Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 295, 2003 г.

Р. Г. Штеренберг

ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ПЛОСКОСТИ И КВАЗИ-КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

**Посвящается
академику О. А. Ладыженской
к ее юбилею**

§0. Введение

0.1. Обсуждается вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в двумерном односвязном периодическом волноводе, граница которого имеет достаточно сильные особенности. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$, и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область такая, что ни одна из полуплоскостей $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > r\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 < r\}$, $r \in \mathbb{R}$, не лежит в Π. Предполагается, что выполнено условие периодичности:

$$\mathbf{x} \in \Pi \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 \in \Pi.$$

Через $\mathcal{O}$ обозначим элементарную ячейку (см. п. 1.3) волновода Π. В $L_2(\Pi)$ рассматривается оператор Шредингера вида

$$(\phi(\mathbf{x}))^{-1}\left((\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x})) + \mathcal{V}(\mathbf{x})\right)(\phi(\mathbf{x}))^{-1}. \qquad (0.1)$$

Здесь $\mathbf{D} = -i\nabla$, $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ – (обобщенный) электрический потенциал, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – векторный (магнитный) потенциал, $g(\mathbf{x}) = \{g^{jl}(\mathbf{x})\}$ – положительная (2×2)-матрица (метрика); $\phi(\mathbf{x})$ – весовая функция, введение которой делает класс операторов (0.1) инвариантным относительно координатных замен. Все коэффициенты предполагаются вещественными и периодическими по x_1 с периодом $T = 1$. Граница волновода естественным образом разделяется на два отделенных друг от друга периодических замкнутых множества (см. ниже п. 1.3). Изучаются краевые задачи для оператора

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 02-01-00798.

(0.1) в волноводе П при условии Дирихле либо при естественном краевом условии на каждой из двух компонент границы. Эти задачи условно обозначаются DD, DN, ND, NN, хотя условие N не обязательно оказывается условием Неймана, но может быть условием третьего типа. Точное определение оператора (0.1) дается через квадратичную форму

$$\int_{\Pi} \left|(g(\mathbf{x}))^{1/2}(\mathbf{D}-\mathbf{A}(\mathbf{x}))(\phi(\mathbf{x}))^{-1}u(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x} + \ell[|\phi^{-1}u|^2]. \qquad (0.2)$$

Здесь ℓ – линейный периодический функционал, порождающий обобщенный электрический потенциал $\mathcal{V}$. Точное определение класса допустимых функционалов ℓ мы откладываем до п. 2.5. Сейчас отметим лишь, что можно рассматривать функционалы вида

$$\ell[F] := \int_{\Pi} V(\mathbf{x})F(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

при подходящих ограничениях на периодическую локально суммируемую функцию V. Область определения формы (0.2) существенно зависит от ℓ, ϕ, П и от типа краевых условий.

При помощи конформного (или квази-конформного) отображения вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) может быть сведен к исследованию оператора аналогичного вида, но уже в прямой полосе $S = \{\mathbf{x}:\ 0 < x_2 < 1\}$. Доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в полосе S сходно с решением аналогичного вопроса для оператора вида (0.1) во всем $\mathbb{R}^2$. Последняя задача была достаточно полно изучена в работах [2, 3, 9, 5, 11–13]. В соответствии с этим условия на коэффициенты, гарантирующие абсолютную непрерывность спектра оператора Шредингера в полосе S, в существенном те же, что и в случае всего $\mathbb{R}^2$. Поэтому задача состоит в выделении достаточно широких ограничений на геометрию волновода П, при которых отображение области П на полосу S не приводит к существенному изменению свойств коэффициентов.

0.2. Опишем теперь известные результаты о спектре оператора Шредингера в плоском периодическом волноводе с кривой границей или, что в значительной мере эквивалентно, при наличии переменной метрики для оператора в полосе. Впервые абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) была доказана в

[15], где был предложен метод периодизации оператора в полосе S. Этот метод позволяет рассматривать операторы, отвечающие условиям Дирихле или Неймана, как части в ортогональной сумме для оператора с периодическими краевыми условиями по x_2. В [15] предполагалось, что коэффициенты оператора и граница волновода Π обладают достаточной гладкостью. При этом рассматривался только случай "обычного" электрического потенциала $\mathcal{V} = V$. Техника работы [15] достаточно сложна и связана со статьей [9], где впервые исследовался оператор Шредингера с переменной метрикой в $\mathbb{R}^2$.

В дальнейшем, в работе [14] результат из [15] был значительно усилен. В [14] предполагалось, что граница волновода Π кусочно-гладкая класса $C^{1+\delta}$, $\delta > 0$, причем допускаются входящие (но не выходящие) пики с нулевыми углами. Также в [14] были включены в рассмотрение обобщенные потенциалы, сосредоточенные на периодических системах кривых (тем самым, помимо задач Дирихле и Неймана была включена и задача с третьим краевым условием). При этом рассмотрение обобщенных электрических потенциалов в значительной мере опиралось на работу [5], где подобные потенциалы изучались для оператора (0.1) в $\mathbb{R}^2$.

Параллельно с работой [14], близкие результаты были получены в статье [16], в которой доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) при несколько иных ограничениях на волновод Π. Ключевой в [16] является теорема 2.1 об абсолютной непрерывности спектра для оператора (0.1) в полосе S. В отличии от [14], в [16] при исследовании оператора Шредингера в полосе S использовались результаты работ [11–13] (более поздних, чем [5]). Вследствие этого, условия на коэффициенты оператора (0.1) в [16] значительно более свободные, нежели в [14], и во многом являются предельными. Дальнейшее сводилось к изучению возможности свести задачу в волноводе Π к задаче в полосе S. В [16] предполагалось, что существует взаимно-однозначное отображение $\Psi\colon \Pi \to S$, сохраняющее периодичность, такое, что

$$\Psi \in \mathrm{Lip}1(\overline{\Pi}), \quad \Psi^{-1} \in \mathrm{Lip}1(\overline{S}).$$

Тем самым, был рассмотрен случай волновода с липшицевой границей. Отметим, что геометрические условия на волновод Π из [14] и [16] пересекаются, но не поглощают друг друга.

0.3. В настоящей работе существенно расширяются геометрические условия на волновод Π, при которых вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) в Π удается свести все к той же теореме 2.1 из [16] для полосы. В результате расширяются условия на Π, как принятые в [14], так и в [16]. Условия на волновод, которые мы накладываем, являются естественными и, фактически, необходимыми. Поясним это на сравнительно простом случае. Пусть M_{NN} – оператор задачи Неймана, порожденный формой

$$m_{NN}[u,u] := \int_{\Pi} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\Pi). \tag{0.3}$$

Согласно общей теории Флоке, такой оператор может быть разложен в прямой интеграл, в слоях которого действуют операторы $M_{NN}(k)$, порожденные замкнутыми положительными формами

$$m_{NN}(k)[w,w] := \int_{\mathcal{O}} |(\mathbf{D} + k\mathbf{e}_1)w|^2 d\mathbf{x}, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{0.4}$$

в $L_2(\mathcal{O})$. Область определения формы (0.4) $\operatorname{Dom} m_{NN}(k) := \widetilde{H}^1(\mathcal{O})$ совпадает с множеством тех функций из $H^1(\mathcal{O})$, периодическое продолжение которых принадлежит H^1 в любой ограниченной части области Π. В стандартной теории Флоке предполагается, что спектр операторов $M_{NN}(k)$ дискретен. Тогда спектр оператора M_{NN} имеет зонную структуру, и абсолютная непрерывность спектра равносильна отсутствию вырожденных зон (подробнее см., например, [4]). Дискретность спектра оператора $M_{NN}(k)$ равносильна компактности вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O})$ в $L_2(\mathcal{O})$ (в этом случае автоматически[1] $\operatorname{mes}_2 \mathcal{O} < \infty$). При этом естественном предположении (см. ниже условие 1.5) мы доказываем абсолютную непрерывность спектра оператора M_{NN}.

Отметим, что условие 1.5 выполнено, в частности, если область Π лежит в полосе $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |x_2| < R\}$ для некоторого $R < \infty$ и удовлетворяет "условию внутреннего конуса". Допускаются также выходящие пики, образованные двумя монотонными C^1-гладкими кривыми. Другие широкие достаточные условия, при которых выполнено условие 1.5, можно найти, например, в [8].

[1]Автор благодарит Ю. Нетрусова за указание на это обстоятельство.

При рассмотрении оператора (0.1) на коэффициенты накладываются условия, аналогичные использованным в [16]. Основной результат работы сформулирован в теореме 2.5. Отметим, что при доказательстве теоремы 2.5 сведение к теореме 2.1 из [16] для полосы может быть основано как на конформном, так и на квази-конформном отображении Π на S. Мы используем более общий класс квази-конформных отображений, хотя могли бы обойтись только конформными. Подробнее об этом см. замечание 1.4.

При доказательстве (см. §3) нам удобно рассматривать все четыре задачи DD, DN, ND, NN параллельно. Условия ставятся на самую "требовательную" задачу NN. Независимое исследование задачи Дирихле, тем не менее, представляет самостоятельный интерес. Условия на волновод в этом случае могут быть дополнительно ослаблены (см. §4). Причина в том, что при условии $\mathrm{mes}_2\mathcal{O} < \infty$ соответствующий оператор в $L_2(\mathcal{O})$ всегда имеет дискретный спектр. Однако полностью использовать специфику задачи Дирихле, опираясь на результаты из [16] для полосы и из [13] для всей плоскости, не удается по причинам, имеющим, впрочем, формальный характер. Поэтому в общей ситуации задача Дирихле будет обсуждена в другой публикации. Здесь же мы ограничимся более простым (но показательным с точки зрения условий на волновод) случаем оператора $-\Delta$.

0.4. В §1 приводятся предварительные сведения относительно квази-конформных отображений и ставятся условия на волновод. В §2 приведена постановка задачи и сформулирован основной результат (теорема 2.5). Доказательство теоремы 2.5 изложено в §3. Наконец, заключительный §4 посвящен обсуждению задачи Дирихле.

0.5. Благодарности. Автор выражает глубокую признательность М. Ш. Бирману и Т. А. Суслиной за большое внимание к работе и многочисленные обсуждения.

§1. Предварительные сведения. Условия на волновод

1.1. Обозначения. Через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ обозначим стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla = \nabla_{\mathbf{x}} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\mathbf{D} = (D_1, D_2) = -i\nabla$. Далее, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $|\cdot|$ – стандартные скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^2$. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область, $\overline{\mathcal{D}} = \operatorname{clos}\mathcal{D}$. Классы Соболева порядка $s \in \mathbb{N}$ с показателем суммируемости p обозначаются через $W_p^s(\mathcal{D})$; при $p = 2$ – через $H^s(\mathcal{D})$. Положим $B_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |\mathbf{x}| < R\}$, $R > 0$. Через $C_0(\overline{\mathcal{D}})$ обозначается класс непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ функций $u(\mathbf{x})$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathcal{D}} \cap B_R$ при каком-либо $R < \infty$.

Введем обозначения $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_2 < 1\}$, $S_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |x_2| < R\}$, $\Omega_R := (-R/2, R/2) \times (0,1)$, $R > 0$. Граница полосы S состоит из двух прямых $\Xi_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0\}$, $\Xi_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 1\}$. Пусть $\beta > 0$ и $\gamma_\beta := \{n\beta\mathbf{e}_1, \ n \in \mathbb{Z}\}$ – одномерная решетка. Через $\widetilde{H}^s(\Omega_\beta)$ обозначим класс функций $u \in H^s(\Omega_\beta)$, γ_β-периодическое продолжение которых на S принадлежит $H^s(\Omega_R)$ для любого $R < \infty$. Через $\widetilde{C}(\overline{\Omega_\beta})$ обозначается множество сужений на $\overline{\Omega_\beta}$ γ_β-периодических непрерывных в $\overline{S}$ функций.

Через c, C (с индексами или без них) обозначаются различные оценочные постоянные. Символ $\mathbf{1}$ означает единичную (2×2)-матрицу. Для матрицы h символ h^t означает транспонированную матрицу. Если Ξ – измеримое множество в $\mathbb{R}^2$, то $\operatorname{mes}_2\Xi$ означает двумерную меру Лебега множества Ξ.

1.2. Квази-конформные отображения. Ниже, точки $\mathbb{R}^2$ реализуются как точки $x_1 + ix_2 = z \in \mathbb{C}$. Отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, мы будем для удобства ссылок дополнять, как $\mathbb{C}$, так и $\mathbb{R}^2$, бесконечно удаленной точкой. Это следует учитывать в дальнейшем; в частности, это относится к формулировкам теорем 1.1 и 1.2.

