Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 295, 2003 г.

Е. В. Фролова

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ВЕРИГИНА В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

**Посвящается
академику О. А. Ладыженской
к ее юбилею**

1. Введение и постановка задачи

Задача Веригина [1] описывает процесс нагнетания жидкости в пористую среду. Такой процесс происходит, например, при затоплении нефтяных скважин водой (вода под давлением вытесняет значительно более вязкую нефть) или при нагнетании цементных, глинистых растворов, проводимом для увеличения прочности гидротехнических сооружений (происходит вытеснение воды из пористой среды более вязкой жидкостью). Задача Веригина является задачей со свободной границей так как неизвестна поверхность, разделяющая жидкости и давления нагнетаемой и вытесняемой жидкостей.

В многомерном случае задача Веригина рассматривалась Е. В. Радкевичем [2], Г. И. Бижановой и В. А. Солонниковым [3, 4]. В частности, в [3] приводится подробное доказательство локальной по времени теоремы существования в весовых пространствах Гельдера.

Данная работа ставит целью доказательство однозначной разрешимости задачи в анизотропных пространствах Соболева. Для этого используется модификация преобразования Е. Ханзавы [5], предложенная в работе [6] при доказательстве локальной по времени теоремы существования решения однофазной задачи Стефана в Соболевских пространствах. Это преобразование описано также в [7], где указывается на возможность получения с его помощью аналогичных результатов для двухфазных задач Сте-

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ, грант № 01-01-00330).

фана и Веригина. Так же как и в [6], мы докажем существование решения, гладкость которого не уменьшается со временем.

Пусть Ω_t^1, $\Omega_t^2 \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченные области, причем $\overline{\Omega}_t^1 \cap \overline{\Omega}_t^2 = \Gamma_t$, $\quad \partial\Omega_t^1 = S_1 \cup \Gamma_t$, $\quad \partial\Omega_t^2 = S_2 \cup \Gamma_t$, где S_1 и S_2 – известные непересекающиеся гиперповерхности, Γ_t – свободная поверхность, разделяющая области Ω_t^1 и Ω_t^2, предполагается, что Γ_t не имеет общих точек с поверхностями S_1 и S_2. Будем считать, что в окрестности каждой точки поверхности S_i, $i = 1, 2$ существует гладкий диффеоморфизм, распрямляющий границу, и выполнены все условия, которые обычно требуются при построении регуляризатора [8]. Систему координат выберем таким образом, чтобы внешняя нормаль к Ω_t^1 на поверхности Γ_t была направлена в сторону возрастания x_n. Для упрощения записи преобразований координат предположим также, что в начальный момент времени поверхность Γ_0 расположена внутри полосы $-\nu \le x_n \le \nu$, а поверхности S_1 и S_2 не пересекают полосу $-7\nu \le x_n \le 7\nu$, где $\nu > 0$.

Задача Веригина состоит в определении положения поверхности Γ_t и функций $u^1(x,t)$, $u^2(x,t)$, описывающих давление нагнетаемой и вытесняемой жидкостей в областях Ω_t^1 и Ω_t^2 соответственно и являющихся решением следующей начально-краевой задачи:

$$u_t^i - \alpha_i \Delta u^i = 0, \quad x \in \Omega_t^i, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

$$u^i\big|_{t=0} = u_0^i, \tag{1.2}$$

$$u^1\big|_{x\in\Gamma_t} = u^2\big|_{x\in\Gamma_t}, \tag{1.3}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n}\Big|_{x\in\Gamma_t} = \alpha_2 \frac{\partial u^2}{\partial n}\Big|_{x\in\Gamma_t}, \tag{1.4}$$

$$\mu V_n + \alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n}\Big|_{x\in\Gamma_t} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial n}\Big|_{x\in S_i} = 0, \tag{1.6}$$

где $\alpha_i > 0$, $\quad \mu > 0$, в условиях (1.4), (1.5) $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению нормали $\vec{n}$, внешней к области Ω_t^1, V_n – скорость движения свободной границы в направлении вектора $\vec{n}$.

Предположим, что неизвестная поверхность Γ_t может быть задана явным уравнением

$$x_n = \xi(x', t), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.7}$$

где $\xi(x', 0) = \xi_0(x')$ – известная функция. Тогда условие (1.5) принимает вид

$$\mu\xi_t + \alpha_1(u^1_{x_n} - \nabla'\xi \cdot \nabla' u^1)\big|_{x\in\Gamma_t} = 0. \tag{1.5$'$}$$

Мы ограничимся рассмотрением периодической задачи, предполагая, что функции ξ_0, u_0^i являются периодическими по переменным x^i, $i = 1, \dots, n-1$ с периодом 1 и известные поверхности S_1, S_2 периодически меняются относительно x_i, $i = 1, \dots, n-1$ с периодом 1. В этом случае решение задачи (1.1)–(1.6) и всех вспомогательных задач также будут являться периодическими.

2. Функциональные пространства

Обозначим через $B_1(a)$ единичный куб пространства $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$B_1(a) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \big| |x_i - a_i| < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n-1\},$$

через $\Pi_{1,a}$ – полосу $B_1(a) \times \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}^n \big| x' \in B_1(a)\}$. Для произвольного $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ положим $\Omega'(a) = \Omega \cap \Pi_{1,a}$.

Через $\widetilde{W}_p^{2-\gamma}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\gamma \in (0,1)$ обозначим пространство всех периодических функций, имеющих обобщенные производные первого порядка и конечную норму

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{2-\gamma}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|u\|_{W_p^{2-\gamma}(B_1(a))} = \Bigg(\sum_{|\alpha|\le 1}\int\limits_{B_1(a)} |D_x^\alpha u(x)|^p dx$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1}\int\limits_{B_1(a)}\int\limits_{B_1(a)} |D_x^\alpha u(x) - D_y^\alpha u(y)|^p \frac{dx dy}{|x-y|^{n-1+p(1-\gamma)}}\Bigg)^{1/p},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_{n-1}} x_{n-1}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – периодическая область, $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, под $\widetilde{L}_p(\Omega_T)$ подразумевается пространство всех периодических функций с конечной нормой в $L_p(\Omega'_T(a))$, $\forall a \in \mathbb{R}^{n-1}$. Через $\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)$ обозначим пространство всех периодических функций $u(x,t)$, определенных в Ω_T, имеющих обобщенные производные $D_x^\alpha u(x,t)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| \le 2$, $D_t u(x,t)$ и конечную норму

$$\|u\|_{p,\Omega_T}^{(2)} = \|u\|_{\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)} = \|u\|_{W_p^{2,1}(\Omega'_T(a))}$$

$$= \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega'(a)} \Big(\sum_{|\alpha|\le 2} |D_x^\alpha u(x,t)|^p + |D_t u(x,t)|^p \Big) dx dt \right)^{1/p}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Пусть $S \subset \overline{\Omega}$ – периодическая поверхность, $\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T)$ – пространство следов функций из $\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)$ на поверхности $S_T = S \times [0,T]$ с конечной нормой $\|u\|_{p,S_T}^{(2-1/p)}$, которая определяется естественным образом (см., например, [6]).

Через $\overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(\Omega_T)(\overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T))$ обозначим подпространство функций из $\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)(\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T))$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (u|_{t=0} = 0).$$

В периодической области с подвижной границей $Q_T = \{(x,t) | t \in [0,T],\ x \in \Omega_t\}$ определим анизотропные пространства Соболева $\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_T)$ как пространства периодических функций $u(x,t)$, имеющих в Q_T обобщенные производные $D_x^\alpha u(x,t)$, $|\alpha| \le 2$, $D_t u(x,t)$ и конечную норму

$$|||u|||_{p,Q_T}^{(2)} = \left(\int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega'_t(a)} \Big(\sum_{|\alpha|\le 2} |D_x^\alpha u(x,t)|^p + |D_t u(x,t)|^p \Big) dx \right)^{1/p}.$$

$\overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(Q_T)$ – подпространство функций из $\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям.

