{21}(\ell) = \exp\left(\int_0^{\sigma_G}\Big(M^T_{\pi_\tau}\big(b_2(\pi_\tau) - b_1(\pi_\tau)\big), d\pi_\tau\Big) -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\sigma_G}\Big(\big(b_2(\pi_\tau)\big)^2-\big(b_1(\pi_\tau)\big)^2\Big)\frac{1}{\gamma_1(\pi_\tau)}\,d\mu_\tau\Big). \qquad (12)$$

Так же, как и в случае одномерного процесса, эта плотность может быть выражена в терминах ассоциированного марковского процесса $(\overline{P}_x^{(1)})$ и индуцированного многомерного винеровского процесса. Можно показать, что это выражение согласуется с плотностью мер в классе марковских процессов диффузионного типа.

5. Абсолютная непрерывность мер процессов хода времени

Для полумарковского процесса распределение процесса хода времени относительно следа определяется с помощью условной производящей функции

$$P_x(\exp(-\lambda\tau)|\mathcal{F}^o) \equiv \exp(-b(\lambda,\tau|x)) \quad (\lambda>0,\ \tau\in\mathcal{T}_*),$$

где $b(\lambda,\tau|\pi_0)\equiv b(\lambda,\tau)$ – $\mathcal{F}^o$-измеримый аддитивный функционал: для любых $\tau_1,\tau_2\in\mathcal{T}_*$

$$b(\lambda,\tau_1\dot{+}\tau_2)=b(\lambda,\tau_1)+b(\lambda,\tau_2)\circ\theta_{\tau_1}$$

[3, с. 290]. Мы предположим, что этот функционал P_x-почти наверное непрерывен относительно метрики ρ_ℓ. Из аддитивности этого функционала следует его представление в форме Леви

$$b(\lambda,\tau)=\lambda a(\tau)+\int_{0+}^{\infty}(1-\exp(-\lambda u))\,n(\tau,\,du),$$

где $a(\tau)$ – неубывающий аддитивный функционал детерминированного хода времени и при любом $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ $n(\tau,\,B)$ – неубывающий аддитивный функционал случайного хода времени (функционал Леви). Функционал $a(\tau)$ определяет условную детерминированную меру $a([\tau_1,\tau_2)_\ell)=a(\tau_2)-a(\tau_1)$. Функционал Леви определяет меру $n([\tau_1,\tau_2)_\ell\times B)=n(\tau_2,B)-n(\tau_1,B)$ на метрическом пространстве $\ell\xi\times(0,\infty)$ (мера Леви), которая является мерой интенсивности пуассоновской случайной меры $\mathcal{P}$ (пуассоновское точечное поле) на $\ell\xi\times(0,\infty)$, распределение которой зависит от $\ell\xi$:

$$P_x(\mathcal{P}([\tau_1,\tau_2)_\ell\times B)=k|\mathcal{F}^o)=\frac{1}{k!}\,(n([\tau_1,\tau_2)_\ell\times B))^k\exp(-n([\tau_1,\tau_2)_\ell\times B))$$

($k \geqslant 0$ целое). При этом P_x-почти наверное

$$\tau = a([0,\tau)_\ell) + \int\limits_{0+}^{\infty} u\,\mathcal{P}([0,\tau)_\ell \times du)$$

– представление Леви. Пуассоновская составляющая в этой формуле определяет скачки процесса хода времени, которые естественно интерпретировать как интервалы постоянства траектории. Таким образом, аддитивный функционал η_τ P_x-почти наверное представляет собой процесс с независимыми приращениями на линейно-упорядоченном метрическом пространстве. Можно доказать, что на такой процесс распространяются результаты Скорохода об абсолютной непрерывности аналогичных процессов на отрезке прямой. Для взаимной абсолютной непрерывности мер таких процессов необходимо, чтобы их детерминированные компоненты совпадали. При выполнении этого условия взаимная абсолютная непрерывность мер этих процессов определяется мерами Леви их пуассоновских компонент. Пусть $S_x^{(i)}(\cdot\,|\,l)$ – распределение хода времени относительно следа $l \in \mathcal{M}$, соответствующее условному распределению $P_x^{(i)}(\cdot|\mathcal{F}^o)$, и n_i – его мера Леви ($i=1,2$). Теорема Скорохода [2] утверждает следующее: меры пуассоновских компонент процессов с независимыми приращениями взаимно абсолютно непрерывны тогда и только тогда, когда взаимно абсолютно непрерывны меры интенсивности пуассоновских компонент и плотность $\phi_{21} \equiv dn_2/dn_1$ одной меры интенсивности относительно другой удовлетворяет условию

$$\int\limits_{[0,\sigma_{(a,b)})_\ell \times (0,\infty)} \frac{(1-\phi_{21}(\tau,u))^2}{1+(\phi_{21}(\tau,u))^2}\, n_i(d\tau \times du) < \infty \quad (i=1,2).$$