Пусть $\mathcal{B}$ – область в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение Бельтрами

$$\partial_{\overline{z}} f = q(z)\partial_z f, \quad z = x_1 + ix_2 \in \mathcal{B}, \tag{1.1}$$

где комплексно-значная функция $q(z)$ удовлетворяет условию

$$\|q\|_{L_\infty} < 1. \tag{1.2}$$

Говорят, что (см. [1]) *непрерывная в $\mathcal{B}$ функция f является q-квази-конформной (или просто квази-конформной) в $\mathcal{B}$, если $\partial_z f \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{B})$ и выполнено* (1.1). Если $q = 0$, то отображение f конформное.

В следующей теореме сформулированы хорошо известные утверждения относительно квази-конформных отображений. Все они получаются комбинацией теоремы Римана о конформных отображениях и теоремы 5 из [1]. Частично необходимые комментарии можно найти в [14, §7].

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ – односвязная область с более чем одной граничной точкой. Пусть комплексно-значная функция $q(z)$ удовлетворяет в $\mathcal{B}$ условию (1.2). Тогда существует q-квази-конформный гомеоморфизм f области $\mathcal{B}$ на полосу S. При этом выполнены следующие свойства.*

(1) *Справедливо соотношение*

$$0 < |\partial_z f| < \infty \quad \text{для п. в.} \quad z \in \mathcal{B}. \tag{1.3}$$

(2) *Для некоторого $p > 2$ выполнено*

$$f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathcal{B}), \quad f^{-1} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(S), \quad p > 2. \tag{1.4}$$

(3) *Пусть функция $q(z)$ продолжена на всю плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением свойства (1.2) (например, нулем). Гомеоморфизм f представляется в виде композиции $f = f_2 \circ f_1$, где f_1 – q-квази-конформный гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя такой, что*

$$f_1,\ f_1^{-1} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) \subset C(\mathbb{C}), \quad p > 2;$$

f_2 – конформное отображение области $f_1(\mathcal{B})$ на полосу S.

Пусть $\Psi := (\psi_1, \psi_2)^t$ – отображение области $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ класса $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{B})$. Непосредственной проверкой (см., например, [14]) легко убедиться, что уравнение (1.1) при условии (1.2) *равносильно* уравнению

$$\left(\det \Psi'(\mathbf{x})\right)^{-1} \Psi'(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) (\Psi'(\mathbf{x}))^t = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \tag{1.5}$$

где вещественная матрица-функция b удовлетворяет условиям

$$\det b(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \tag{1.6}$$

$$c_0 \mathbf{1} \le b(\mathbf{x}) \le c_1 \mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad 0 < c_0 \le c_1 < \infty. \tag{1.7}$$

Здесь Ψ' – матрица Якоби отображения Ψ. Соответствие между уравнениями (1.1) и (1.5) осуществляется соотношениями

$$\operatorname{Re} f(z) = \psi_1(\mathbf{x}), \quad \operatorname{Im} f(z) = \psi_2(\mathbf{x}),$$

$$q(z) = \frac{-b_{12}(\mathbf{x}) + i(1 - b_{22}(\mathbf{x}))}{b_{12}(\mathbf{x}) - i(1 + b_{22}(\mathbf{x}))}, \ z = x_1 + i x_2. \tag{1.8}$$

При этом справедливо равенство

$$\det \Psi'(\mathbf{x}) = |\partial_z f|^2 - |\partial_{\overline{z}} f|^2 = (1 - |q(z)|^2)|\partial_z f|^2, \ z = x_1 + ix_2. \quad (1.9)$$

По аналогии с q-квази-конформными отображениями f *отображения* $\Psi \in H^1_{\text{loc}}(\mathcal{B})$, *удовлетворяющие уравнению* (1.5), *будем называть* b*-квази-конформными (или просто квази-конформными) в* $\mathcal{B}$. Если $b = \mathbf{1}$, то отображение Ψ конформное. Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 1.1 в терминах преобразований в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ *– односвязная область с более чем одной граничной точкой. Пусть вещественная матрица-функция* $b(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (1.6), (1.7). *Тогда существует* b*-квази-конформный гомеоморфизм* Ψ *области* $\mathcal{B}$ *на полосу* S. *При этом выполнены следующие свойства.*

(1) *Справедливо соотношение*

$$0 < \det \Psi'(\mathbf{x}) < \infty \quad \text{для п. в. } \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \quad (1.10)$$

(2) *Для некоторого* $p > 2$ *выполнено*

$$\Psi \in W^1_{p,\text{loc}}(\mathcal{B}), \quad \Psi^{-1} \in W^1_{p,\text{loc}}(S), \quad p > 2. \quad (1.11)$$

(3) *Пусть матрица-функция* $b(\mathbf{x})$ *продолжена на все* $\mathbb{R}^2$ *с сохранением свойств* (1.6), (1.7) *(например, как единичная матрица). Гомеоморфизм* Ψ *представляется в виде композиции* $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$, *где* Ψ_1 *–* b*-квази-конформный гомеоморфизм плоскости* $\mathbb{R}^2$ *на себя такой, что*

$$\Psi_1, \ \Psi_1^{-1} \in W^1_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \subset C(\mathbb{R}^2), \quad p > 2;$$

Ψ_2 *– конформное отображение области* $\Psi_1(\mathcal{B})$ *на полосу* S.

Отметим, что из (1.5), (1.7) непосредственно вытекает тождество

$$\Psi'(\mathbf{x}) = (\det \Psi'(\mathbf{x}))^{1/2}\, \mathcal{W}(\mathbf{x})(b(\mathbf{x}))^{-1/2}, \quad (1.12)$$

где $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ – вещественная ортогональная матрица.

1.3. Условие на область. Положим $\mathbb{R}^2_{r+} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > r\}$, $\mathbb{R}^2_{r-} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 < r\}$, $r \in \mathbb{R}$. Предположим, что “периодический волновод” $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1.3. *Множество* $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ – *односвязная область такая, что ни одна из полуплоскостей* $\mathbb{R}^2_{r\pm}$, $r \in \mathbb{R}$, *не лежит в* Π. *Область* Π *периодична относительно некоторой решетки* γ_α, $\alpha > 0$:

$$\mathbf{x} \in \Pi \Rightarrow \mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1 \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что из условия 1.3 непосредственно вытекает, что *точки* $\pm\infty$ *являются различными достижимыми граничными точками области* Π, *порожденными* γ_α-*периодическими непрерывными кривыми* (определение достижимых граничных точек можно найти, например, в [6, § II.3]).

Фиксируем некоторую вещественную матрицу-функцию $b(\mathbf{x})$, удовлетворяющую в Π условиям (1.6), (1.7). Будем также считать, что матрица-функция $b(\mathbf{x})$ γ_α-периодическая. Пусть Ψ – построенное по ней в соответствии с теоремой 1.2 отображение волновода Π на полосу S. Согласно теореме Кебе (см., например, [6, §II.3, теорема 1]), с учетом достижимости точек $\pm\infty$, отображение Ψ можно выбрать так, чтобы

$$\Psi(-\infty) = -\infty, \quad \Psi(+\infty) = +\infty. \tag{1.13}$$

При этом γ_α-периодические непрерывные кривые, порождающие точки $\pm\infty$ в Π, перейдут в непрерывные кривые, уходящие на $\pm\infty$ в S. Тогда отображение Ψ определено с точностью до сдвига $\Psi \mapsto \Psi + r\mathbf{e}_1$, $r \in \mathbb{R}$. Действительно, пусть $\widetilde{\Psi}$ – другое b-квази-конформное отображение области Π на полосу S, удовлетворяющее условию (1.13). Тогда (см. [1, теорема 5]) $\widetilde{\Psi} \circ \Psi^{-1}$ – конформное отображение полосы S на себя с неподвижными точками $\pm\infty$. Отсюда, используя стандартную теорему о соответствии границ при конформных отображениях, получаем требуемое утверждение. Фиксируем некоторое b-квази-конформное отображение $\Psi: \ \Pi \to S$, удовлетворяющее (1.13). Из периодичности волновода Π и матрицы-функции $b(\mathbf{x})$ и из условия (1.13) следует, что для некоторого $\beta > 0$ (разумеется, β зависит от матрицы-функции $b(\mathbf{x})$) выполнено

$$\Psi(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \Psi(\mathbf{x}) + n\beta\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.14}$$

Для доказательства достаточно заметить, что отображение $\widetilde{\Psi}(\mathbf{x}) := \Psi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_1)\colon \Pi \to S$ удовлетворяет условию (1.13) одновременно с Ψ. Тогда по предыдущему $\widetilde{\Psi}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{e}_1$ для некоторого

$\beta \in \mathbb{R}$. Наконец, используя (1.13), заключаем, что $\beta > 0$. (Аналогичные рассуждения для доказательства соотношения (1.14), хотя и при несколько других условиях, были использованы в [14, п. 6.2].)

Замечание 1.4. Мы уже упоминали, что для доказательства теоремы 2.5 можно было бы ограничиться *конформным* отображением волновода Π на полосу S. Мы, однако, обсуждаем здесь более общий класс квази-конформных отображений области Π на S по следующим причинам. 1) Это удобно для сравнения результатов настоящей работы с результатами предшествующих работ [14, 16]. 2) Квази-конформные отображения значительно удобнее при рассмотрении задачи DD для операторов более общего вида, чем рассмотренный в §4 оператор Лапласа. Как уже отмечалось, для задачи DD возможно дальнейшее ослабление условий на $\partial\Pi$ (для операторов общего вида это будет сделано в другой статье).

Граница волновода Π естественным образом может быть разделена на два отделенных друг от друга γ_α-периодических замкнутых множества $l_\pm$: $\partial\Pi = l_- \cup l_+$. Именно, пусть $S_- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 < 1/2\}$, $S_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1/2 < x_2 < 1\}$. Тогда положим

$$l_- := \partial\Pi \cap \overline{\Psi^{-1}(S_-)}, \quad l_+ := \partial\Pi \cap \overline{\Psi^{-1}(S_+)}.$$

Введем обозначение $\mathcal{O}_R := \Psi^{-1}(\Omega_R)$, $R > 0$. Очевидно, $\mathcal{O}_\beta$ – односвязная фундаментальная область в Π относительно решетки γ_α. Отметим, что ячейка $\mathcal{O}_\beta$, вообще говоря, не является ограниченной.

Обозначим через $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ класс функций $u \in H^1(\mathcal{O}_\beta)$, γ_α-периодическое продолжение которых на Π принадлежит $H^1(\mathcal{O}_R)$ для любого $R < \infty$. Помимо априорного условия 1.3 будем считать выполненным следующее

Условие 1.5. *Область $\mathcal{O}_\beta$ такова, что вложение $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ компактно.*

Замечание 1.6. В условии 1.5 область $\mathcal{O}_\beta$ можно заменить на любое (не обязательно связное) фундаментальное относительно решетки γ_α открытое множество в Π. Действительно, пространство $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ можно отождествить с пространством H^1 на поверхности цилиндра, образованной фактор-множеством $\Pi\big/\{\gamma_\alpha\}$.

Нам, однако, в дальнейшем удобно использовать фундаментальную область $\mathcal{O}_\beta$.

Отметим, что из условия 1.5 автоматически вытекает, что область $\mathcal{O}_\beta$ имеет конечную меру:

$$\mathrm{mes}_2 \mathcal{O}_\beta < \infty. \tag{1.15}$$

1.4. Некоторые свойства отображения Ψ. В данном пункте мы в дополнение к общим свойствам отображения Ψ (см. теорему 1.2) получим ряд необходимых для дальнейшего соотношений, вытекающих из условия 1.5.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\psi(\boldsymbol{\xi}) := \left(\det \Psi'(\mathbf{x})\right)^{-1/2}, \quad \widehat{\psi}(\mathbf{x}) := \left(\psi(\boldsymbol{\xi})\right)^{-1} = \left(\det \Psi'(\mathbf{x})\right)^{1/2}, \\ \boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Соотношение (1.10) тогда перепишется в виде

$$0 < \psi(\boldsymbol{\xi}) < \infty \quad \text{для п. в. } \boldsymbol{\xi} \in S. \tag{1.17}$$

Из (1.15) получаем

$$\int\limits_{\Omega_\beta} (\psi(\boldsymbol{\xi}))^2 d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} d\mathbf{x} < \infty, \quad \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} (\widehat{\psi}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_\beta} d\boldsymbol{\xi} < \infty. \tag{1.18}$$

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего.