Пространство следов функций из $\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_T)$ на движущейся поверхности Γ_t обозначим через $\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\Gamma^T)$, $\Gamma^T =$

$\{(t,x)|t \in [0,T), \ x \in \Gamma_t\}$. Мы предполагаем, что поверхность Γ_t задается явным уравнением $x_n = \sum(x',t)$, где функция $\sum \in \widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ и имеет производную по времени, обладающую дополнительной гладкостью, а именно, $\sum_t \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$. Предполагая, что $p > n+2$, получаем в силу теоремы вложения [8], что производные функции, задающей поверхность как по пространственным переменным, так и по времени, удовлетворяют условию Гельдера. Вследствие этого норму в пространстве следов можем определить по следующей формуле:

$$\|u(x,t)\|_{p,\Gamma_t}^{(2-1/p)} = \|u(x',\Sigma(x',t),t)\|_{p,\mathbb{R}_T^{n-1}}^{(2-1/p)}, \quad p > n+2.$$

3. Формулировка результата

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$u_0^i \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0^i), \quad \xi_0 \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$$

с некоторым $p > n+2$, выполняются условия согласования:

$$u_0^1|_{x\in\Gamma_0} = u_0^2|_{x\in\Gamma_0}, \quad \frac{\partial u_0^i}{\partial n}|_{x\in S_i} = 0, \quad \alpha_1\frac{\partial u_0^1}{\partial n}|_{\Gamma_0} = \alpha_2\frac{\partial u_0^2}{\partial n}|_{\Gamma_0}$$

и имеют место неравенства

$$\left(\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial n}\right)\Big|_{x\in\Gamma_0} \geq \delta > 0, \tag{3.1}$$

$$[\alpha\nabla u_0]_{\Gamma_0} \leq \varepsilon\delta, \tag{3.2}$$

где ε достаточно малое положительное число.

Тогда при некотором положительном t^* существует периодическая функция $\xi : \mathbb{R}^{n-1}\times[0,t^*) \to \mathbb{R}$, совпадающая при $t = 0$ с ξ_0 и имеющая производную по времени, такая, что $\xi \in \widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}_{t^*}^{n-1})$, $\xi_t \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_{t^*}^{n-1})$. В областях Ω_t^1, Ω_t^2, разделяемых поверхностью Γ_t, заданной уравнением $x_n = \xi(x',t)$, $t \in [0,t^*)$, существу-

ют периодические функции $u^1 \in \widetilde{W}_p^{2,1}(Q_{t^*}^1)$, $\quad u^2 \in \widetilde{W}_p^{2,1}(Q_{t^*}^2)$, *которые являются решением задачи* (1.1)–(1.6), *и имеет место оценка*

$$\begin{aligned} &\|\xi\|^{(2-1/p)}_{p,\mathbb{R}^{n-1}_{t^*}} + \|\xi_t\|^{(1-1/p)}_{p,\mathbb{R}^{n-1}_{t^*}} + |||u^1|||^{(2)}_{p,Q^1_{t^*}} + |||u^2|||^{(2)}_{p,Q^2_{t^*}} \\ &\leq C(\|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u_0^1\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0^1)} + \|u_0^2\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0^2)}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Замечание 1 Условия (3.1), (3.2), являющиеся достаточными для разрешимости задачи Веригина, ставятся также и при исследовании задачи в Гельдеровских пространствах [2, 3].

Замечание 2 Согласно теоремам о следах [6, 7] для некоторого фиксированного $t_0 \in (0, t^*)$ функция $\xi(x', t_0)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, функция $u^i(x, t_0)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega^i_{t_0})$. Следовательно, Теорема 1 гарантирует существование решения задачи (1.1)-(1.6), гладкость которого не уменьшается со временем.

4. Переход к задаче в области с известной границей

Пусть функция $\sum \in \widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$ такая, что ее производная по времени обладает дополнительной гладкостью: $\sum_t \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$, удовлетворяет тем же начальным условиям, что и неизвестная функция $\xi(x', t)$:

$$\begin{aligned} \Sigma|_{t=0} &= \xi|_{t=0} = \xi_0, \\ \Sigma_t|_{t=0} &= \xi_t|_{t=0} = \frac{\alpha_1}{\mu}(\nabla'\xi_0 \cdot \nabla' u_0^1 - u^1_{0x_n})|_{\Gamma_0} \end{aligned} \tag{4.1}$$

и оценке

$$\begin{aligned} &\|\Sigma\|_p^{(2-1/p)} + \|\Sigma_t\|_p^{(1-1/p)} \\ &\leq C(\|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u_0^1\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0^1)}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Поскольку $\xi_0 \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, $(\nabla'\xi_0 \cdot \nabla' u_0^1 - u^1_{0x_n})|_{\Gamma_0} \in \widetilde{W}_p^{1-3/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, возможность построения функции $\sum$ с такими свойствами вытекает из леммы 1 работы [6].

Выполним преобразование координат $y = Y(x,t)$ так, чтобы области Ω_t^1, Ω_t^2 перешли в области $\widehat{\Omega}_t^1$, $\widehat{\Omega}_t^2$, разделяемые гиперповерхностью $\widehat{\Gamma}_t$, которая в пространстве новых переменных y определяется уравнением $y_n = \sum(y', t)$. Зададим обратное преобразование $x = Y^{-1}(y,t)$ формулой

$$x' = y', \quad x_n = y_n + \Phi(y', y_n, t), \tag{4.3}$$

предполагая, что неизвестная функция

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^1, & y \in \widehat{\Omega}_t^1 \\ \Phi^2, & y \in \widehat{\Omega}_t^2 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \Phi^1\big|_{y\in\widehat{\Gamma}_t} = \Phi^2\big|_{y\in\widehat{\Gamma}_t}, \quad \Phi^i|_{y\in S_i} = 0, \quad i = 1, 2, \\ \Phi|_{t=0} = 0, \quad \Phi(y', \Sigma(y', t), t) = \xi(y', t) - \Sigma(y', t). \end{gathered} \tag{4.4}$$

При сделанных выше предположениях относительно положения поверхностей Γ_0, S_1, S_2, не ограничивая общности, можем считать, что для достаточно малых значений t поверхность $\widehat{\Gamma}_t$ не выходит за пределы полосы $-2\nu \le y_n \le 2\nu$, а поверхности S_1 и S_2 не пересекают полосу $-6\nu \le y_n \le 6\nu$.

Вследствие (4.1), (4.4) имеем

$$\begin{gathered} \Phi(y', \Sigma(y', 0), 0) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(y', \Sigma(y', t), t)|_{t=0} = 0. \end{gathered}$$

Обозначим

$$\widehat{u}(y, t) = u(Y^{-1}(y, t), t) = \begin{cases} u^1(Y^{-1}(y, t), t), & y \in \widehat{\Omega}_t^1 \\ u^2(Y^{-1}(y, t), t), & y \in \widehat{\Omega}_t^2 \end{cases}$$

и воспользуемся следующими соотношениями [6]

$$\begin{gathered} \nabla' u = \nabla' \widehat{u} - \frac{\widehat{u}_{y_n}}{1 + \Phi_{y_n}} \nabla' \Phi, \\ u_{x_n} = \frac{1}{1 + \Phi_{y_n}} \widehat{u}_{y_n}, \\ u_t = \widehat{u}_t - \frac{\Phi_t}{1 + \Phi_{y_n}} \widehat{u}_{y_n}, \\ \nabla' \xi = (\nabla' \Phi + (1 + \Phi_{y_n}) \nabla' \Sigma)\big|_{y\in\widehat{\Gamma}_t}, \\ \xi_t = (\Phi_t + (1 + \Phi_{y_n}) \Sigma_t)\big|_{y\in\widehat{\Gamma}_t}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

В пространстве новых переменных y уравнения (1.1) принимают вид

$$L_{\Phi^i} \widehat{u}^i - \frac{\widehat{u}^i_{y_n}}{1 + \Phi^i_{y_n}} L_{\Phi^i} \Phi^i = 0, \quad y \in \widehat{\Omega}_t^i, \quad t > 0, \tag{4.6}$$

где

$$L_{\Phi^i}\widehat{u}^i = \widehat{u}^i_t - \alpha_i \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{u}^i_{y_j y_j} + \alpha_i \vec{a}(\nabla\Phi^i)\cdot\nabla\widehat{u}^i_{y_n},$$

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T,$$

$$a_j(\nabla\Phi^i) = \frac{2\Phi^i_{y_j}}{1+\Phi_{y_n}}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$a_n(\nabla\Phi^i) = -\frac{1+|\nabla'\Phi^i|^2}{(1+\Phi^i_{y_n})^2}, \quad i = 1, 2.$$