При этом

$$\widetilde{\rho}_{21}(\eta) \equiv (dS_x^{(2)}/dS_x^{(1)})(\eta) =$$

$$= \exp\Big(\int\limits_{[0,\sigma_{(a,b)})_\ell \times (0,\infty)} \ln\phi_{21}(\tau,u)\,\mathcal{P}(d\tau\times du) +$$

$$+ \int\limits_{[0,\sigma_{(a,b)})_\ell \times (0,\infty)} (1-\phi_{21}(\tau,u))\, n_1(d\tau \times du)\Big).$$

Учитывая возможную бесконечность значений пуассоновской меры и меры ее интенсивности в окрестности множества $[0,\sigma_{(a,b)})_\ell \times \{0\}$, предыдущие интегралы следует понимать в расширенном смысле: существует $c>0$ такое, что плотность $\widetilde{\rho}_{21}(\eta)$ вычисляется по формуле

$$\exp\Big(\int\limits_{|1-\phi_{21}|\leqslant c} \ln\phi_{21}(\tau,u)\,(\mathcal{P}(d\tau\times du)-n_1(d\tau\times du))+ \\ + \int\limits_{|1-\phi_{21}|>c} \ln\phi_{21}(\tau,u)\,\mathcal{P}(d\tau\times du)+ \\ + \int\limits_{|1-\phi_{21}|\leqslant c} (1-\phi_{21}(\tau,u)+\ln\phi_{21}(\tau,u))\,n_1(d\tau\times du)+ \\ + \int\limits_{|1-\phi_{21}|>c} (1-\phi_{21}(\tau,u))\,n_1(d\tau\times du)\Big).$$

6. Плотность меры процесса

Итак, при выполнении условий существования плотностей $\overline{\rho}_{21}$ и $\widetilde{\rho}_{21}$ плотность $\rho_{21}\equiv dP_x^{(2)}/dP_x^{(1)}$ выражается формулой: $P_x^{(1)}$-почти наверное

$$\rho_{21}=\overline{\rho}_{21}(\ell)\,\widetilde{\rho}_{21}(\eta)= \\ =\exp\bigg(\int\limits_0^{\sigma_G}\Big(M_{\pi_\tau}^T\,(b_2(\pi_\tau)-b_1(\pi_\tau)),d\pi_\tau\Big)- \\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sigma_G}\Big(\big(b_2(\pi_\tau)\big)^2-\big(b_1(\pi_\tau)\big)^2\Big)\frac{1}{\gamma_1(\pi_\tau)}\,d\mu_\tau+ \\ + \int\limits_{[0,\sigma_{(a,b)})_\ell\times(0,\infty)} \ln\phi_{21}(\tau,u)\,\mathcal{P}(d\tau\times du)+ \\ + \int\limits_{[0,\sigma_{(a,b)})_\ell\times(0,\infty)} (1-\phi_{21}(\tau,u))\,n_1(d\tau\times du)\bigg).$$

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion*. Facts and Formulas, Birkhäuser Verlag (1996).
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов, Том I*. Наука, М. (1971).
3. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*. Наука, М. (1974).
4. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*. Наука, М. (1986).
5. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*. Наука, М. (1964).
6. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы*. Наука, СПб (2001).

Harlamov B. P. Absolute continuity of measures in the class of semi-Markov processes of diffusion type.

The property of absolute continuity of measures in the class of semi-Markov processes of diffusion type is investigated. The measure of such a process can be represented in the form of a composition of two measures. The first one is a distribution of a random track, and the second one is a conditional distribution of a time run along the track. The desired density (if it exists) is represented in the form of product of two corresponding densities. The first density is based on the asymptotic of the distribution density of the first exit point for the process, exiting from an ellipsoidal neighborhood of its initial point. In terms of the associated Markov process and the induced Wiener process this formula coincides with the known formula for a density of a diffusion type Markov process measure. The second density is based on the semi-Markov property, which implies that the conditional distribution of the time run given track is a distribution of a monotone process with independent increments.

Институт проблем
машиноведения РАН

Поступило 12 июля 2002 г.