Лемма 1.7. *Компактность вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ равносильна оценке*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\beta} |f|^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ 0 < \varepsilon \le 1, \quad f \in H^1(\Omega_\beta).\end{gathered} \tag{1.19}$$

Доказательство. Покажем сначала, что компактность вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ влечет (1.19). Из [1, лемма 10] следует, что преобразование $f \mapsto f \circ \Psi$ отображает $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_\beta)$ на $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}_\beta)$ (это, впрочем, несложно установить непосредственно, используя (1.7), (1.11), (1.12)). Пусть $f \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_\beta)$. Из (1.7), (1.12) вытекает, что

$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f \in L_2(\Omega_\beta)$ тогда и только тогда, когда $\nabla(f\circ\Psi) \in L_2(\mathcal{O}_\beta)$. При этом

$$c_0 \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla(f\circ\Psi)|^2 d\mathbf{x} \le \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le c_1 \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla(f\circ\Psi)|^2 d\mathbf{x}. \tag{1.20}$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \widetilde{H}^1(\Omega_\beta) \cap L_\infty(\Omega_\beta)$. Тогда с учетом (1.14), (1.15), (1.20) имеем $f\circ\Psi \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \cap L_\infty(\mathcal{O}_\beta)$. Положим

$$\widehat{\psi}_0(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \widehat{\psi}(\mathbf{x}) \ge 1 \\ \widehat{\psi}(\mathbf{x}) & \text{при} \quad \widehat{\psi}(\mathbf{x}) < 1. \end{cases}$$

Из (1.17) и компактности вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$, с учетом леммы 1.2 из [13], получаем оценку

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |f\circ\Psi|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla(f\circ\Psi)|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} \widehat{\psi}_0^2 |f\circ\Psi|^2 d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

Тем более выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |f\circ\Psi|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla(f\circ\Psi)|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} \widehat{\psi}^2 |f\circ\Psi|^2 d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

Осуществляя в последнем неравенстве замену $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$, с учетом (1.20), приходим к неравенству (1.19) на классе функций $f \in \widetilde{H}^1(\Omega_\beta) \cap L_\infty(\Omega_\beta)$. По замыканию, получаем (1.19) на всех функциях из $\widetilde{H}^1(\Omega_\beta)$. Теперь для доказательства (1.19) остается сослаться на лемму 1.5 из [13].

Пусть теперь выполнено (1.19). Пусть $f \in H^1(\Omega_\beta)$. Осуществляя в левой части (1.19) замену $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$, с учетом (1.16), (1.20), получаем, что $f\circ\Psi \in H^1(\mathcal{O}_\beta)$. Обратно, если $F \in H^1(\mathcal{O}_\beta)$, то из (1.20) вытекает, что $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(F\circ\Psi^{-1}) \in L_2(\Omega_\beta)$. Отсюда следует (см., например, [8, п. 1.1.11]), включение $F\circ\Psi^{-1} \in H^1(\Omega_\beta)$. Тем самым мы проверили, что *отображение $f \mapsto f\circ\Psi$ переводит $H^1(\Omega_\beta)$ на $H^1(\mathcal{O}_\beta)$.*

Далее, из (1.17), (1.19) и компактности вложения $H^1(\Omega_\beta) \subset L_2(\Omega_\beta)$, на основании леммы 1.2 из [13], следует оценка

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_\beta} |f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |f|^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ 0 < \varepsilon \le 1, \quad f \in H^1(\Omega_\beta). \end{gathered} \tag{1.21}$$

После замены переменных в левой части (1.19) и в правой части (1.21), с учетом (1.20), придем к следующим неравенствам:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |f\circ\Psi|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon)\int\limits_{\Omega_\beta} |f|^2 d\boldsymbol{\xi},\\ 0<\varepsilon\le 1,\quad f\in H^1(\Omega_\beta),\end{gathered}\tag{1.22}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\beta} |F\circ\Psi^{-1}|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla F|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon)\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |F|^2 d\mathbf{x},\\ 0<\varepsilon\le 1,\quad F\in H^1(\mathcal{O}_\beta).\end{gathered}\tag{1.23}$$

Рассмотрим последовательность функций $F_n \in H^1(\mathcal{O}_\beta)$, $n\in\mathbb{N}$, такую, что

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla F_n|^2 d\mathbf{x} + \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |F_n|^2 d\mathbf{x} \le 1,\quad n\in\mathbb{N}.\tag{1.24}$$

Из (1.20), (1.23) вытекает, что последовательность $F_n\circ\Psi^{-1}\in H^1(\Omega_\beta)$, $n\in\mathbb{N}$, ограничена в $H^1(\Omega_\beta)$, а потому можно выделить подпоследовательность (будем считать, что это сама последовательность $F_n\circ\Psi^{-1}$, $n\in\mathbb{N}$) сходящуюся в $L_2(\Omega_\beta)$. Тогда из (1.20), (1.22), (1.24) следует, что последовательность F_n, $n\in\mathbb{N}$, сходится в $L_2(\mathcal{O}_\beta)$. Таким образом, вложение $H^1(\mathcal{O}_\beta)\subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ компактно. •

Замечание 1.8. 1) При доказательстве леммы 1.7 мы параллельно проверили, что компактность вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta)\subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ равносильна компактности вложения $H^1(\mathcal{O}_\beta)\subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$. 2) Из замечания 1.6 и леммы 1.7 вытекает, что оценка (1.19) выполняется одновременно для всех квази-конформных отображений Ψ (отвечающих различным γ_α-периодическим матрицам-функциям $b(\mathbf{x})$). При этом постоянная $C(\varepsilon)$ в (1.19), разумеется, зависит от $b(\mathbf{x})$.

Далее, из (1.14) видно, что сдвинутые ячейки $\mathcal{O}_\beta+n\alpha\mathbf{e}_1$, $n\in\mathbb{Z}$, переводятся отображением Ψ на $\Omega_\beta+n\beta\mathbf{e}_1$, $n\in\mathbb{Z}$. Отсюда, суммируя оценки (1.20), (1.22), (1.23), записанные для сдвинутых ячеек, получаем, что *отображение* $f\mapsto f\circ\Psi$ *переводит* $H^1(S)$ *на*

$H^1(\Pi)$, и справедливы неравенства

$$c_0 \int\limits_{\Pi} |\nabla(f \circ \Psi)|^2 d\mathbf{x} \le \int\limits_{S} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \leqslant c_1 \int\limits_{\Pi} |\nabla(f \circ \Psi)|^2 d\mathbf{x}, \ f \in H^1(S), \tag{1.25}$$

$$\int\limits_{\Pi} |f \circ \Psi|^2 d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{S} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{S} |f|^2 d\boldsymbol{\xi}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad f \in H^1(S), \tag{1.26}$$

$$\int\limits_{S} |F \circ \Psi^{-1}|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Pi} |\nabla F|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon) \int\limits_{\Pi} |F|^2 d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad F \in H^1(\Pi). \tag{1.27}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.9. *Пусть F – измеримая функция в $\mathcal{O}_\beta$. Пусть выполнены условия* (1.17), (1.19). *Тогда следующие условия равносильны:*

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |F|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + C(\varepsilon; F) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2 \, d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad u \in H^1(\mathcal{O}_\beta), \tag{1.28}$$

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |F \circ \Psi^{-1}|^2 |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon; F) \int\limits_{\Omega_\beta} |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad u^\circ \in H^1(\Omega_\beta). \tag{1.29}$$

Кроме того, оценки (1.28), (1.29) *равносильны аналогичным оценкам на классах $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega_\beta)$ соответственно.*

Доказательство. Выполняя замену переменных $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$, $u^\circ = u \circ \Psi^{-1}$, и используя (1.20), убеждаемся, что оценка (1.28) эквивалентна оценке

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |F \circ \Psi^{-1}|^2 |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon; F) \int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi},$$

$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u^\circ \in H^1(\Omega_\beta).$$

Мы учли (см. доказательство леммы 1.7), что отображение $u \mapsto u^\circ = u \circ \Psi^{-1}$ переводит $H^1(\mathcal{O}_\beta)$ на $H^1(\Omega_\beta)$. Теперь, используя (1.19), (1.21), получаем, что условия (1.28), (1.29) равносильны. Аналогично, с учетом (1.14), проверяется равносильность оценок (1.28), (1.29) на периодических классах. Наконец, используя лемму 1.5 из [13], заключаем, что неравенство (1.29) эквивалентно аналогичному неравенству на классе $\widetilde{H}^1(\Omega_\beta)$. Этим доказательство леммы завершено. •

1.5. Классы функций. Определим следующий класс функций в Π: $\mathfrak{C}_0(\Pi) := \{F : \ F = f \circ \Psi, \ f \in C_0(\overline{S})\}$. Пусть также $\mathfrak{C}(\Pi) := \{F : \ F = f \circ \Psi, \ f \in C(\overline{S})\}$, и $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ – множество сужений на $\mathcal{O}_\beta$ γ_α-периодических функций класса $\mathfrak{C}(\Pi)$. Очевидно, $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta) = \{F : F = f \circ \Psi, \ f \in \widetilde{C}(\overline{\Omega_\beta})\}$. Легко понять, что классы функций $\mathfrak{C}_0(\Pi)$, $\mathfrak{C}(\Pi)$, $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ не зависят от выбора γ_α-периодической матрицы-функции $b(\mathbf{x})$.

Мы изучаем оператор Шредингера в волноводе Π с краевыми условиями Дирихле либо естественными условиями на каждой из двух частей l_+, l_- границы $\partial\Pi$. Соответственно рассматриваются краевые задачи четырех типов, условно обозначаемых через DD, DN, ND, NN. Введем следующие обозначения, где значки λ и μ принимают значения D либо N:

$$C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S}) := \begin{cases} \{f \in C_0(\overline{S}) : f|_{\Xi_0} = f|_{\Xi_1} = 0\}, & \lambda = \mu = D, \\ \{f \in C_0(\overline{S}) : f|_{\Xi_0} = 0\}, & \lambda = D, \quad \mu = N, \\ \{f \in C_0(\overline{S}) : f|_{\Xi_1} = 0\}, & \lambda = N, \quad \mu = D, \\ C_0(\overline{S}), \quad \lambda = \mu = N, \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}_0^{(\lambda\mu)}(\Pi) := \{F : \ F = f \circ \Psi, \ f \in C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S})\}, \quad \lambda, \mu = D, N.$$

§2. Определение операторов. Основные результаты

2.1. Условия на метрику. Пусть $g(\mathbf{x}) = \{g^{jl}(\mathbf{x})\}$ – измеримая вещественная (2×2)-матрица-функция в Π такая, что

$$g(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

$$c_2\mathbf{1} \le g(\mathbf{x}) \le c_3\mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad 0 < c_2 \le c_3 < \infty. \tag{2.2}$$

Представим матрицу $g(\mathbf{x})$ в виде

$$g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})g_0(\mathbf{x}), \quad \det g_0(\mathbf{x}) = 1, \quad \omega(\mathbf{x}) := (\det g(\mathbf{x}))^{1/4}. \tag{2.3}$$

В силу (2.1)–(2.3), матрица g_0 и функция ω ограничены и отделены от нуля:

$$c_2'\mathbf{1} \le g_0(\mathbf{x}) \le c_3'\mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad 0 < c_2' \le c_3' < \infty, \tag{2.4}$$

$$0 < \omega_0 \le \omega(\mathbf{x}) \le \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \tag{2.5}$$

а также γ_α-периодичны. Относительно ω дополнительно предполагается, что

$$\omega \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta), \tag{2.6}$$

и что для любого $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla\omega|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\omega) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2 \, d\mathbf{x},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.7}$$

2.2. Условия на весовую функцию. Пусть $\phi(\mathbf{x})$ – вещественная измеримая функция в Π, причем

$$\phi(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

$$\phi(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{п. в. } \mathbf{x} \in \Pi. \tag{2.9}$$

Кроме того, предполагается, что при любом $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} \phi^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2 \, d\mathbf{x},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.10}$$

Оценка (2.10) (при условии 1.5) равносильна компактности вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ в весовое пространство $L_2(\mathcal{O}_\beta;\phi^2)$. Из леммы 1.9 непосредственно вытекает, что условие (2.10) равносильно такому же условию на классе $H^1(\mathcal{O}_\beta)$:

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} \phi^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2 \, d\mathbf{x},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u \in H^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.11}$$

Замечание 2.1. Пусть область Π лежит в полосе S_R для некоторого $R < \infty$ и удовлетворяет условию внутреннего конуса (в этом случае можно показать, что ячейка $\mathcal{O}_\beta$ ограничена). Тогда (см. [10, лемма 2.1] и [8, п. 1.1.9]) неравенства (2.7), (2.10) будут заведомо выполнены, если предположить, что

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla\omega|^2 \ln(1 + |\nabla\omega|)\, d\mathbf{x} < \infty, \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} \phi^2 \ln(1 + |\phi|)\, d\mathbf{x} < \infty. \tag{2.13}$$

В общем случае (лишь при условии 1.5) ограничения (2.12), (2.13) не гарантируют выполнения неравенств (2.7), (2.10). Если же в дополнение к (2.12), (2.13) предположить ограниченность функций $\nabla\omega$, ϕ в некоторой окрестности границы волновода $\partial\Pi$, то этого достаточно для выполнения оценок (2.7), (2.10).