Начальные условия (1.2) и краевые условия (1.6) на неподвижных частях границы сохраняют свой вид:

$$\widehat{u}^i|_{t=0} = u^i_0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \widehat{u}^i}{\partial n}|_{x\in S_i} = 0. \tag{4.8}$$

Краевые условия на свободной поверхности Γ_t переходят в следующие краевые условия на известной движущейся поверхности $\widehat{\Gamma}_t$:

$$\widehat{u}^1|_{\widehat{\Gamma}_t} = \widehat{u}^2|_{\widehat{\Gamma}_t}, \tag{4.9}$$

$$\mu\Phi_t + \mu\Phi^1_{y_n}\Sigma_t + B_{\Phi^1}\widehat{u}^1 = -\mu\Sigma_t, \quad x \in \widehat{\Gamma}_t, \tag{4.10}$$

$$B_{\Phi^1}\widehat{u}^1 = B_{\Phi^2}\widehat{u}^2, \quad x \in \widehat{\Gamma}_t, \tag{4.11}$$

где

$$\begin{aligned} B_{\Phi^i}\widehat{u}^i = \alpha_i\Big(\frac{1+|\nabla'\Phi^i|^2}{1+\Phi^i_{y_n}} + \nabla'\Sigma\cdot\nabla'\Phi^i\Big)\widehat{u}^i_{y_n} \\ -\alpha_i(\nabla'\Phi^i + (1+\Phi^i_{y_n})\nabla'\Sigma)\cdot\nabla'\widehat{u}^i. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Сведем задачу (4.4), (4.6)–(4.11) к задаче с нулевыми начальными условиями, для чего рассмотрим вспомогательную задачу сопряжения:

$$w^i_t - \alpha_i\Delta w^i = 0, \quad y \in \widehat{\Omega}^i_t,$$

$$w^1|_{\widehat{\Gamma}_t} = w^2|_{\widehat{\Gamma}_t},$$

$$\alpha_1\frac{\partial w^1}{\partial n}|_{\widehat{\Gamma}_t} = \alpha_2\frac{\partial w^2}{\partial n}|_{\widehat{\Gamma}_t}, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial w^i}{\partial n}|_{S_i} = 0,$$

$$w^i|_{t=0} = u_0^i, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи (4.6)-(4.11) будем искать в виде $\widehat{u}^i = w^i + v^i$, где w^i – решение задачи сопряжения (4.13).

Предположим также, что неизвестные функции Φ^1, Φ^2 удовлетворяют уравнениям $L_{\Phi^i}\Phi^i = 0$, $x \in \widehat{\Omega}_t^i$. Это возможно, так как выше мы предполагали только что Φ^i удовлетворяют начальным и краевым условиям (4.4). Мы придем к следующей системе уравнений для неизвестных функций Φ^i, v^i, $i = 1, 2$:

$$\begin{gathered}
L_{\Phi^i} v^i = -L_{\Phi^i} w^i, \quad y \in \widehat{\Omega}_t^i, \quad t > 0, \\
L_{\Phi^i}\Phi^i = 0, \quad y \in \widehat{\Omega}_t^i, \quad t > 0, \\
v^i|_{t=0} = 0, \quad \Phi^i|_{t=0} = 0, \quad y \in \Omega_0^i, \\
v^1|_{y\in\widehat{\Gamma}_t} = v^2|_{y\in\widehat{\Gamma}_t}, \quad \Phi^1|_{y\in\widehat{\Gamma}_t} = \Phi^2|_{y\in\widehat{\Gamma}_t}, \\
\Phi^i|_{y\in S_i} = 0, \quad \frac{\partial v^i}{\partial n}|_{y\in S_i} = 0, \\
\mu\Phi_t + \mu\Phi^1_{y_n}\Sigma_t + B_{\Phi^1}v^1 = -\mu\Sigma_t - B_{\Phi^1}w^1, \quad y \in \widehat{\Gamma}_t, \\
B_{\Phi^1}v^1 - B_{\Phi^2}v^2 = B_{\Phi^2}w^2 - B_{\Phi^1}w^1, \quad y \in \widehat{\Gamma}_t.
\end{gathered} \tag{4.14}$$

Теорема 2. *Пусть* $\xi_0 \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, $u_0^i \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0^i)$, *где* $\partial\Omega_0^i = S_i \cup \Gamma_0$, $\Gamma_0 : y_n = \xi_0(y')$, *выполняются условия согласования* $\alpha_1 \frac{\partial u_0^1}{\partial n}|_{\Gamma_0} = \alpha_2 \frac{\partial u_0^2}{\partial n}|_{\Gamma_0}$, $u_0^1|_{x\in\Gamma_0} = u_0^2|_{x\in\Gamma_0}$, $\frac{\partial u_0^i}{\partial n}|_{x\in S_i} = 0$ *и справедливы неравенства* (3.1), (3.2), *тогда существует* $T > 0$ *такое, что при* $t \in [0, T)$ *задача* (4.13) *имеет единственное решение* $w^i \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\widehat{Q}_T^i)$, $\widehat{Q}_T^i = \{(t, y)| t \in [0, T), \quad y \in \widehat{\Omega}_t^i\}$, *для этого решения верна оценка*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1,2} |||w^i|||^{(2)}_{p,\widehat{Q}_T^i} \\
&\le C\Big(\sum_{i=1,2} \|u_0^i\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})}\Big)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

и выполняются неравенства

$$
\begin{gathered}
w^2_{y_n} - w^1_{y_n} \geq \delta_1 > 0, \\
\max_{y \in \widehat{\Gamma}_t, t \in [0,T]} |\nabla(\alpha_1 w^1 - \alpha_2 w^2)| \leq \varepsilon_1 \delta_1,
\end{gathered}
\tag{4.16}
$$

где ε_1 *– достаточно малое положительное число.*

Теорема 3. *Предположим, что функции* $w^i \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\widehat{Q}^i_T)$ *и имеют место оценки* (4.16), *тогда, при* $t \in [0, t^*)$ *с некоторым* $0 < t^* < T$, *задача* (4.14) *имеет единственное решение* $v^i \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}^{2,1}_p(\widehat{Q}^i_{t^*})$, $\Phi^i \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}^{2,1}_p(\widehat{Q}^i_{t^*})$ *и*

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1,2} \big(|||v^i|||^{(2)}_{p,\widehat{Q}^i_{t^*}} + |||\Phi^i|||^{(2)}_{p,\widehat{Q}^i_{t^*}} \big) \\
\leq C \big(\sum_{i=1,2} |||w^i|||^{(2)}_{p,\widehat{Q}^i_{t^*}} + \|\Sigma\|^{(2-1/p)}_p + \|\Sigma_t\|^{(1-1/p)}_p \big).
\end{gathered}
\tag{4.17}
$$

5. Линейная задача

Рассмотрим следующую линейную задачу в $\widehat{\Omega}^1_t \cup \widehat{\Omega}^2_t = \Omega_t$

$$
\begin{gathered}
L_{0i} v^i = f_i, \quad L_{0i}\Phi^i = g_i, \quad y \in \widehat{\Omega}^i_t, \\
v^i|_{t=0} = 0, \quad \Phi^i|_{t=0} = 0, \quad y \in \Omega^i_0, \\
\frac{\partial v^i}{\partial n}|_{S_i} = 0, \quad \Phi^i|_{S_i} = 0, \\
v^1|_{\widehat{\Gamma}_t} = v^2|_{\widehat{\Gamma}_t}, \quad \Phi^1|_{\widehat{\Gamma}_t} = \Phi^2|_{\widehat{\Gamma}_t}, \\
\mu \Phi_t + \alpha_1 \sqrt{1 + |\nabla' \Sigma|^2} \frac{\partial v^1}{\partial n} + b_{1n} \sqrt{1 + |\nabla' \Sigma|^2} \frac{\partial \Phi^1}{\partial n} \\
+ \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} \sqrt{1 + \Sigma^2_{yj}} \frac{\partial \Phi^1}{\partial l_j}|_{\widehat{\Gamma}_t} = \varphi, \\
\sqrt{1 + |\nabla' \Sigma|^2} (\alpha_1 \frac{\partial v^1}{\partial n} - \alpha_2 \frac{\partial v^2}{\partial n} + b_{1n} \frac{\partial \Phi^1}{\partial n} - b_{2n} \frac{\partial \Phi^2}{\partial n}) \\
+ \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{1 + \Sigma^2_{y_j}} (b_{1j} \frac{\partial \Phi^1}{\partial l_j} - b_{2j} \frac{\partial \Phi^2}{\partial l_j})|_{\widehat{\Gamma}_t} = \psi,
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

где через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначена производная в направлении вектора

$$\vec{n}\left(\frac{-\Sigma_{y_1}}{\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}},\quad \dots,\quad \frac{-\Sigma_{y_{n-1}}}{\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}}\right),$$

через $\frac{\partial}{\partial l_j}$ обозначены производные в направлении векторов $\vec{l_j}$ с координатами

$$l_{jk}=\frac{\delta_k^j}{\sqrt{1+\Sigma_{y_j}^2}},\quad k=1,\dots,n-1,\quad l_{jn}=\frac{\Sigma_{y_j}}{\sqrt{1+\Sigma_{y_j}^2}},$$

лежащих в касательной плоскости.

Теорема 4. *Предположим, что коэффициенты*

$$b_{1j},\quad b_{2j}\in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1}), p>n+2 \quad \text{и при}\quad t\in[0,T)$$

имеют место неравенства

$$\alpha_1>0,\quad \alpha_2>0,\quad \alpha_2 b_{1n}-\alpha_1 b_{2n}\ge\delta_2>0, \tag{5.2}$$

$\|\vec{b}'_2-\vec{b}'_1\|\le\varepsilon_2\delta_2$ *с некоторым достаточно малым положительным* ε_2. *При любых* $f_i\in\widetilde{L}_p(\widehat{Q}_T^i)$, $g_i\in\widetilde{L}_p(\widehat{Q}_T^i)$, $\varphi\in\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$, $\psi\in\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ *задача* (5.1) *имеет единственное решение* $v^i\in\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(\widehat{Q}_T^i)$, $\Phi^i\in\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(\widehat{Q}_T^i)$, *для которого верна оценка*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,2}\big(|||v^i|||_{p,\widehat{Q}_T^i}^{(2)}+|||\Phi^i|||_{p,\widehat{Q}_T^i}^{(2)}\big)&\\ \le c\Big(\sum_{i=1,2}(\|f_i\|_{\widetilde{L}_p(\widehat{Q}_T^i)}+\|g_i\|_{\widetilde{L}_p(\widehat{Q}_T^i)})+\|\varphi\|_p^{(1-1/p)}+\|\psi\|_p^{(1-1/p)}&\\ +\|\Sigma\|_{p,\mathbb{R}_T^{n-2}}^{(2-1/p)}+\|\Sigma_t\|_{p,\mathbb{R}_T^{n-1}}^{(1-1/p)}\Big).&\end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство. Тот факт, что движущаяся поверхность $\widehat{\Gamma}_t$ задается явным уравнением, дает возможность выполнить преобразование координат, переводящее ее в плоскость. Для этого построим периодическую функцию $\sigma\in\widetilde{W}_p^{2,1}(\mathbb{R}_T^n)$ со следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\sigma(z',0,t)=\Sigma(z',t),\quad \sigma_t(z',0,t)=\Sigma_t(z',t),\\ \|\sigma\|_{p,\mathbb{R}_T^n}^{(2)}\le c(\|\Sigma\|_{p,\mathbb{R}_T^{n-1}}^{(2-1/p)}+\|\Sigma_t\|_{p,\mathbb{R}_T^{n-1}}^{(1-1/p)}).\end{gathered} \tag{5.4}$$

Возьмем, например,

$$\sigma(z', z_n, t) = \chi(z_n) \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x')\Sigma(z' + x'\lambda z_n, t)dx' = \begin{cases} \sigma_1, & z_n > 0 \\ \sigma_2, & z_n < 0, \end{cases}$$

где ядро $K \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K(z')dz' = 1$, λ – малое по абсолютной величине число, срезающая функция

$$\chi(z_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \chi(z_n) = \begin{cases} 1, & |z_n| < \frac{\nu}{2} \\ 0, & |z_n| > \nu. \end{cases}$$

Поскольку мы предполагали выше, что $\Sigma \in W_p^{2-1/p, 1-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$, $|\Sigma| \leq 2\nu$, $p > n+2$, можем потребовать дополнительно, чтобы $|\sigma_{z_n}| \leq \frac{1}{2}$, $|\sigma| \leq 4\nu$.

Сделаем преобразование координат $z = Z(y,t)$, обратное к которому задается формулами

$$y' = z', \quad y_n = z_n + \sigma(z', z_n, t). \tag{5.5}$$

Преобразование Z переводит движущуюся поверхность $\widehat{\Gamma}_t$ в плоскость $z_n = 0$.

Так как $|\sigma| < 4\nu$, при $|y_n| > 5\nu$, имеем $y_n = z_n$, следовательно, поверхности S_1 и S_2 переходят сами в себя.

Воспользовавшись формулами $\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\sigma_{z_i}}{1+\sigma_{z_n}}\frac{\partial}{\partial z_n}$, $\frac{\partial}{\partial y_n} = \frac{1}{1+\sigma_{z_n}}\frac{\partial}{\partial z_n}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sigma_t}{1+\sigma_{z_n}}\frac{\partial}{\partial z_n}$, перейдем к задаче в фиксированной области $D = D_1 \cup D_2$, где $\partial D_1 = P_0 \cup S_1$, $\partial D_2 = P_0 \cup S_2$, через P_0 обозначена плоскость $z_n = 0$.

$$\mathcal{L}_i \widetilde{v}^i = L_{\sigma^i} \widetilde{v}^i - \frac{\widetilde{v}^i_{z_n}}{1+\sigma^i_{z_n}} L_{\sigma^i}\sigma^i = \tilde{f}_i, \quad z \in D_i, \quad t > 0,$$

$$\mathcal{L}_i \widetilde{\Phi}^i = \tilde{g}_i, \quad z \in D_i, \quad t > 0,$$

$$\widetilde{v}^i|_{t=0} = 0, \quad \widetilde{\Phi}^i|_{t=0} = 0,$$

$$\widetilde{v}^1|_{z_n=0} = \widetilde{v}^2|_{z_n=0}, \quad \widetilde{\Phi}^1|_{z_n=0} = \widetilde{\Phi}^2|_{z_n=0},$$

$$K_1[\widetilde{v}^1, \widetilde{\Phi}^1] = \mu\widetilde{\Phi}^1_t + \frac{\alpha_1}{1+\sigma_{z_n}}(1 + |\nabla'\Sigma|^2)\widetilde{v}^1_{z_n}$$

$$-\alpha_1 \nabla'\Sigma \cdot \nabla'\widetilde{v}^1 + b_{1n}\nabla'\Sigma \cdot \nabla'\widetilde{\Phi}^1 + \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j}\widetilde{\Phi}^1_{zj} \tag{5.6}$$

$$+\big(-\frac{\sigma_t}{1+\sigma_{z_n}}+b_{1n}\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}(1+|\nabla'\Sigma|^2)\big)\widetilde{\Phi}^1_{z_n}=\varphi, \quad z_n=0,$$

$$K_2[\widetilde{v}^1,\widetilde{v}^2,\widetilde{\Phi}^1,\widetilde{\Phi}^2]=\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}(1+|\nabla'\Sigma|^2)(\alpha_1\widetilde{v}^1_{z_n}-\alpha_2\widetilde{v}^2_{z_n})$$

$$-\alpha_1\nabla'\Sigma\cdot\nabla'\widetilde{v}^1+\alpha_2\nabla'\Sigma\cdot\nabla'\widetilde{v}^2+\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}(1+|\nabla'\Sigma|^2)(b_{1n}\widetilde{\Phi}^1_{z_n}-b_{2n}\widetilde{\Phi}^2_{z_n})$$

$$-b_{1n}\nabla'\Sigma\cdot\nabla'\widetilde{\Phi}^1+b_{2n}\nabla'\Sigma\cdot\nabla'\widetilde{\Phi}^2+\sum_{j=1}^{n-1}(b_{1j}\widetilde{\Phi}^1_{z_j}-b_{2j}\widetilde{\Phi}^2_{z_j})=\psi, \quad z_n=0,$$

$$\frac{\partial\widetilde{v}^i}{\partial n}|_{S_i}=0, \quad \widetilde{\Phi}^i|_{S_i}=0,$$

здесь $\widetilde{v}(z,t)=v(Z^{-1}(z,t),t)$.