2.3. Условия на магнитный потенциал. Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$, где $A_1(\mathbf{x})$, $A_2(\mathbf{x})$ – вещественные измеримые функции в Π, причем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Предположим, что для каких-либо чисел $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 1$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\mathbf{A}|^2 l_m^\rho(\widehat{\psi}^{-1}|\mathbf{A}|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(\widehat{\psi}^{-1}|\mathbf{A}|)\, d\mathbf{x} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho > 1, \tag{2.15}$$

где

$$l_1(t) := 1 + \ln(1+t), \quad l_j(t) := 1 + \ln l_{j-1}(t), \qquad j = 2, \ldots, m, \quad t \geq 0, \tag{2.16}$$

а $\widehat{\psi}$ определено в (1.16). В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.17), (1.19) *и* (2.15). *Тогда справедливы оценки:*

$$\int\limits_{\Omega_\beta} |\psi(\mathbf{A}\circ\Psi^{-1})|^2 l_m^\rho(|\psi(\mathbf{A}\circ\Psi^{-1})|)\prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\psi(\mathbf{A}\circ\Psi^{-1})|)\,d\boldsymbol{\xi} < \infty,$$
$$m\in\mathbb{N},\quad \rho>1, \tag{2.17}$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\mathbf{A}|^2|u|^2\,d\mathbf{x} \le \varepsilon\int\limits_{\mathcal{O}_\beta}|\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\mathbf{A})\int\limits_{\mathcal{O}_\beta}|u|^2\,d\mathbf{x},$$
$$0<\varepsilon\le 1,\quad u\in H^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.18}$$

Здесь параметры m *и* ρ *те же, что и в* (2.15).

Доказательство. Оценка (2.17) получается из (2.15) после замены $\boldsymbol{\xi}=\Psi(\mathbf{x})$. Из (2.17) следует (см. [10, лемма 2.1]) оценка вида (1.29) с функцией $|\mathbf{A}\circ\Psi^{-1}|$ вместо $F\circ\Psi^{-1}$. Остается воспользоваться утверждением леммы 1.9. •

2.4. Мы уже видели (см. замечание 2.1), что при дополнительных ограничениях на геометрию волновода можно указать простые и широкие достаточные условия на коэффициенты ω, ϕ, обеспечивающие выполнение условий (2.7), (2.10). Аналогичные упрощения возможны и в случае, когда вместо (1.19) выполнено более жесткое

Условие 2.3. *Для некоторой* γ_α*-периодической матрицы-функции* $b(\mathbf{x})$, *отвечающее ей* b*-квази-конформное отображение* Ψ, *фиксированное (с точностью до сдвига) условием* (1.13), *удовлетворяет соотношению* $\Psi^{-1}\in W_p^1(\Omega_\beta)$ *для какого-либо* $p>2$, *или, что равносильно,*

$$\psi\in L_p(\Omega_\beta),\quad p>2. \tag{2.19}$$

Если выполнено условие 2.3, то (ср. [16, 13]) условия (2.7), (2.10) выполняются, если выполнены условия (2.12), (2.13) соответственно. Точно так же, условие (2.15) обеспечивается более простым условием

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta}|\mathbf{A}|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}|)\prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}|)\,d\mathbf{x}<\infty,\quad m\in\mathbb{N},\quad \rho>1, \tag{2.20}$$

с теми же параметрами m и ρ, что и в (2.15).

В общем случае (при условии 1.5), вообще говоря, есть лишь включение (ср. теорему 1.2) $\Psi^{-1} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega_\beta)$, $p > 2$; поэтому условий (2.12), (2.13), (2.20) недостаточно.

2.5. Условия на обобщенный электрический потенциал. Пусть $d\nu^\circ$ – вещественный борелевский заряд в $\overline{S}$ локально конечной вариации, т.е.

$$\int\limits_{\mathcal{B}} |d\nu^\circ| < \infty \tag{2.21}$$

для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{B} \subset \overline{S}$. Пусть, кроме того, заряд $d\nu^\circ$ γ_β-периодичен:

$$\int\limits_{\mathcal{B}+n\beta\mathbf{e}_1} d\nu^\circ = \int\limits_{\mathcal{B}} d\nu^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.22}$$

Определим линейные непрерывные функционалы ℓ и $\widetilde{\ell}$ над классами $\mathfrak{C}_0(\Pi)$ и $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ по следующим формулам:

$$\ell[F] := \int\limits_{\overline{S}} F \circ \Psi^{-1}\, d\nu^\circ, \quad F \in \mathfrak{C}_0(\Pi), \tag{2.23}$$

$$\widetilde{\ell}[\widetilde{F}] := \int\limits_{\widehat{\Omega}_\beta} \widetilde{F} \circ \Psi^{-1}\, d\nu^\circ, \quad \widetilde{F} \in \widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.24}$$

Здесь $\widehat{\Omega}_\beta := [-\beta/2, \beta/2) \times [0,1]$.

В ряде случаев функционалы ℓ, $\widetilde{\ell}$ допускают более прямое описание.

Случай 1. Пусть граница волновода Π состоит из двух непересекающихся γ_α-периодических кривых Жордана. (Подобная ситуация при дополнительном условии билипшицевости кривых рассмотрена в [16].) Тогда, с учетом утверждения (3) теоремы 1.2 и теоремы II.3.4 из [6], отображение Ψ взаимно-однозначно переводит $\overline{\Pi}$ на $\overline{S}$ и при этом

$$\Psi \in C(\overline{\Pi}), \quad \Psi^{-1} \in C(\overline{S}).$$

Тем самым, $\mathfrak{C}_0(\Pi) = C_0(\overline{\Pi})$ и, кроме того, $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta) = \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}_\beta})$. Здесь через $\widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}_\beta})$ обозначено множество сужений на $\overline{\mathcal{O}_\beta}$ γ_α-периодических непрерывных в $\overline{\Pi}$ функций.

Определим в $\overline{\Pi}$ вещественный борелевский заряд $d\nu$ локально конечной вариации формулой

$$\int\limits_{\mathcal{D}} d\nu := \int\limits_{\Psi(\mathcal{D})} d\nu^\circ \tag{2.25}$$

для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{D} \subset \overline{\Pi}$. Заряд $d\nu$ автоматически γ_α-периодичен в $\overline{\Pi}$. Тогда

$$\ell[F] = \int\limits_{\overline{\Pi}} F\,d\nu, \quad F \in C_0(\overline{\Pi}),$$

$$\widetilde{\ell}[\widetilde{F}] = \int\limits_{\widehat{\mathcal{O}}_\beta} \widetilde{F}\,d\nu, \quad \widetilde{F} \in \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}_\beta}).$$

Здесь $\widehat{\mathcal{O}}_\beta := \Psi^{-1}(\widehat{\Omega}_\beta)$. Пусть Λ (соотв., Λ_0) – множество всех вещественных борелевских γ_α- (соотв., γ_β-) периодических зарядов в $\overline{\Pi}$ (соотв., $\overline{S}$) локально конечной вариации. Соотношение (2.25) определяет взаимно-однозначное соответствие между Λ и Λ_0. Тем самым, множества функционалов ℓ, $\widetilde{\ell}$ естественным образом отождествляются с множеством зарядов Λ.

Случай 2. Пусть область $\mathcal{O}_\beta$ представима в виде объединения конечного числа областей:

$$\mathcal{O}_\beta = \bigcup_{j=1}^{K} \mathcal{O}_\beta^{(j)}, \tag{2.26}$$

причем граница каждой области $\mathcal{O}_\beta^{(j)}$, $j = 1, \ldots, K$, есть замкнутая кривая Жордана. Разумеется, представление (2.26) неоднозначно. (Отметим, что в [14] предполагалось, что выполнено условие (2.26). При этом дополнительно накладывалось условие $\partial\mathcal{O}_\beta^{(j)} \in C^{1+\delta}$, $\delta > 0$.) Можно показать, что условие (2.26) не зависит от выбора матрицы-функции $b(\mathbf{x})$; для нас, однако, это сейчас несущественно. Пусть $\Omega_\beta^{(j)} := \Psi(\mathcal{O}_\beta^{(j)})$, $j = 1, \ldots, K$. Поскольку области $\mathcal{O}_\beta^{(j)}$ ограничены кривыми Жордана, то (ср.

случай 1) отображение Ψ взаимно-однозначно переводит $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$ на $\overline{\Omega_\beta^{(j)}}$ и выполнено

$$\Psi \in C(\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}), \quad \Psi^{-1} \in C(\overline{\Omega_\beta^{(j)}}), \quad j = 1, \ldots, K.$$

В рассматриваемом случае возможно прямое описание классов $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ и $\mathfrak{C}_0(\Pi)$. Класс $\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ состоит из сужений на $\mathcal{O}_\beta$ γ_α-периодических непрерывных в Π функций $\widetilde{F}$, обладающих следующим свойством: для всех $j = 1, \ldots, K$, непрерывная функция $\widetilde{F}\big|_{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$ в области $\mathcal{O}_\beta^{(j)}$ допускает продолжение до функции непрерывной в замкнутой области $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$. Положим $\mathcal{O}_\beta^{(j)}(n) := \mathcal{O}_\beta^{(j)} + n\alpha\mathbf{e}_1$, $n \in \mathbb{Z}$. Класс $\mathfrak{C}_0(\Pi)$ состоит из непрерывных в Π функций F таких, что $\operatorname{supp} F \in \overline{\mathcal{O}_R}$ при некотором $R < \infty$, и обладающих следующим свойством. Для всех $j = 1, \ldots, K$, $n \in \mathbb{Z}$, непрерывная функция $F\big|_{\mathcal{O}_\beta^{(j)}(n)}$ в области $\mathcal{O}_\beta^{(j)}(n)$ допускает продолжение до функции непрерывной в замкнутой области $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}(n)}$.

Определим в $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$ вещественные борелевские заряды $d\nu_j$, $j = 1, \ldots, K$, конечной вариации формулами

$$\int\limits_{\mathcal{D}_j} d\nu_j := \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}_j} d\nu^\circ, \quad \mathcal{D}_j \subset \overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}},\ j = 1, \ldots, K,$$

где

$$\widetilde{\mathcal{D}}_1 := \Psi(\mathcal{D}_1) \cap \widehat{\Omega}_\beta, \quad \widetilde{\mathcal{D}}_j := \left(\Psi(\mathcal{D}_j) \cap \widehat{\Omega}_\beta\right) \Big\backslash \left(\bigcup_{s=1}^{j-1} \overline{\Omega_\beta^{(s)}}\right), \quad j = 2, \ldots, K.$$

Здесь Ψ понимается как непрерывное отображение $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$ на $\overline{\Omega_\beta^{(j)}}$. Тогда функционалы (2.23), (2.24) можно записать в виде

$$\ell[F] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{K} \int\limits_{\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}} F(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) d\nu_j(\mathbf{x}), \quad F \in \mathfrak{C}_0(\Pi), \tag{2.27}$$

$$\widetilde{\ell}[\widetilde{F}] = \sum_{j=1}^{K} \int\limits_{\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}} \widetilde{F}(\mathbf{x}) d\nu_j(\mathbf{x}), \quad \widetilde{F} \in \widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.28}$$

Обратно, пусть $\{d\nu_j\}$ – система вещественных борелевских зарядов в $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$, $j=1,\dots,K$, конечной вариации, и пусть функционалы ℓ, $\widetilde{\ell}$ заданы соотношениями (2.27), (2.28). Тогда можно определить вещественный борелевский γ_β-периодический заряд $d\nu^\circ$ в $\overline{S}$ локально конечной вариации по формуле

$$\int\limits_{\mathcal{B}} d\nu^\circ := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{K}\int\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}_n^{(j)}} d\nu_j, \quad \mathcal{B}\subset\overline{S},$$

где

$$\widetilde{\mathcal{B}}_n^{(j)} := \Psi^{-1}\left((\mathcal{B}+n\beta\mathbf{e}_1)\cap\overline{\Omega_\beta^{(j)}}\right).$$

При этом функционалы (2.27), (2.28) совпадут с (2.23), (2.24) соответственно. Разумеется, соответствие между зарядом $d\nu^\circ$, задающим функционалы ℓ, $\widetilde{\ell}$ по формулам (2.23), (2.24), и системой зарядов $\{d\nu_j\}$, задающей те же функционалы по формулам (2.27), (2.28), вообще говоря, неоднозначно. Таким образом, в случае 2 функционалы ℓ, $\widetilde{\ell}$ допускают прямое описание (2.27), (2.28) и задаются системой зарядов $\{d\nu_j\}$, определенных в замкнутых областях $\overline{\mathcal{O}_\beta^{(j)}}$, $j=1,\dots,K$.