Якобиан преобразования Z положителен; поскольку $\sigma\in\widetilde{W}^{2,1}_p(\mathbb{R}^n_T)$, $p>n+2$, согласно теореме вложения [8] производные первого порядка $\sigma_{z_j}, j=1,\dots,n$ удовлетворяют условию Гельдера и при $|\sigma_{z_n}|<\frac{1}{2}$ функция $\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}$ непрерывна. Следовательно, коэффициенты при старших производных в уравнениях задачи (5.6) непрерывны, а коэффициенты при младших членах суммируемы со степенью p.

Так как $\sigma(z',0,t)=\Sigma(z',t)$, производная $\sigma_t|_{z_n=0}$ обладает дополнительной гладкостью, а именно, так же как и $\sigma_{z_n}|_{z_n=0}$ является элементом пространства $W_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$. Следовательно, если выполнены условия теоремы 4, коэффициенты в условиях сопряжения задачи (5.6) принадлежат пространству $W_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$.

Докажем локальную по времени разрешимость задачи (5.6) при помощи построения регуляризатора [8]. Запишем задачу (5.6) в форме

$$AV=H, \tag{5.7}$$

где

$$V=[\widetilde{v}^1,\widetilde{v}^2,\widetilde{\Phi}^1,\widetilde{\Phi}^2]^T,$$

$$AV=\big[\mathcal{L}^1\widetilde{v}^1,\ \mathcal{L}^2\widetilde{v}^2,\ \mathcal{L}^1\widetilde{\Phi}^1,\ \mathcal{L}^2\widetilde{\Phi}^2,$$

$$\frac{\partial\widetilde{v}^1}{\partial n}|_{S_1},\ \frac{\partial\widetilde{v}^2}{\partial n}|_{S_2},\ \widetilde{\Phi}^1|_{S_1},\ \widetilde{\Phi}^2|_{S_2},\ K_1[\widetilde{v}^1,\widetilde{\Phi}^1]|_{P_0},\ K_2[\widetilde{v}^1,\widetilde{v}^2,\widetilde{\Phi}^1,\widetilde{\Phi}^2]|_{P_0}\big]^T,$$

$$H=[\tilde{f}_1,\ \tilde{f}_2,\ \tilde{g}_1,\ \tilde{g}_2,0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \varphi,\ \psi]^T.$$

Пусть λ – малый параметр. Выберем в $\Omega_0 = D_1 \cup D_2$ системы подобластей ω^k, Ω^k, удовлетворяющие следующим свойствам, которые обычно требуются при построении регуляризатора:

1) $\omega^k \subset \Omega^k \subset \Omega_0, \quad \bigcup\limits_k \omega^k = \bigcup\limits_k \Omega^k = \Omega_0$;

2) для любой точки $x \in \Omega_0$ можно указать такое ω^k, что $x \in \omega^k$ и $\operatorname{dist}(x, \Omega_0 \setminus \omega^k) \geq \beta\lambda, \quad \beta > 0$;

3) существует число $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\bigcap\limits_{j=1}^{N_0+1} \Omega^{k_j} = \varnothing$ при любых $k_1, k_2, \ldots, k_{N_0+1}$, $k_i \neq k_j$ для $i \neq j$.

Ясно, что в силу периодичности области Ω_0, системы подобластей ω^k, Ω^k можно также выбрать периодическими. Так же, как в [9], объединяя те области, которые получаются одна из другой перемещением на период, придем к конечной системе семейств подобластей $\widetilde{\omega}^{(k)}$, $\widetilde{\Omega}^{(k)}$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество индексов k, при которых области $\widetilde{\omega}^{(k)}$ имеют общие точки с плоскостью $z_n = 0$. Через $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ обозначим множества индексов тех подобластей $\widetilde{\omega}^{(k)}$, которые примыкают к S_1 и S_2 соответственно. Через $\mathfrak{M}_i$ обозначим множество индексов внутренних подобластей, лежащих в D_i.

Построим системы периодических срезающих функций $\xi^{(k)}(z)$ и $\eta^{(k)}(z)$, $k \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2 \cup \mathfrak{N}$ со следующими свойствами [8]:

$$\xi^{(k)}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \widetilde{\omega}^{(k)} \\ 0, & z \in \Omega_0 \setminus \widetilde{\Omega}^{(k)}, \end{cases}$$

$$0 \leq \xi^{(k)} \leq 1, \quad |D_z^\alpha \xi^{(k)}(z)| \leq \frac{C}{|\lambda|^\alpha}.$$

Возьмем $\eta^{(k)}(z) = \frac{\xi^{(k)}(z)}{\sum\limits_k (\xi^k(z))^2}$, тогда, очевидно, $\eta^{(k)}(z) = 0$ при $z \in \Omega_0 \setminus \widetilde{\Omega}^{(k)}$, $\sum\limits_k \eta^{(k)}(z)\xi^{(k)}(z) = 1$ для $\forall z \in \Omega_0$, и производные функций $\eta^{(k)}(z)$ удовлетворяют такой же оценке, что и производные функций $\xi^{(k)}(z)$.

Выберем область Ω^k из периодической системы подобластей $\widetilde{\Omega}^{(k)}$, где $k \in \mathfrak{M}^i$, $i = 1, 2$. Фиксируем точку $z^k \in \omega^k$, "заморозим" коэффициенты в точке $(z^k, 0)$ и возьмем главную часть оператора A. Известные функции домножим на срезку $\xi^{(k)}$, затем продолжим нулем в $\mathbb{R}^n$ и придем к задаче Коши:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_{0i}\widetilde{v}^i = \widetilde{f}_i\xi^{(k)} = f_i^{(k)}, \quad \mathcal{L}_{0i}\widetilde{\Phi}^i = \widetilde{g}_i\xi^{(k)} = g_i^{(k)}, \\ \widetilde{v}^i|_{t=0} = 0, \quad \widetilde{\Phi}^i|_{t=0} = 0, \end{gathered} \tag{5.8}$$

однозначная разрешимость которой в Соболевских пространствах доказана, например, в [8]. Домножим решение задачи (5.8) на функцию $\eta^{(k)}$ и периодически распространим на все $\widetilde{\Omega}^{(k)}$. Просуммировав полученные выражения по $k \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, имеем

$$\sum_{k \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2} \prod \eta^{(k)} \mathcal{R}^{(k)}(\xi^{(k)}\mathfrak{h}), \tag{5.9}$$

здесь $\mathfrak{h} = [f_1, f_2, g_1, g_2]^T$, через $\mathcal{R}^{(k)}$ обозначен оператор, который сопоставляет заданному вектору решение задачи Коши (5.8), $\prod$ – оператор периодического продолжения.

Выберем область Ω^k из периодической системы подобластей $\widetilde{\Omega}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{N}^i$. Домножим известные функции в задаче (5.6) на $\xi^{(k)}$ и продолжим нулем на все пространство. Пусть $z^k \in \Omega^k \cap S_i$ такая, что в местной системе координат с центром в точке z^k часть поверхности $S_i \cap \Omega^k$ задается явным уравнением. Заморозим коэффициенты в задаче (5.6) в точке $(z^k, 0)$, возьмем главную часть оператора A и выполним преобразование координат $\mathcal{P}^{(k)}$, распрямляющее границу. Придем к задаче Дирихле в полупространстве для параболического уравнения относительно неизвестной функции $\mathcal{P}^{(k)}\widetilde{\Phi}^i$ и задаче Неймана в полупространстве для параболического уравнения относительно неизвестной функции $\mathcal{P}^{(k)}\widetilde{v}^i$.

Однозначная разрешимость этих задач в Соболевских пространствах хорошо известна [8], [14]. К решению полупространственной задачи применим обратное преобразование координат $(\mathcal{P}^{(k)})^{-1}$, затем домножим на $\eta^{(k)}$ и периодически распространим на все области из множества $\widetilde{\Omega}^{(k)}$. Просуммировав по всем $k \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$, получим

$$\sum_{k \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2} \prod \eta^{(k)} (\mathcal{P}^{(k)})^{-1} \mathcal{R}^{(k)}(\mathcal{P}^{(k)}\xi^{(k)}\mathfrak{h}), \quad \mathfrak{h} = [f_1, f_2, g_1, g_2]^T, \tag{5.10}$$

здесь через $\mathcal{R}^{(k)}$ обозначен оператор, который сопоставляет заданному вектору решение полупространственных задач Дирихле и Неймана.

Выберем область Ω^k из периодической системы подобластей $\widetilde{\Omega}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{N}$, фиксируем точку $z^k \in \Omega^k \cap P_0$. Заморозим коэффициенты в задаче (5.6) в точке $(z_k, 0)$, возьмем главную часть оператора A, известные функции домножим на срезку $\xi^{(k)}$ и продолжим нулем на все пространство, придем к следующей задаче сопряжения:

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{0i}|_{(z^k,0)}\widetilde{v}^i = \widetilde{f}_i\xi^{(k)} = f_i^{(k)}, \quad \mathcal{L}_{0i}|_{(z^k,0)}\widetilde{\Phi}^i = g_i^{(k)}, \\
\text{при} \quad i=1 \quad z \in \mathbb{R}^n_+ = \{z \in \mathbb{R}^n | z_n > 0\}, \quad t > 0, \\
\text{при} \quad i=2 \quad z \in \mathbb{R}^n_- = \{z \in \mathbb{R}^n | z_n < 0\}, \quad t > 0, \\
\widetilde{v}^i|_{t=0} = 0, \quad \widetilde{\Phi}^i|_{t=0} = 0, \\
\widetilde{v}^1|_{z_n=0} = \widetilde{v}^2|_{z_n=0}, \quad \widetilde{\Phi}^1|_{z_n=0} = \widetilde{\Phi}^2|_{z_n=0}, \\
K_1|_{(z^k,0)}[\widetilde{v}^1, \widetilde{\Phi}^1]|_{z_n=0} = \varphi\xi^{(k)} = \varphi^{(k)}, \\
K_2|_{(z^k,0)}[\widetilde{v}^1, \widetilde{v}^2, \widetilde{\Phi}^1, \widetilde{\Phi}^2]|_{z_n=0} = \psi\xi^{(k)} = \psi^{(k)}.
\end{gathered} \tag{5.11}$$

Модельная задача сопряжения типа (5.11) рассмотрена в [10], где доказана ее однозначная разрешимость в Соболевских пространствах и получены L_p оценки решения. Из явных формул для K_1, K_2 в задаче (5.6) и условий (5.2) Теоремы 4 следует, что коэффициенты в условиях сопряжения задачи (5.11) удовлетворяют условиям Теоремы 1 работы [10], достаточным для однозначной разрешимости этой модельной задачи.

Решение задачи (5.11) домножим на $\eta^{(k)}$ и периодически распространим на все области $\widetilde{\Omega}^{(k)}$. Выполним такую процедуру при всех $k \in \mathfrak{N}$ и сложим полученные выражения

$$\sum_{k \in \mathfrak{N}} \prod \eta^{(k)} \mathcal{R}^{(k)}(\xi^{(k)}\mathfrak{h}), \quad \mathfrak{h} = [f_1, f_2, g_1, g_2, \varphi, \psi]^T, \tag{5.12}$$

здесь через $\mathcal{R}^{(k)}$ обозначен оператор, который сопоставляет заданному вектору решение задачи (5.11).

Отметим, что вследствие периодичности всех заданных функций и единственности решения модельных задач полученные периодические функции не зависят от выбора области Ω^k из периодического множества областей $\widetilde{\Omega}^{(k)}$.

Определим регуляризатор $\mathcal{R}H$ как сумму (5.9), (5.10) и (5.12). Для достаточно малого τ

$$\|A\mathcal{R} - I\| < 1 \quad \text{и} \quad \|\mathcal{R}A - I\| < 1. \tag{5.13}$$

Неравенства (5.13) доказываются так же, как в [8] для непериодического случая, если все оценки записать в нормах периодических пространств. Наличие в условии сопряжения производной по времени не усложняет оценок, поскольку это слагаемое присутствует и в модельной задаче. Следовательно, оператор $\mathcal{R}$ является регуляризатором и для достаточно малых τ оператор A имеет ограниченный обратный и задача (5.7) имеет единственное решение

$$\widetilde{v}^i \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(D_i \times [0,\tau]), \quad \widetilde{\Phi}^i \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(D_i \times [0,\tau]),$$

для которого верна оценка:

$$\sum_{i=1,2} \bigl(\|\widetilde{v}^i\|^{(2)}_{p,D_i\times[0,\tau]} + \|\widetilde{\Phi}^i\|^{(2)}_{p,D_i\times[0,\tau]}\bigr)$$
$$\leq c\Bigl(\sum_{i=1,2}(\|\widetilde{f}_i\|_{\widetilde{L}_p(D_i\times[0,\tau])}$$
$$+ \|\widetilde{g}_i\|_{\widetilde{L}_p(D_i\times[0,\tau])}) + \|\varphi\|_p^{(1-1/p)} + \|\psi\|_p^{(1-1/p)}\Bigr). \quad (5.14)$$

Сделаем преобразование координат $y = Z^{-1}(z,t)$ (5.5). Поскольку Якобиан преобразования (5.5) положителен и $\sigma \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\mathbb{R}^n_T)$, $p > n+2$, мы получим

$$v^i(y,t) = \widetilde{v}^i(Z(y,t),t) \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\widehat{Q}^i_\tau), \quad \Phi^i(y,t) \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\widehat{Q}^i_\tau).$$

Оценка (5.3) является следствием оценок (5.14), (5.4).

Полученное решение может быть стандартным способом продолжено на весь интервал $[0,T]$. Действительно, пусть $w^i \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\widehat{Q}^i_{[\tau,2\tau]})$ – решение задачи сопряжения (4.13) с начальными данными

$$w^i|_{t=\tau} = v^i|_{t=\tau},$$

продолжим Φ^i на $\widehat{Q}^i_{2\tau}$ с сохранением класса так, чтобы оставались справедливыми краевые условия и условие непрерывности на $\widehat{\Gamma}_t, t \in [0,2\tau)$

$$\widehat{\Phi}^1|_{\widehat{\Gamma}_t} = \widehat{\Phi}^2|_{\widehat{\Gamma}_t}, \quad \widehat{\Phi}^i|_{S_i} = 0.$$

При $t > \tau$ будем искать решение задачи (4.14) в виде

$$v^i = v^i_* + w^i, \quad \Phi^i = \widehat{\Phi}^i + \Phi^i_*,$$

для новых неизвестных функций v_*^i, Φ_*^i получим задачу (4.14) с нулевыми начальными данными при $t = \tau$. Применив описанную выше процедуру построения регуляризатора, докажем существование решения этой задачи на промежутке $[\tau, 2\tau)$.

Ввиду того, что неравенства (5.2) справедливы на всем промежутке $[0, T]$ и имеют место оценки (4.15), (4.16), (4.17), мы можем выбрать τ одно и то же для всех $t_0 \in [0, T)$.

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 4. При этом возникает модельная задача сопряжения, рассмотренная в [13] в гельдеровских пространствах функций. Ясно, что используя явное представление решения в изображениях Фурье–Лапласа [13] и теоремы о мультипликаторах, также, как это сделано, например, в [9, 10], можно доказать однозначную разрешимость модельной задачи сопряжения в Соболевских пространствах и получить L_p оценки решения.