Пусть, как обычно, $2d\nu_\pm^\circ := |d\nu^\circ| \pm d\nu^\circ$. Аналогично (2.23), (2.24) определим функционалы $|\ell|$, $|\widetilde{\ell}|$ (по заряду $|d\nu^\circ|$) и $\ell_\pm$, $\widetilde{\ell}_\pm$ (по заряду $d\nu_\pm^\circ$). Очевидно, $2\ell_\pm = |\ell|\pm\ell$, $2\widetilde{\ell}_\pm = |\widetilde{\ell}|\pm\widetilde{\ell}$.

На функционалы ℓ, $\widetilde{\ell}$ накладываются следующие “неявные” условия.

(i) *Форма*

$$m_+[u,u] := \int\limits_{\Pi} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + \ell_+[|u|^2], \quad u\in H^1(\Pi)\cap\mathfrak{C}_0(\Pi), \qquad (2.29)$$

допускает замыкание в $L_2(\Pi)$. (Это означает, что для любой последовательности $\{u_j\}$, $u_j\in H^1(\Pi)\cap\mathfrak{C}_0(\Pi)$, сходящейся в $L_2(\Pi)$ к нулю и фундаментальной относительно формы m_+, выполнено $m_+[u_j,u_j]\to 0$ при $j\to\infty$.)

(ii) *При некотором* $\tau < 1$ *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\ell_-[|u|^2] \le \tau \left(\int\limits_\Pi \langle g\nabla u, \nabla u\rangle \, d\mathbf{x} + \ell_+[|u|^2] \right) + C \int\limits_\Pi |u|^2 \, d\mathbf{x}, \\ u \in H^1(\Pi) \cap \mathfrak{C}_0(\Pi), \quad \tau < 1, \quad C = C(\tau, g, \ell).\end{gathered} \tag{2.30}$$

(iii) *При любом* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\begin{gathered}|\widetilde{\ell}|[|u|^2] \le \varepsilon \left(\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}_\beta} |u(\mathbf{x})|^2 \right) + C(\varepsilon; \widetilde{\ell}) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2 \, d\mathbf{x}, \\ 0 < \varepsilon \le 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \cap \widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta).\end{gathered} \tag{2.31}$$

Условия (i)–(iii) заведомо выполнены для тех волноводных областей и зарядов, которые обсуждаются в [14] и [16].

2.6. Определение операторов. В гильбертовом пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_{\lambda\mu}[v, v] := \int\limits_\Pi \langle g(\mathbf{D} - \mathbf{A})\phi^{-1} v, (\mathbf{D} - \mathbf{A})\phi^{-1} v\rangle \, d\mathbf{x} + \ell[|\phi^{-1} v|^2], \tag{2.32}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Dom} m_{\lambda\mu} := \{v = \phi u : \ u \in H^1(\Pi) \cap \mathfrak{C}_0^{(\lambda\mu)}(\Pi)\}, \\ \lambda = D, N, \quad \mu = D, N.\end{gathered} \tag{2.33}$$

Из условий (2.8), (2.9), (2.11) вытекает, что множество (2.33) плотно в $L_2(\Pi)$.

Предложение 2.4. *Пусть область* Π *удовлетворяет условиям* 1.3, 1.5. *Пусть* $g(\mathbf{x})$ – *измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция в* Π*, удовлетворяющая условию* (2.2)*. Пусть вещественная функция* $\phi(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (2.8)–(2.10)*, а вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (2.14)*,* (2.15)*. Пусть функционал* ℓ *определен в* (2.23)*, и выполнены условия* (2.21)*,* (2.22)*,* (i)*,* (ii)*. Тогда форма* $m_{\lambda\mu}$*, определенная соотношениями* (2.32)*,* (2.33)*, полуограничена снизу и допускает замыкание в* $L_2(\Pi)$*.*

Доказательство. Из (2.9), (2.11) и условия 1.5, на основании леммы 1.2 из [13], вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |u|^2\, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi) \int\limits_{\mathcal{O}_\beta} |\phi u|^2\, d\mathbf{x}, \qquad 0<\varepsilon\le 1, \quad u\in H^1(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.34}$$

Используя периодичность ϕ и $\mathbf{A}$ (условия (2.8), (2.14)), запишем неравенства (2.18), (2.34) для интегралов по областям $\mathcal{O}_\beta + n\alpha\mathbf{e}_1$ и просуммируем по $n\in\mathbb{Z}$. Тогда

$$\int\limits_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\Pi} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi) \int\limits_{\Pi} |\phi u|^2\, d\mathbf{x}, \qquad 0<\varepsilon\le 1, \quad u\in H^1(\Pi), \tag{2.35}$$

$$\int\limits_{\Pi} |\mathbf{A}|^2|u|^2\, d\mathbf{x} \le \varepsilon \int\limits_{\Pi} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\mathbf{A}) \int\limits_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x}, \qquad 0<\varepsilon\le 1, \quad u\in H^1(\Pi). \tag{2.36}$$

Из (2.2) и (2.36) вытекают неравенства

$$\int\limits_{\Pi} \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})u\rangle\, d\mathbf{x} \ge (1-\varepsilon)\int\limits_{\Pi} \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} - C(\varepsilon; g,\mathbf{A})\int\limits_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad u\in H^1(\Pi), \tag{2.37}$$

$$\int\limits_{\Pi} \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})u\rangle\, d\mathbf{x} \le (1+\varepsilon)\int\limits_{\Pi} \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon; g,\mathbf{A})\int\limits_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad u\in H^1(\Pi). \tag{2.38}$$

Из (2.2), (2.32), (2.35), (2.37) и условия (ii) следует неравенство

$$m_{\lambda\mu}[v,v] \ge (1-\tau-\varepsilon)\int\limits_{\Pi} \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + (1-\tau)\ell_+[|u|^2] - C\int\limits_{\Pi} |v|^2\, d\mathbf{x},$$
$$u=\phi^{-1}v, \quad v\in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \qquad \tau<1, \quad C=C(\varepsilon,\tau,g,\phi,\mathbf{A},\ell). \tag{2.39}$$

Положим в (2.39) $2\varepsilon = 1-\tau$ и учтем нижнюю оценку (2.2). Тогда, с учетом (2.29),

$$
\begin{gathered}
m_{\lambda\mu}[v,v] \geq C_1 m_+[u,u] - C\int\limits_{\Pi} |v|^2\,d\mathbf{x}, \quad u = \phi^{-1}v, \\
v \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}, \quad C_1 = C_1(g,\tau) > 0, \quad C = C(\tau, g, \phi, \mathbf{A}, \ell).
\end{gathered} \tag{2.40}
$$

Из (2.2), (2.29), (2.32), (2.35) и (2.38) следует неравенство

$$
\begin{gathered}
m_{\lambda\mu}[v,v] \leq C_2 m_+[u,u] + C\int\limits_{\Pi} |v|^2\,d\mathbf{x}, \quad u = \phi^{-1}v, \\
v \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}, \quad C_2 = C_2(g), \quad C = C(g, \phi, \mathbf{A}).
\end{gathered} \tag{2.41}
$$

Неравенство (2.40) показывает, что форма $m_{\lambda\mu}$ полуограничена снизу. Из (2.35), (2.40), (2.41) и условия (i) видно, что форма $m_{\lambda\mu}$ допускает замыкание в $L_2(\Pi)$. $\bullet$

Замкнутая форма $\overline{m_{\lambda\mu}}$ порождает в $L_2(\Pi)$ самосопряженный оператор $M_{\lambda\mu}$. Оператор $M_{\lambda\mu}$ интерпретируется как оператор Шредингера в области Π, формально заданный выражением (0.1), где $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ – обобщенный электрический потенциал, порожденный функционалом ℓ. Оператор M_{DD} отвечает задаче Дирихле в Π; оператор M_{DN} (соответственно, M_{ND}) отвечает условию Дирихле на l_- (соответственно, на l_+). При этом условия на l_+ (соответственно, на l_-) – естественные. Оператор M_{NN} отвечает естественным краевым условиям на всей границе $\partial\Pi$.

2.7. Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть область* Π *удовлетворяет условиям* 1.3, 1.5. *Пусть измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция* $g(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7). *Пусть вещественная функция* $\phi(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (2.8)–(2.10), *а вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (2.14), (2.15). *Пусть функционалы* ℓ, $\widetilde{\ell}$ *определены в* (2.23), (2.24), *и выполнены условия* (2.21), (2.22), (i)–(iii). *Пусть квадратичная форма* $m_{\lambda\mu}$ *(где* λ *и* μ *принимают значения* D *и* N*) определена соотношениями* (2.32), (2.33), *а форма* $\overline{m_{\lambda\mu}}$ *есть замыкание формы* $m_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$. *Пусть самосопряженный оператор* $M_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$ *порожден формой* $\overline{m_{\lambda\mu}}$. *Тогда спектр каждого из четырех операторов* M_{DD}, M_{DN}, M_{ND}, M_{NN} *абсолютно непрерывен.*

2.8. Один частный случай. Выделим случай “регулярного” электрического потенциала. Именно, пусть V – вещественная измеримая функция в Π такая, что

$$V(\mathbf{x}+n\alpha\mathbf{e}_1)=V(\mathbf{x}),\quad n\in\mathbb{Z},\ \mathbf{x}\in\Pi, \tag{2.42}$$

$$V\in L_1(\mathcal{O}_\beta). \tag{2.43}$$

Соотношение $\int_{\mathcal{B}}d\nu^\circ := \int_{\Psi^{-1}(\mathcal{B})}V(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $\mathcal{B}\subset S$, очевидно, определяет вещественный борелевский γ_β-периодический абсолютно непрерывный заряд $d\nu^\circ$ в S локально конечной вариации. Функционалы ℓ, $\widetilde{\ell}$ тогда определяются формулами

$$\ell[F]:=\int\limits_{\Pi}VF\,d\mathbf{x},\quad F\in\mathfrak{C}_0(\Pi),$$

$$\widetilde{\ell}[\widetilde{F}]:=\int\limits_{\mathcal{O}_\beta}V\widetilde{F}\,d\mathbf{x},\quad \widetilde{F}\in\widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta).$$

Легко понять, что условия (i), (iii) выполнены автоматически. Оценка (2.30) сейчас принимает вид

$$\int\limits_{\Pi}V_-|u|^2d\mathbf{x}\le\tau\left(\int\limits_{\Pi}\langle g\nabla u,\nabla u\rangle\,d\mathbf{x}+\int\limits_{\Pi}V_+|u|^2d\mathbf{x}\right)+C\int\limits_{\Pi}|u|^2\,d\mathbf{x},$$
$$u\in H^1(\Pi)\cap\mathfrak{C}_0(\Pi),\quad \tau<1,\quad C=C(\tau,g,V), \tag{2.44}$$

для некоторого $\tau<1$. Перепишем форму (2.32) в виде

$$m_{\lambda\mu}(V)[v,v]:=$$
$$:=\int\limits_{\Pi}\langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})\phi^{-1}v,(\mathbf{D}-\mathbf{A})\phi^{-1}v\rangle\,d\mathbf{x}+\int\limits_{\Pi}V|\phi^{-1}v|^2d\mathbf{x}, \tag{2.45}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Dom}m_{\lambda\mu}(V):=\{v=\phi u:\ u\in H^1(\Pi)\cap\mathfrak{C}_0^{(\lambda\mu)}(\Pi)\},\\ \lambda=D,N,\quad \mu=D,N.\end{gathered} \tag{2.46}$$

Пусть Π, g, ϕ и $\mathbf{A}$ удовлетворяют условиям предложения 2.4, а V подчинено условиям (2.42)–(2.44). Тогда форма (2.45) на области определения (2.46) полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(\Pi)$. Замкнутая форма $\overline{m_{\lambda\mu}(V)}$ порождает в $L_2(\Pi)$ самосопряженный оператор $M_{\lambda\mu}(V)$. Оператор $M_{\lambda\mu}(V)$ интерпретируется как оператор Шредингера в области Π (отвечающий соответствующей краевой задаче), формально заданный выражением

(0.1), где $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ – "регулярный" электрический потенциал. Следующая теорема является прямым следствием теоремы 2.5.