6. Доказательство теоремы 3

Выделим линейную часть относительно функций v^i, Φ^i в задаче (4.14). Воспользуемся следующими очевидными соотношениями:

1) $\vec{a}(\nabla\Phi)\cdot\nabla u_{y_n} = -u_{y_n y_n} + 2\nabla\Phi\cdot\nabla u_{y_n} + \vec{a}'(\nabla\Phi)\cdot\nabla u_{y_n}$, где

$$a_j' = \frac{-2\Phi_{y_j}\Phi_{y_n}}{1+\Phi_{y_n}}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$
$$a_n' = \frac{-3\Phi_{y_n}^2 - 2\Phi_{y_n}^3 - |\nabla'\Phi|^2}{(1+\Phi_{y_n})^2};$$

2) поскольку поверхность $\widehat{\Gamma}_t$ задается уравнением $y_n = \Sigma(y', t)$, то та нормаль к этой поверхности, для которой $\cos(\vec{n}, \vec{e}_n) > 0$ имеет координаты

$$\left(\frac{-\Sigma_{y_1}}{\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}}, \ \dots, \ \frac{-\Sigma_{y_{n-1}}}{\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}}, \ \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}}\right)$$

и следовательно

$$u_{y_n} - \nabla'\Sigma\cdot\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial n}\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}.$$

Вектора $\vec{l_j}$ с координатами

$$l_{j_k} = \frac{\delta_k^j}{\sqrt{1+\Sigma_{y_j}^2}}, \quad k = 1,2,\dots,n-1, \quad l_{j_n} = \frac{\Sigma_{y_j}}{\sqrt{1+\Sigma_{y_j}^2}}$$

лежат в касательной плоскости,

$$u_{y_j} + \Sigma_{y_j} u_{y_n} = \frac{\partial u}{\partial l_j}\sqrt{1+\Sigma_{y_j}^2}.$$

Таким образом

$$B_\Phi u = \alpha\big(u_{y_n} - \nabla'\Sigma\cdot\nabla' u\big) + \alpha\Big(\frac{|\nabla'\Phi|^2}{1+\Phi_{y_n}} - \Phi_{y_n} - \nabla'\Sigma\cdot\nabla'\Phi\Big)u_{y_n}$$
$$-\alpha(\nabla'\Phi + \Phi_{y_n}\nabla'\Sigma)\cdot\nabla' u = \alpha\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}\frac{\partial u}{\partial n} + \mathcal{R}[u,\Phi],$$

$$B_\Phi w = \alpha(w_{y_n} - \nabla'\Sigma\cdot\nabla' w) - \alpha(\Phi_{y_n} + \nabla'\Sigma\cdot\nabla'\Phi)w_{y_n}$$
$$-\alpha(\nabla'\Phi + \Phi_{y_n}\nabla'\Sigma)\cdot\nabla' w + \alpha\frac{|\nabla'\Phi|^2}{1+\Phi_{y_n}}w_{y_n}$$
$$= \alpha\frac{\partial w}{\partial n}\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2} - \alpha\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}w_{y_n}\frac{\partial\Phi}{\partial n}$$
$$-\alpha\sum_{j=1}^{n-1} w_{y_j}\sqrt{1+\Sigma_{y_j}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial l_j} + \mathcal{P}[\Phi],$$

где через $\mathcal{R}[u,\Phi]$, $\mathcal{P}[\Phi]$ обозначены нелинейные слагаемые.

Учитывая, что функции w^1, w^2 являются решением задачи (4.13), запишем задачу (4.14) в виде

$$L_{0i}v^i + 2\nabla\Phi^i\cdot\nabla w^i_{y_n} + Q_1[v^i,\Phi^i] = 0, \quad y\in\widehat{\Omega}^i_t, \quad t>0,$$
$$L_{0i}\Phi^i + Q_2[\Phi^i] = 0, \quad y\in\widehat{\Omega}^i_t, \quad t>0,$$
$$v^i|_{t=0} = 0, \quad \Phi^i|_{t=0} = 0, \quad v^1|_{y\in\widehat{\Gamma}_t} = v^2|_{y\in\widehat{\Gamma}_t},$$
$$\Phi^1|_{y\in\widehat{\Gamma}_t} = \Phi^2|_{y\in\widehat{\Gamma}_t}, \quad \Phi^i|_{y\in S_i} = 0, \quad \frac{\partial v^i}{\partial n}|_{y\in S_i} = 0,$$
$$\mu\Phi^1_t + \mu\Phi^1_{y_n}\Sigma_t + \alpha_1\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}\frac{\partial v^1}{\partial n}$$

$$
\begin{gathered}
-\alpha_1\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}w^1_{y_n}\frac{\partial\Phi^1}{\partial n}-\alpha_1\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{1+\Sigma^2_{y_j}}w^1_{y_j}\frac{\partial\Phi^1}{\partial l_j}\\
=-\mu\Sigma_t-\alpha_1\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}\frac{\partial w^1}{\partial n}-\mathcal{R}[v^1,\Phi^1]-\mathcal{P}[\Phi^1],\\
\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}(\alpha_1\frac{\partial v^1}{\partial n}-\alpha_2\frac{\partial v^2}{\partial n}-\alpha_1 w^1_{y_n}\frac{\partial\Phi^1}{\partial n}+\alpha_2 w^2_{y_n}\frac{\partial\Phi^2}{\partial n})\\
-\alpha_1\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{1+\Sigma^2_{y_j}}w^1_{y_j}\frac{\partial\Phi^1}{\partial l_j}+\alpha_2\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{1+\Sigma^2_{y_j}}w^2_{y_j}\frac{\partial\Phi^2}{\partial l_j}\\
=\mathcal{R}[v^2,\Phi^2]-\mathcal{R}[v^1,\Phi^1]+\mathcal{P}[\Phi^2]-\mathcal{P}[\Phi^1].
\end{gathered}\tag{6.1}
$$

Обозначим

$$
\begin{gathered}
d_1=\alpha_1\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2},\quad d_2=\alpha_2\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2},\\
b_{1n}=-\alpha_1\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}w^1_{y_n},\quad b_{2n}=-\alpha_2\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}w^2_{y_n},\\
b_{ij}=-\alpha_i\sqrt{1+\Sigma^2_{y_j}}w^i_{y_j},\quad i=1,2;\quad j=1,2,\dots,n-1,
\end{gathered}
$$

тогда, очевидно, $d_1>0$, $d_2>0$,

$$
\begin{gathered}
d_2b_{1n}-d_1b_{2n}=\alpha_1\alpha_2\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}(w^2_{y_n}-w^1_{y_n}),\\
b_{2j}-b_{1j}=\sqrt{1+\Sigma^2_{y_j}}(\alpha_1 w^1_{y_j}-\alpha_2 w^2_{y_j}).
\end{gathered}\tag{6.2}
$$

Введем обозначения

$$
V=[\,v^1,\Phi^1,v^2,\Phi^2\,]^T\,,
$$

M – оператор линейной задачи (5.1),

$$
F=\left[0,0,0,0,0,0,0,0\ -\mu\Sigma_t-\alpha_1\sqrt{1+|\nabla'\Sigma|^2}\frac{\partial w^1}{\partial n}|_{\widehat{\Gamma}_t},0\right]^T,
$$

$$
\begin{gathered}
GV=\big[-Q_1[v^1,\Phi^1],-Q_2[\Phi^1],-Q_1[v^2,\Phi^2],-Q_2[\Phi^2],0,0,0,0\\
-\mathcal{R}[v^1,\Phi^1]-\mathcal{P}[\Phi^1],\ \mathcal{R}[v^2,\Phi^2]-\mathcal{R}[v^1,\Phi^1]+\mathcal{P}[\Phi^2]-\mathcal{P}[\Phi^1]\big]^T.
\end{gathered}
$$

и запишем задачу (6.1) в виде

$$
MV=GV+F \tag{6.3}
$$

Вследствие (6.2), (4.16) выполнены условия (5.2) разрешимости соответствующей (6.1) линейной задачи (5.1), следовательно, оператор M имеет ограниченный обратный оператор M^{-1}. Применим M^{-1} к уравнению (6.3), получим

$$V = M^{-1}GV + M^{-1}F = M^{-1}GV + V_0, \tag{6.4}$$

где через V_0 обозначено решение задачи (5.1) с $f_i = 0$, $g_i = 0$, $i = 1, 2$. Обозначив $U = V - V_0$, запишем (6.4) в следующей форме:

$$U = M^{-1}G(U + V_0) = \mathcal{A}U. \tag{6.5}$$

Пусть $W(\tau) = \widetilde{W}^{2,1}_{p,\widehat{Q}^1_\tau} \times \widetilde{W}^{2,1}_{p,\widehat{Q}^1_\tau} \times \widetilde{W}^{2,1}_{p,\widehat{Q}^2_\tau} \times \widetilde{W}^{2,1}_{p,\widehat{Q}^2_\tau}$ - пространство с нормой

$$\langle V \rangle = \sum_{i=1,2} (\|v^i\|^{(2)}_{p,\widehat{Q}^i_\tau} + \|\Phi^i\|^{(2)}_{p,\widehat{Q}^i_\tau}) + \|\Phi_t\|^{(1-1/p)}_{p,\widehat{\Gamma}_t}.$$

Так же, как это было сделано в [6], покажем, что для достаточно малых τ оператор $\mathcal{A}$ переводит замкнутый шар пространства $W(\tau)$ с центром в нуле и достаточно малого радиуса r в себя и является в этом шаре оператором сжатия. Примененная в [6] для оценки нелинейных слагаемых лемма о произведении имеет место и для областей, ограниченных движущейся поверхностью.

Лемма (О произведении).

Пусть $u,\ \psi \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}^{2,1}_p(\Omega_T)$, $p > n + 2$, *где* Ω_T *– периодическая область, лежащая между поверхностями* γ *и* γ_t, *где* γ_t *задается явным уравнением* $x_n = \Sigma(x', t)$, $\Sigma \in W_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$, $\Sigma_t \in W_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}^{n-1}_T)$. *При любом* $\tau \in (0, T)$ *имеет место следующая оценка:*

$$\|D^2\psi Du\|_{p,\Omega_\tau} \le c\tau^\varepsilon \|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau} \|u\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau}, \tag{6.6}$$

здесь $\varepsilon > 0$, $D^{(2)}\psi = D^r_t D^\alpha_z \psi(z, t)$, $2r + |\alpha| = 2$.

Доказательство.

Поскольку интерполяционное неравенство и оценка

$$\|u\|_{p,\Omega_\tau} \le c\tau \|u\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau}$$

доказаны в [11, 14] и для нецилиндрических областей, имеем

$$\|D^2\psi Du\|_{p,\Omega_\tau} \le \max_{\Omega_\tau}|Du|\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau}$$
$$\le (\delta^{1-\frac{(n+2)}{p}}\|u\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau} + \delta^{-1-\frac{(n+2)}{p}}\|u\|_{p,\Omega_\tau})\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau}$$
$$\le (\delta^{1-\frac{(n+2)}{p}} + c\tau\delta^{-1-\frac{(n+2)}{p}})\|u\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau}\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau}, \quad \delta > 0.$$

Выбирая $\delta = \tau^{1/2}$, получим (6.6), где $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \frac{n+2}{p}) > 0$ при $p > n+2$.

Нелинейные члены $Q_1[v,\Phi]$, $Q_2[\Phi]$, $\mathcal{R}[v,\Phi]$, $\mathcal{P}[\Phi]$ имеют такую же форму, как и нелинейные слагаемые в [6], а именно, являются произведениями неизвестных функций, их производных по пространственным переменным и функции $\frac{1}{1+\Phi_{y_n}}$ и линейны относительно производных второго порядка от неизвестных функций. Следовательно, так же, как в [6], с помощью леммы о произведении доказываются неравенства

$$\begin{aligned} \langle AU\rangle_{p,\tau} &\le c(\tau^{1/2} + r\tau^{\varepsilon})(r + \langle V_0\rangle_{p,\tau}), \\ \langle AU_1 - AU_2\rangle_{p,\tau} &\le c(\tau^{1/2} + r\tau^{\varepsilon})\langle U_1 - U_2\rangle_{p,\tau}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

При достаточно малых τ из (6.7) следует, что отображение $\mathcal{A}$ переводит замкнутый шар пространства $W(\tau)$ с центром в нуле и достаточно малого радиуса в себя и является в этом шаре оператором сжатия. По принципу сжимающих отображений, при $\tau \in (0, t^*)$, где t^* достаточно мало, уравнение (6.5) однозначно разрешимо в $W(\tau)$. Положим $V = U + V_0$, где U – решение задачи (6.5), V_0 – решение соответствующей линейной однородной задачи, получим решение задачи (6.3), для которого имеет место оценка (4.17).

7. Заключение

Теорема 1 следует из теорем 2 и 3. Действительно, положим $\widehat{u}^i = w^i + v^i$, где w^i – решение задачи (4.13), v^i – решение задачи (4.14). Определим функцию $\xi(y',t)$ равенством

$$\xi(y',t) = \Phi(y', \Sigma(y',t), t) + \Sigma(y',t).$$

Сделаем преобразование координат (4.3), получим функции $u^i = Y^{-1}(\widehat{u}^i), \quad i = 1,2$, которые являются решением задачи (1.1)-(1.6) в областях Ω_t^1, Ω_t^2, разделенных движущейся поверхностью Γ_t с уравнением $x_n = \xi(x', t), \quad t \in [0, t^*)$.

Так как Якобиан преобразования (4.3) положителен, $\Phi^i \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\widehat{Q}_{t^*}^i)$ и справедлива лемма о произведении, имеем $u^i \in \widetilde{W}_p^{2,1}(Q_{t^*}^i)$.

Из краевого условия (4.10) следует, что Φ_t имеет дополнительную гладкость на поверхности Γ_t, а именно,

$$\Phi_t|_{\widehat{\Gamma}_t} \in \widetilde{W}_p^{1-1/p, 1/2-1/2p}(\widehat{\Gamma}^{t^*}), \ \widehat{\Gamma}^{t^*} = \{(t,x) | t \in [0, t^*), \ x \in \widehat{\Gamma}_t\}$$

и подчиняется оценке

$$\|\Phi_t|_{\widehat{\Gamma}_t}\|_p^{(1-1/p)} \leq c\big(\|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{i=1,2} \|u_0^i\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})}\big), \quad (7.1)$$

которая следует из (4.15), (4.17).

Следовательно, и функция $\xi_t(x', t)$ является элементом пространства $\widetilde{W}_p^{1-1/p, 1/2-1/2p}(\mathbb{R}_{t^*}^{n-1})$.

Оценка (3.3) вытекает из (4.2), (4.15), (4.17), (7.1).

В заключение автор благодарит профессора В. А. Солонникова за полезные замечания.

Литература

1. Н. Н. Веригин, *Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости основания гидротехнических сооружений.* Отдел. техн. наук,, — Изв. АН СССР (1952), 674–687.
2. Е. В. Радкевич, *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей.* — Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики, АН СССР, СО, Институт математики, Новосибирск (1986), 85–111.
3. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка.* — Алгебра и анализ **12**, № 6 (2000), 98–139.
4. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О некоторых модельных задачах для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевом условии.* — Алгебра и анализ **6**, № 6 (1994), 30–50.
5. E. I. Hanzawa, *Classical solution of the Stefan problem.* — Tohoku Math. J. no. 33 (1981), 297–335.
6. В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *L_p теория для задачи Стефана.* — Зап.научн.семин.ПОМИ **243** (1997), 299–323.
7. V. A. Solonnikov, *Free boundary problems for second order parabolic equations.* — Progress in PDE, Pitman res. notes math. series **384** (1998), 116–126.

8. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука, 1967.
9. E. V. Frolova, *Solvability in Sobolev spaces of a problem for a second order parabolic equation with time derivative in the boundary condition.* — Portugaliae Matematica **56** no. 4 (1999), 419–441.
10. Е. В. Фролова, *Оценки в L_p для решения модельной задачи, соответствующей задаче Веригина.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **259** (1999), 280–295.
11. В. А. Солонников, *Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем.* — Труды МИАН **102** (1967), 137–160.
12. Г. И. Бижанова, *Решение в весовом пространстве Гельдера начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в условии сопряжения.* — Алгебра и анализ **6**, № 1 (1994), 64–94.
13. Г. И. Бижанова, *Решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в гельдеровском пространстве функций.* — Изв. АН Казах. ССР, Сер. физ.–мат. (1991), 21–27.
14. В. А. Солонников, *Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа.* — Труды МИАН **70** (1964), 133–212.

Frolova E. V. Solvability of Verigin problem in Sobolev spaces.

In the present paper, L_p estimates are obtained for the solution of a model problem arising in the linearization of the Verigin problem. The proof is based on the application of theorems on Fourier multipliers. The result obtained may be used for the proof of the solvability of the verigin problem in anisotropic Sobolev spaces.

С.-Петербургский Государственный
Электротехнический университет

Поступило 10 мая 2002 г.