Теорема 2.6. *Пусть область* Π *удовлетворяет условиям* 1.3, 1.5. *Пусть измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция* $g(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7). *Пусть вещественная функция* $\phi(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (2.8)–(2.10), *а вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (2.14), (2.15). *Пусть вещественная функция* $V(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (2.42)–(2.44). *Пусть квадратичная форма* $m_{\lambda\mu}(V)$ *(где* λ *и* μ *принимают значения* D *и* N*) определена соотношениями* (2.45), (2.46), *а форма* $\overline{m_{\lambda\mu}(V)}$ *есть замыкание формы* $m_{\lambda\mu}(V)$ *в* $L_2(\Pi)$. *Пусть самосопряженный оператор* $M_{\lambda\mu}(V)$ *в* $L_2(\Pi)$ *порожден формой* $\overline{m_{\lambda\mu}(V)}$. *Тогда спектр каждого из четырех операторов* $M_{DD}(V)$, $M_{DN}(V)$, $M_{ND}(V)$, $M_{NN}(V)$ *абсолютно непрерывен.*

Отметим, что условие (2.44) заведомо выполнено, если $V \geq 0$.

2.9. Комментарий. В работах [14, 16] условия на волновод ставились более жесткие чем в теореме 2.5. В частности, в обеих работах оказывалось выполненным условие 2.3. Мы уже отмечали (см. п. 2.4), что при условии 2.3 можно указать удобные достаточные условия на коэффициенты ω, ϕ, $\mathbf{A}$, при которых справедливо утверждение теоремы 2.5.

§3. Доказательство теоремы 2.5

3.1. Выполним замену переменных $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi$. Введем следующие обозначения

$$\phi^\circ(\boldsymbol{\xi}) := \left(\det \Psi'(\mathbf{x})\right)^{-1/2} \phi(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

$$\omega^\circ(\boldsymbol{\xi}) := \omega(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

$$g_0^\circ(\boldsymbol{\xi}) := \left(\det \Psi'(\mathbf{x})\right)^{-1} \Psi'(\mathbf{x}) g_0(\mathbf{x}) (\Psi'(\mathbf{x}))^t, \tag{3.3}$$

$$g^\circ(\boldsymbol{\xi}) := (\omega^\circ(\boldsymbol{\xi}))^2 g_0^\circ(\boldsymbol{\xi}), \tag{3.4}$$

$$\mathbf{A}^\circ(\boldsymbol{\xi}) := (\Psi'(\mathbf{x})^t)^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi$. Наша цель – убедиться в том, что коэффициенты (3.1)–(3.5) в полосе S удовлетворяют условиям того же типа, что и исходные коэффициенты в области Π.

Из свойства (1.14) отображения Ψ, условий (2.1), (2.3), (2.8), (2.14) и соотношений (3.1)–(3.5) видно, что *коэффициенты* ϕ°, ω°, g_0° *и* $\mathbf{A}^\circ$ *периодичны в полосе* S *относительно решетки* γ_β.

3.2. Условия на метрику g°. Из (2.5) и (3.2), очевидно, вытекает неравенство

$$0 < \omega_0 \le \omega^\circ(\boldsymbol{\xi}) \le \omega_1 < \infty, \quad \boldsymbol{\xi} \in S. \tag{3.6}$$

В силу (1.7), (1.12), (3.3), для g_0° выполнено условие, аналогичное (2.4):

$$c_2^\circ \mathbf{1} \le g_0^\circ(\boldsymbol{\xi}) \le c_3^\circ \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in S, \quad 0 < c_2^\circ \le c_3^\circ < \infty, \tag{3.7}$$

где $c_2^\circ = c_2^\circ(g_0, \Psi)$, $c_3^\circ = c_3^\circ(g_0, \Psi)$. Отметим, что отображение $F \mapsto F \circ \Psi^{-1}$ переводит $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta)$ на $\widetilde{H}^1(\Omega_\beta)$ (ср. доказательство леммы 1.7). Тогда из (2.6) следует, что $\omega^\circ = \omega \circ \Psi^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\omega^\circ \in \widetilde{H}^1(\Omega_\beta). \tag{3.8}$$

В силу (1.7), (1.12), (2.7), (3.2) и леммы 1.9, для ω° выполнена оценка:

$$\int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \omega^\circ|^2 |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\beta} |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u^\circ \in \widetilde{H}^1(\Omega_\beta), \tag{3.9}$$

где $C(\varepsilon) = C(\varepsilon; \omega, \Psi)$.

3.3. Условия на весовую функцию ϕ°. Из (1.17), (2.9) и (3.1) видно, что

$$\phi^\circ(\boldsymbol{\xi}) > 0, \quad \text{п. в.} \ \ \boldsymbol{\xi} \in S. \tag{3.10}$$

Соотношения (2.10), (3.1) и лемма 1.9 приводят к условию

$$\int\limits_{\Omega_\beta} |\phi^\circ|^2 |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\beta} |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u^\circ \in \widetilde{H}^1(\Omega_\beta), \tag{3.11}$$

где $C(\varepsilon) = C(\varepsilon; \phi, \Psi)$.

3.4. Условия на магнитный потенциал $\mathbf{A}^\circ$. Функции $l_j(t)$, введенные в (2.16), очевидно, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &l_j(ct) \le \widehat{C}_j l_j(t), \quad t \ge 0, \quad c \ge 1, \quad j = 1, \dots, m, \\ &\widehat{C}_1 = 1 + \ln c, \quad \widehat{C}_j = 1 + \ln \widehat{C}_{j-1}, \quad j = 2, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (1.7), (1.12), (2.15), (3.5), (3.12) и леммы 2.2 получаем

$$\int\limits_{\Omega_\beta} |\mathbf{A}^\circ|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}^\circ|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}^\circ|)\, d\boldsymbol{\xi} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho > 1, \tag{3.13}$$

с теми же параметрами m и ρ, что и в (2.15).

3.5. Условия на заряд $d\nu^\circ$. Отображение $u \mapsto u^\circ = u \circ \Psi^{-1}$ переводит $H^1(\Pi) \cap \mathfrak{C}_0(\Pi)$ на $H^1(S) \cap C_0(\overline{S})$. В $L_2(S)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_+^\circ[u^\circ, u^\circ] := \int\limits_S |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ|^2\, d\boldsymbol{\xi} + \int\limits_{\overline{S}} |u^\circ|^2\, d\nu_+^\circ, \quad u^\circ \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S}). \tag{3.14}$$

Выполняя в (3.14) замену $\mathbf{x} = \Psi^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ и используя (1.25), (2.23) и (2.29), получаем двустороннюю оценку

$$\begin{gathered} c(\Psi)\, m_+[u, u] \le m_+^\circ[u^\circ, u^\circ] \le C(\Psi)\, m_+[u, u], \\ u = u^\circ \circ \Psi, \quad u^\circ \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S}). \end{gathered} \tag{3.15}$$

Соотношения (1.26), (3.15) вместе с условием (i) для ℓ (см. п. 2.5) показывают, что для $d\nu^\circ$ выполнено следующее условие.

(i$'$) *Форма* (3.14) *допускает замыкание в* $L_2(S)$.

Далее, в силу (3.2)–(3.4) имеем

$$\int\limits_S \langle g^\circ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ, \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ \rangle\, d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_\Pi \langle g \nabla u, \nabla u \rangle\, d\mathbf{x}, \tag{3.16}$$

где $u = u^\circ \circ \Psi$, $u^\circ \in H^1(S)$. Условие (ii) для ℓ (см. (2.30)), с учетом (1.26), (2.2), (2.23), (3.16), приводит к следующему условию.

(ii$'$) *При некотором* $\tau^\circ < 1$ *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered} \int\limits_{\overline{S}} |u^\circ|^2\, d\nu_-^\circ \le \tau^\circ \left(\int\limits_S \langle g^\circ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ, \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ \rangle\, d\boldsymbol{\xi} + \int\limits_{\overline{S}} |u^\circ|^2\, d\nu_+^\circ \right) + \\ + C \int\limits_S |u^\circ|^2\, d\boldsymbol{\xi}, \quad u^\circ \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S}), \quad \tau^\circ < 1. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Число τ° в (3.17) может быть выбрано любым из интервала $(\tau, 1)$, где τ фиксировано в (2.30); $C = C(\tau^\circ, g, \ell, \Psi)$. Отображение $u \mapsto u^\circ$ переводит $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}_\beta) \cap \widetilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}_\beta)$ на $\widetilde{H}^1(\Omega) \cap \widetilde{C}(\overline{\Omega_\beta})$. Выполняя в (2.31) подстановку $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$ и учитывая (1.20), (1.22), (2.24), приходим к следующему условию.

(iii$'$) *При любом* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_\beta} |u^\circ|^2 \, |d\nu^\circ| \le \varepsilon \left(\int\limits_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + \max_{\boldsymbol{\xi} \in \overline{\Omega_\beta}} |u^\circ(\boldsymbol{\xi})|^2 \right) + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\beta} |u^\circ|^2 \, d\boldsymbol{\xi},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega_\beta) \cap \widetilde{C}(\overline{\Omega_\beta}), \tag{3.18}$$

где $C(\varepsilon) = C(\varepsilon; \widetilde{\ell}, \Psi)$.

3.6. Операторы в полосе S. В $L_2(S)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} m^\circ_{\lambda\mu}[w, w] := \int\limits_S \langle g^\circ (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\circ)(\phi^\circ)^{-1} w, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\circ)(\phi^\circ)^{-1} w \rangle \, d\boldsymbol{\xi} + \\ + \int\limits_{\overline{S}} |(\phi^\circ)^{-1} w|^2 \, d\nu^\circ, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\operatorname{Dom} m^\circ_{\lambda\mu} := \{ w = \phi^\circ u^\circ : \ u^\circ \in H^1(S) \cap C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S}) \},$$
$$\lambda = D, N, \quad \mu = D, N. \tag{3.20}$$

В силу предложения 2.4 (примененного при $\Pi = S$), с учетом условий (3.6), (3.7), (3.10), (3.11), (3.13), а также условий (i$'$), (ii$'$), форма (3.19) на области определения (3.20) полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(S)$. Замкнутая форма $\overline{m^\circ_{\lambda\mu}}$ порождает самосопряженный оператор $M^\circ_{\lambda\mu}$ в $L_2(S)$.

Для $v \in L_2(\Pi)$ положим $w(\boldsymbol{\xi}) = (\det \Psi'(\mathbf{x}))^{-1/2} v(\mathbf{x})$, где $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$. Отображение $v \mapsto w$ *унитарно переводит* $L_2(\Pi)$ *на* $L_2(S)$. При этом $\operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}$ отображается на $\operatorname{Dom} m^\circ_{\lambda\mu}$.

В соответствии с (3.1)–(3.5), (2.23), после подстановок $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x})$, $w(\boldsymbol{\xi}) = (\det \Psi'(\mathbf{x}))^{-1/2} v(\mathbf{x})$, форма (2.32) перейдет в форму (3.19):

$$m_{\lambda\mu}[v, v] = m^\circ_{\lambda\mu}[w, w], \quad v \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}.$$

Отсюда следует, что *операторы* $M_{\lambda\mu}$ *и* $M^{\circ}_{\lambda\mu}$ *унитарно эквивалентны*. Согласно теореме 2.1 из [16] *спектр каждого из четырех операторов* $M^{\circ}_{\lambda\mu}$ *абсолютно непрерывен*. Вместе с ним абсолютно непрерывен и спектр каждого из четырех операторов $M_{\lambda\mu}$. Доказательство теоремы 2.5 полностью завершено.

§4. Задача Дирихле

4.1. До сих пор нам было удобно рассматривать все четыре краевые задачи параллельно. Поэтому накладываемые условия соответствовали самой жесткой из них – задаче NN. Для задачи DD, однако, условия могут быть ослаблены. В частности, вместо условия 1.5 достаточно потребовать лишь (1.15). Теорема 2.1 из [16] об абсолютной непрерывности спектра операторов в полосе S также была доказана в наиболее жестких условиях, отвечающих задаче NN. В [16] осуществлялась периодизация, и изучение всех четырех краевых задач в полосе сводилось к исследованию задачи с периодическими граничными условиями. Затем периодический оператор в $L_2(S)$ раскладывался в прямой интеграл по операторам с периодическими граничными условиями, действующим в $L_2(\Omega_\beta)$ и зависящим от квазиимпульса $k \in \mathbb{R}$ (параметра слоя). Дальнейшее сводилось к оценкам резольвенты оператора в слое при больших мнимых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{C}$. Периодическая задача была хорошо изучена в работах [2, 3, 5, 11–13]. Важным моментом являлось исследование символа свободного оператора, возникающего при разложении периодических функций в ряд Фурье. Задача Дирихле в полосе S может быть рассмотрена аналогично. При этом операторам в $L_2(\Omega_\beta)$ соответствует периодическое граничное условие по ξ_1 и условие Дирихле по ξ_2. Свободному оператору также можно сопоставить символ (формально тот же, что и в периодической задаче), однако, разложение в ряд должно осуществляться по собственным функциям задачи с новыми граничными условиями для оператора $-\Delta$. Возможность переноса соответствующих утверждений из работ [2, 3, 5, 11–13] на рассматриваемый случай требует скрупулезной проверки, хотя ход доказательств в целом остается тем же.

Точная формулировка и доказательство теоремы об абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в периодическом волноводе с условиями Дирихле (лишь при условиях 1.3, (1.15) на волновод) будут приведены в другой статье. Здесь мы ограничимся простым (но показательным с точки зрения условий на волновод) случаем оператора $-\Delta$.

4.2. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство. Через $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначается норма в $\mathfrak{H}$; $\|\cdot\|_{L_2(\Omega_\beta)} =: \|\cdot\|$. Пусть $\mathfrak{G}$ – еще одно гильбертово пространство. Если T – ограниченный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$, то его норма обозначается через $\|T\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}}$; $\|T\|_{L_2(\Omega_\beta)\to L_2(\Omega_\beta)} =: \|T\|$.

Пусть $H^1_{DD}(\Pi)$ – замыкание по $H^1(\Pi)$-норме класса $C_0^\infty(\Pi)$. Через $\widetilde{C}_0^\infty(\mathcal{O}_\beta)$ обозначается множество сужений на $\mathcal{O}_\beta$ γ_α-периодических бесконечно гладких в Π функций, тождественно равных нулю в окрестности границы $\partial\Pi$. Пусть $\widetilde{H}^1_{DD}(\mathcal{O}_\beta)$ – замыкание по $H^1(\mathcal{O}_\beta)$-норме класса $\widetilde{C}_0^\infty(\mathcal{O}_\beta)$; $H^1_{DD}(\mathcal{O}_\beta)$ – множество сужений на $\mathcal{O}_\beta$ функций класса $H^1_{DD}(\Pi)$. Аналогично определяются классы $H^1_{DD}(S)$, $H^1_{DD}(\Omega_\beta)$, $\widetilde{H}^1_{DD}(\Omega_\beta)$.

4.3. Определение оператора и формулировка теоремы. Определим форму

$$\mathfrak{m}_{DD}[u,u] := \int\limits_{\Pi} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}, \quad u \in H^1_{DD}(\Pi). \tag{4.1}$$

Форма $\mathfrak{m}_{DD}$, очевидно, замкнута и положительна. Она порождает самосопряженный в $L_2(\Pi)$ оператор $\mathfrak{M}_{DD}$. Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть волновод* Π *удовлетворяет условиям* 1.3, (1.15). *Пусть форма* $\mathfrak{m}_{DD}$ *определена в* (4.1) *и оператор* $\mathfrak{M}_{DD}$ *порожден в* $L_2(\Pi)$ *этой формой. Тогда спектр оператора* $\mathfrak{M}_{DD}$ *абсолютно непрерывен.*

4.4. Доказательство теоремы 4.1 разобьем на несколько этапов. В силу условия 1.3 и теоремы 1.2 существует *конформное отображение* $\Psi : \Pi \to S$, удовлетворяющее условию (1.13). Таким образом, сейчас мы выбираем матрицу-функцию $b(\mathbf{x}) := \mathbf{1}$. Отметим, прежде всего, что в силу стандартной теоремы вложения, при условии (1.15) *вложение* $\widetilde{H}^1_{DD}(\mathcal{O}_\beta) \subset L_2(\mathcal{O}_\beta)$ *компактно*. Кроме того, сейчас по-прежнему выполнено условие (1.17). Тогда, повторяя с очевидными изменениями рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1.7, получаем, что отображение $u \mapsto u \circ \Psi^{-1}$ переводит $H^1_{DD}(\mathcal{O}_\beta)$ на $H^1_{DD}(\Omega_\beta)$ и для

γ_β-периодической функции ψ (определенной в (1.16)) выполнена оценка (ср. (1.19))

$$\int_{\Omega_\beta} \psi^2 |f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int_{\Omega_\beta} |f|^2 d\boldsymbol{\xi},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad f \in H^1_{DD}(\Omega_\beta). \tag{4.2}$$

Поясним, что хотя прямая ссылка на лемму 1.5 из [13] невозможна, очевидные изменения в доказательстве показывают, что оценка (4.2) эквивалентна аналогичной оценке на классе $\widetilde{H}^1_{DD}(\Omega_\beta)$. Из (4.2), с учетом (1.17), на основании леммы 1.2 из [13] получаем (ср. (1.21))

$$\int_{\Omega_\beta} |f|^2 d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon \int_{\Omega_\beta} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int_{\Omega_\beta} \psi^2 |f|^2 d\boldsymbol{\xi},$$
$$0 < \varepsilon \le 1, \quad f \in H^1_{DD}(\Omega_\beta). \tag{4.3}$$

Отметим также, что (см. (1.18)) при условии (1.15) выполнено включение $\psi \in L_2(\Omega_\beta)$. Используя рассуждения п. 3.6, с учетом (3.3) и конформности отображения Ψ, получаем, что оператор $\mathfrak{M}_{DD}$ унитарно эквивалентен оператору $\mathfrak{M}^\circ_{DD}$, порожденному замкнутой положительной формой

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}^\circ_{DD}[w,w] := \int_S |\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\psi^{-1} w)|^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ \operatorname{Dom} \mathfrak{m}^\circ_{DD} := \{w = \psi u^\circ : \ u^\circ \in H^1_{DD}(S)\}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Таким образом, теорема 4.1 будет доказана, если мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть ψ – γ_β-периодическая функция в S, причем $\psi \in L_2(\Omega_\beta)$, и выполнены условия (1.17), (4.2). Пусть форма $\mathfrak{m}^\circ_{DD}$ в $L_2(S)$ определена в (4.4), и $\mathfrak{M}^\circ_{DD}$ – самосопряженный оператор в $L_2(S)$, порожденный этой формой. Тогда спектр оператора $\mathfrak{M}^\circ_{DD}$ абсолютно непрерывен.*

4.5. Прямой интеграл. Разложение периодического оператора $\mathfrak{M}^\circ_{DD}$ в прямой интеграл строится с помощью *преобразования*

Гельфанда $\mathcal{U}$. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{K} := \int_0^{2\pi/\beta} \oplus L_2(\Omega_\beta)\, dk. \tag{4.5}$$

Отображение $\mathcal{U} : L_2(S) \to \mathcal{K}$ первоначально задается на функциях класса $C_0(\overline{S})$ формулой

$$(\mathcal{U}f)(k, \boldsymbol{\xi}) := (2\pi/\beta)^{-1/2} e^{-ik\xi_1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikn\beta} f(\xi_1 + n\beta, \xi_2).$$

Затем оно продолжается по непрерывности до *унитарного* отображения $L_2(S)$ на $\mathcal{K}$.

В $L_2(\Omega_\beta)$ для каждого $k \in \mathbb{R}$ (k – *квазиимпульс*) рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}^\circ_{DD}(k)[w,w] := \int_{\Omega_\beta} \langle (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} + k\mathbf{e}_1)(\psi^{-1}w), (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} + \overline{k}\mathbf{e}_1)(\psi^{-1}w)\rangle d\boldsymbol{\xi}, \\ \operatorname{Dom} \mathfrak{m}^\circ_{DD}(k) := \{ w = \psi u^\circ : \ u^\circ \in \widetilde{H}^1_{DD}(\Omega_\beta)\}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Легко понять, что форма $\mathfrak{m}^\circ_{DD}(k)$, $k \in \mathbb{R}$, замкнута и положительна. Она порождает самосопряженный в $L_2(\Omega_\beta)$ оператор $\mathfrak{M}^\circ_{DD}(k)$. Стандартные рассуждения (см., например, [4, §2, 5, §2]) показывают, что оператор $\mathfrak{M}^\circ_{DD}$ в прямом интеграле (4.5) действует как оператор умножения на оператор-функцию $\mathfrak{M}^\circ_{DD}(k)$, т.е.

$$\mathcal{U}\mathfrak{M}^\circ_{DD}\mathcal{U}^{-1} = \int_0^{2\pi/\beta} \oplus \mathfrak{M}^\circ_{DD}(k)\, dk.$$

4.6. Комплексификация. Схема Томаса. Схема Томаса связана с распространением форм $\mathfrak{m}^\circ_{DD}(k)$ и операторов $\mathfrak{M}^\circ_{DD}(k)$ на комплексные значения квазиимпульса $k \in \mathbb{C}$. При таком аналитическом продолжении возникают *секториальные формы и m-секториальные операторы*, систематически исследованные в книге Т. Като [7]. Формула (4.6) позволяет аналитически продолжить форму $\mathfrak{m}^\circ_{DD}(k)$ на любые $k \in \mathbb{C}$. Форма $\mathfrak{m}^\circ_{DD}(k)$ замкнута и секториальна. Такая форма порождает *m-секториальный* оператор, который мы по-прежнему обозначаем через $\mathfrak{M}^\circ_{DD}(k)$. Резольвента оператора $\mathfrak{M}^\circ_{DD}(k)$ компактна при всех $k \in \mathbb{C}$, что легко следует из оценок (4.2), (4.3). Операторы $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(k)$ образуют относительно параметра $k \in \mathbb{C}$ *самосопряженное аналитическое семейство типа* (B) *с компактной резольвентой.* Напомним, что семейство типа (B) отвечает определению операторов через секториальные формы с постоянной областью определения (см. [7, §VII.4]). Самосопряженность семейства означает, что $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(\overline{k}) = (\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(k))^*$, $k \in \mathbb{C}$.

Схема Томаса применительно к операторным семействам типа (B) подробно описана в [4]. Эти соображения применимы и к рассматриваемому нами случаю. Именно, доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}$ сводится к проверке соотношения

$$\|(\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(\mu + iy))^{-1}\| \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty$$

для подходящего $\mu \in \mathbb{R}$. Таким образом, *теорема* 4.2 *вытекает из следующего утверждения.*

Теорема 4.3. *Пусть функция* $\psi \in L_2(\Omega_\beta)$ *удовлетворяет условиям* (1.17), (4.2). *Пусть форма* $\mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(k)$, $k \in \mathbb{C}$, *определена в* (4.6) *и m-секториальный оператор* $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(k)$ *порожден в* $L_2(\Omega_\beta)$ *этой формой. Тогда оператор* $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(\pi/\beta + iy)$, $y \in \mathbb{R}$, *обратим и*

$$\lim_{|y| \to \infty} \|(\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(\pi/\beta + iy))^{-1}\| = 0. \tag{4.7}$$

4.7. Предварительные оценки. Положим $\mu := \pi/\beta$, $k := \mu + iy$, $y \in \mathbb{R}$. *Условимся в этом случае писать* $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(y)$ *вместо* $\mathfrak{M}^{\circ}_{DD}(k)$; *аналогичное соглашение принимается для обозначения других операторов и форм.* Доказательство теоремы 4.3 удобно начать со случая $\psi = 1$. Соответствующий оператор будем обозначать через $\mathcal{M}_{DD}(y) := (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} + (\mu + iy)\mathbf{e}_1)^2$. Запишем для $v \in L_2(\Omega_\beta)$ следующие два разложения по собственным функциям оператора $-\Delta$ в Ω_β с периодическим условием по ξ_1 и условием Дирихле либо Неймана по ξ_2:

$$\begin{gathered}
v(\boldsymbol{\xi}) = (\beta/2)^{-1/2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}, n_2 \in \mathbb{N}} \widehat{v}_{\mathbf{n}} e^{i2\mu n_1 \xi_1} \sin(\pi n_2 \xi_2), \\
v(\boldsymbol{\xi}) = (\beta/2)^{-1/2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}, n_2 \in \mathbb{N}} \widetilde{v}_{\mathbf{n}} e^{i2\mu n_1 \xi_1} \cos(\pi n_2 \xi_2) + \\
+ \beta^{-1/2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}, n_2 = 0} \widetilde{v}_{\mathbf{n}} e^{i2\mu n_1 \xi_1}.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Пусть $\mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_c$ – дискретные (унитарные) преобразования $\mathcal{F}_s$: $L_2(\Omega_\beta) \to l_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$, $\mathcal{F}_c$: $L_2(\Omega_\beta) \to l_2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+)$, действующие в соответствии с (4.8) по формулам $\mathcal{F}_s v = \{\widehat{v}_{\mathbf{n}}\}$, $\mathcal{F}_c v = \{\widetilde{v}_{\mathbf{n}}\}$.

Оператор $\mathcal{M}_{DD}(y)$ представляется в виде

$$\mathcal{M}_{DD}(y) = \mathcal{F}_s^*\mathbf{h}(y)\mathcal{F}_s, \tag{4.9}$$

где *символ* $\mathbf{h}(y) = \{h_{\mathbf{n}}(y)\}$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, задан формулой

$$h_{\mathbf{n}}(y) = \mu^2(2n_1+1)^2 + \pi^2 n_2^2 - y^2 + 2iy\mu(2n_1+1). \tag{4.10}$$

Символ (4.10) был подробно изучен в [2, 3, 11]. Справедлива факторизация

$$h_{\mathbf{n}}(y) = q_{\mathbf{n}}^{(+)}(y)q_{\mathbf{n}}^{(-)}(y), \quad q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y) := \mu(2n_1+1) \pm i(\pi n_2 \pm y). \tag{4.11}$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} P_0(y) &:= \mathcal{F}_s^*\{|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}\}\mathcal{F}_s, \\ P(y) &:= \mathcal{F}_s^*\{(\overline{h_{\mathbf{n}}(y)})^{-1}|h_{\mathbf{n}}(y)|^{1/2}\}\mathcal{F}_s. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Тогда

$$R_0(y) := (\mathcal{M}_{DD}(y))^{-1} = P_0(y)(P(y))^*. \tag{4.13}$$

Из (4.9)–(4.12) непосредственно следует оценка (ср. [2, (3.15)])

$$\begin{aligned} &\|P_0(y)\| = \\ &\quad = \|P(y)\| \le \min\{(2\mu|y|)^{-1/2},\ \mu^{-1}\} \leqslant 2\mu^{-1/2}(\mu+|y|)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

При $N \ge 1$ введем следующие характеристические функции переменной $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$:

$$\chi(\mathbf{n}; y, N) := \begin{cases} 1, & |2n_1+1| \le N^{-1}|y| \\ 0, & |2n_1+1| > N^{-1}|y|, \end{cases}$$

$$\widetilde{\chi}(\mathbf{n}; y, N) := 1 - \chi(\mathbf{n}; y, N).$$

Положим $\boldsymbol{\chi}(y, N) := \{\chi(\mathbf{n}; y, N)\}$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Введем следующие ортопроекторы в $L_2(\Omega_\beta)$:

$$\mathcal{X}(y, N) := \mathcal{F}_s^*\boldsymbol{\chi}(y, N)\mathcal{F}_s,$$

$$\widetilde{\mathcal{X}}(y, N) := I - \mathcal{X}(y, N).$$

Как показано в [11, (4.24)] справедлива оценка

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z},n_2\in\mathbb{N}} \chi(\mathbf{n};y,N)|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1} \le CN^{-1}\ln N, \quad N\ge 2\max\{1,\mu\}. \tag{4.15}$$

Очевидно, выполнены соотношения

$$-i\frac{\partial}{\partial\xi_1} = \mathcal{F}_s^*\{2\mu n_1\}\mathcal{F}_s, \tag{4.16}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\xi_2} = (\mathcal{F}_c^*\mathcal{F}_s)\,\mathcal{F}_s^*\{(-i)\pi n_2\}\mathcal{F}_s, \quad \mathbf{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}.$$

Из (4.11), (4.12), (4.16) вытекает оценка (ср. [11, (4.18)])

$$\|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}(y,N)\|_{L_2(\Omega_\beta)\to(L_2(\Omega_\beta))^2} = \tag{4.17}$$

$$=\|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} P(y)\widetilde{\mathcal{X}}(y,N)\|_{L_2(\Omega_\beta)\to(L_2(\Omega_\beta))^2} \le CN^{1/2}, \quad N\ge 1.$$

Следующее утверждение является аналогом предложения 3.4 из [13] (см. также [11, лемма 4.4]).

Лемма 4.4. *Пусть для измеримой вещественной функции* $\psi \in L_2(\Omega_\beta)$ *выполнена оценка* (4.2). *Тогда справедливы соотношения*

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2|P_0(y)u|^2 d\boldsymbol{\xi} \le c(y)\|u\|^2, \quad u\in L_2(\Omega_\beta), \quad y\in\mathbb{R}, \tag{4.18}$$

$$c(y)=c(y;\psi)\to 0 \text{ при } |y|\to\infty. \tag{4.19}$$

Доказательство в целом следует доказательству леммы 4.4 из [11]. Для $u\in L_2(\Omega_\beta)$ запишем

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2|P_0(y)u|^2 d\boldsymbol{\xi} \le 2\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2|P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}(y,N)u|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

$$+2\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2|P_0(y)\mathcal{X}(y,N)u|^2 d\boldsymbol{\xi} =: 2(I_1+I_2). \tag{4.20}$$

Отметим, что $P_0(y)u$, $P_0(y)\mathcal{X}(y,N)u$, $P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}(y,N)u \in \widetilde{H}^1_{DD}(\Omega_\beta)$. Для оценки первого интеграла воспользуемся (4.2), (4.14) и (4.17):

$$I_1 \le \varepsilon\|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} P_0(y)\widetilde{\mathcal{X}}(y,N)u\|^2_{(L_2(\Omega_\beta))^2} + C(\varepsilon,\psi)\|P_0u\|^2$$

$$\leq C(\varepsilon N + C(\varepsilon,\psi)(1+|y|)^{-1})\|u\|^2, \quad N \geq 1. \tag{4.21}$$

Для второго интеграла, с учетом (4.15), имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|\psi\|^2 \max_{\boldsymbol{\xi}\in\overline{\Omega_\beta}} |P_0(y)\mathcal{X}(y,N)u|^2 \\ &\leq C(\psi)\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z},n_2\in\mathbb{N}} \chi(\mathbf{n};y,N)|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1/2}|\widehat{u}_{\mathbf{n}}|\right)^2 \\ &\leq C(\psi)\|u\|^2 \sum_{n_1\in\mathbb{Z},n_2\in\mathbb{N}} \chi(\mathbf{n};y,N)|h_{\mathbf{n}}(y)|^{-1} \\ &\leq \widetilde{C}(\psi)N^{-1}\ln N\|u\|^2, \quad N \geq 2\max\{1,\mu\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Подставляя (4.21), (4.22) в (4.20), получаем, при $N \geq 2\max\{1,\mu\}$,

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |P_0(y)u|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

$$\leq C(\psi)\|u\|^2\left(\varepsilon N + C(\varepsilon,\psi)(1+|y|)^{-1} + N^{-1}\ln N\right). \tag{4.23}$$

Последняя оценка при фиксированных N и ε доказывает (4.18). Чтобы доказать (4.19), зададимся произвольным $\delta > 0$. Выберем N настолько большим, чтобы было выполнено

$$N \geq 2\max\{1,\mu\}, \quad C(\psi)N^{-1}\ln N < \delta/3,$$

и зафиксируем такое N. Затем выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы было

$$C(\psi)N\varepsilon < \delta/3,$$

и зафиксируем такое ε. Тогда для любого достаточно большого $|y|$ выполнено

$$C(\psi)C(\varepsilon,\psi)(1+|y|)^{-1} < \delta/3.$$

Отсюда и из (4.23) следует, что существует $y_0 = y_0(\delta,\psi)$ такое, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} \psi^2 |P_0(y)u|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq \delta\|u\|^2$$

при $|y| \geq y_0$. Это доказывает (4.19). $\bullet$

4.8. Доказательство теоремы 4.3. Теорема 4.3, очевидно, будет доказана, если мы покажем, что для любой функции $0 \neq w \in \operatorname{Dom} \mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(k)$ найдется функция $0 \neq \widehat{w} \in \operatorname{Dom} \mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(k)$ такая, что

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(y)[w, \widehat{w}] \geq c(y)^{-1}\|w\|\|\widehat{w}\|, \quad y \in \mathbb{R}, \\ c(y) = c(y, \psi) \to 0 \text{ при } |y| \to \infty. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Пусть $0 \neq w \in \operatorname{Dom} \mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(k)$ и $u^{\circ} := \psi^{-1} w \in \widetilde{H}^1_{DD}(\Omega_\beta)$. Положим $v^{\circ} := (P_0(y))^{-1} P(y) u^{\circ}$. Тогда $v^{\circ} \in \widetilde{H}^1_{DD}(\Omega_\beta)$ и выполнены тождества

$$\|v^{\circ}\| = \|u^{\circ}\|, \quad \|(P_0(y))^{-1} v^{\circ}\| = \|(P_0(y))^{-1} u^{\circ}\|. \tag{4.25}$$

Определим $\widehat{w}$ соотношением

$$\widehat{w} := \psi v^{\circ}. \tag{4.26}$$

Тогда $0 \neq \widehat{w} \in \operatorname{Dom} \mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(k)$. Далее, с учетом (4.6), (4.13), имеем

$$\mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(y)[w, \widehat{w}] = \int_{\Omega_\beta} \langle (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} + k\mathbf{e}_1) u^{\circ}, (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} + \overline{k}\mathbf{e}_1) v^{\circ} \rangle \, d\boldsymbol{\xi} = \|(P_0(y))^{-1} u^{\circ}\|^2.$$

Отсюда, используя (4.25), получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{\circ}_{DD}(y)[w, \widehat{w}] &= \|(P_0(y))^{-1} u^{\circ}\| \|(P_0(y))^{-1} v^{\circ}\| \\ &= \|(P_0(y))^{-1} \psi^{-1} w\| \|(P_0(y))^{-1} \psi^{-1} \widehat{w}\|. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Из (4.18), (4.19), (4.27) следует оценка (4.24), где $\widehat{w}$ определено в (4.26). Таким образом, теорема 4.3, а тогда и теоремы 4.2 и 4.1, доказаны.

Литература

1. L. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics.* — Annals of Math. **72** (1960), No. 2, 385–404.
2. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен.* — Алгебра и Анализ **9** (1997), вып. 1, 32–48.
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом.* — Алгебра и Анализ **10** (1998), вып. 4, 1–36.
4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности.* — Алгебра и Анализ **11** (1999), вып. 2, 1–40.

5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых.* — Алгебра и Анализ **12** (2000), вып. 6, 140–177.
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* ГИТТЛ, М. (1952).
7. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М., Мир (1972).
8. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Изд-во Ленингр. ун-та (1985).
9. A. Morame, *Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electromagnetic potential.* — J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 7593–7601.
10. M. Z. Solomyak, *Spectral problems related to the critical exponent in the Sobolev embedding theorem.* — Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), 53–75.
11. Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с электрическим потенциалом типа производной от меры.* Зап. научн. семин. ПОМИ **271** (2000), 276–312.
12. Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом.* — Алгебра и Анализ **13** (2001), вып. 4, 196–228.
13. Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом.* — Труды СПб мат. об-ва **9** (2001), 199–233.
14. E. Shargorodsky and A. V. Sobolev, *Quasi-conformal mappings and periodic spectral problems.* — University of Sussex at Brighton, Preprint no. 2001-07 (2001).
15. A. V. Sobolev and J. Walthoe, *Absolute continuity in periodic waveguides.* — University of Sussex at Brighton, Preprint 2000-19 (2000).
16. Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра магнитного оператора Шредингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе.* — Алгебра и Анализ **14** (2002), вып. 2, 159–206.

Shterenberg R. G. Schrödinger operator in a periodic waveguide on the plane and quasi-conformal mappings.

A magneric Schrödinger operator with variable metric in a two-dimensional simply connected periodic waveguide is considered. All coefficients are assumed to be periodic along the waveguide. We investigate Dirichlet and Neumann boundary problems as well as boundary problem of the third type. Under wide conditions on the boundary of the waveguide providing band structure of the spectrum, we prove the absolute continuity of the spectrum.

С.-Петербургский
государственный
университет
e-mail:roman@RS3759.spb.edu

Поступило 10 апреля 2002 г.