Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

А. В. Зуров

ЭФФЕКТЫ В ДВУХСКОРОСТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, СВЯЗАННЫЕ С СОВПАДЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ НА ИНТЕРВАЛЕ

0. Введение

В работе рассматривается двухскоростная динамическая система вида

$$\begin{aligned}&\rho u_{tt} - u_{xx} + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T;\\ &u|_{t<\tau_*(x)} = 0;\\ &u|_{x=0} = f,\end{aligned}$$

в которой $\rho = \rho(x)$, $A = A(x)$ и $B = B(x)$ – гладкие 2×2 – матрицы-функции; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, плотности $\rho_\alpha > 0$; $A^\alpha_\alpha = 0\,(\alpha = 1, 2)$; $f = \begin{pmatrix} f^1(t)\\ f^2(t)\end{pmatrix}$ – граничное управление; $u = \begin{pmatrix} u^1(x,t)\\ u^2(x,t)\end{pmatrix}$ – решение.

Работа дополняет результаты, полученные в [1] для систем со слабой связью ($A = 0$).

Исследуются главные особенности матричного фундаментального решения, столбцы которого, суть решения, отвечающие управлениям $\begin{pmatrix}\theta\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\ \theta\end{pmatrix}$ ($\theta = \theta(t)$ – тета-функция Хевисайда). Мы показываем, что в случае, если плотности не совпадают или совпадают в конечном числе точек, разрывы имеют только диагональные компоненты фундаментального решения.

Присутствие интервалов, на которых $\rho_1 = \rho_2$, приводит к появлению разрывов у недиагональных компонент. Этот эффект интерпретируется как переход главной особенности из канала в канал в результате их более сильного взаимодействия на таком интервале.

Автор благодарит М. И. Белишева за руководство работой и помощь, оказанную при подготовке этой статьи.

1. Двухскоростная динамическая система

1.1. Эйконалы, характеристики. Пусть на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$

заданы (вещественные) гладкие[1] 2×2 – матрицы-функции $\rho = \rho(x)$, $A = A(x)$ и $B = B(x)$, причем:
(i) матрица ρ диагональна и положительно определена : $\rho = \{\rho_\alpha(x)\delta^\alpha_\beta\}_{\alpha,\ \beta=1,2}$ (δ^α_β – символ Кронекера), $\rho_\alpha(x) > 0$, $\rho_1(0) < \rho_2(0)$;
(ii) матрица A антидиагональна: $A^\alpha_\alpha(x) = 0$, $\alpha = 1, 2$.

Функции ρ_α будем называть *плотностями*, функции $c_\alpha := \rho_\alpha^{-1/2}$ – *скоростями*.

Функции $\tau_\alpha(x) := \int_0^x \rho_\alpha^{1/2}(\xi)\, d\xi$ суть *эйконалы*; функцию

$$\tau_*(x) := \int\limits_0^x \min[\rho_1^{1/2}(\xi), \rho_2^{1/2}(\xi)]\ d\xi,$$

назовем *квазиэйконалом*.

На плоскости переменных x, t в полосе $0 \leqslant x \leqslant l$ эйконалы определяют семейства *характеристик* $t \pm \tau_\alpha(x) = \mathrm{const}$; линии $t - \tau_*(x) = \mathrm{const}$ назовем *квазихарактеристиками*.

Введем обозначение $T := \tau_*(l)$.

1.2. Двухскоростная динамическая система. Рассмотрим систему

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T; \tag{1}$$

$$u|_{t<\tau_*(x)} = 0; \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{3}$$

в которой $f = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^2$-значная функция (*граничное управление*); пусть $u = u^f(x, t)$ – решение, являющееся $\mathbb{R}^2$-значной функцией от x, t.

Наряду с системой (1)-(3) рассмотрим матричную задачу

$$\rho U_{tt} - U_{xx} + AU_x + BU = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T; \tag{4}$$

$$U|_{t<\tau_*(x)} = 0; \tag{5}$$

$$U|_{x=0} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\theta = \theta(t)$ – тета-функция Хевисайда; матрица-функция $U = U(x, t)$ называется *фундаментальным решением*. Строгое определение фундаментального решения как обобщенного решения задачи (4)-(6) будет дано ниже.

[1] всюду в работе “гладкий” означает C^∞-гладкий.

Цель работы – исследование главных особенностей фундаментального решения; мы проведем его по следующему плану:

- задача (1)-(3) сводится к интегральному уравнению; устанавливается его разрешимость;
- фундаментальное решение U определяется как решение интегрального уравнения; особенности U извлекаются из анализа итераций интегрального уравнения.

2. Интегральное уравнение

2.1. Скалярное интегральное уравнение.
Пусть на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ задана гладкая вещественная функция $\rho = \rho(x) > 0$. Эйконал $\tau(x) := \int_0^x \rho^{1/2}(\xi)\, d\xi$ определяет семейство характеристик $t \pm \tau(x) = \mathrm{const}$; через $x(\tau)$ обозначим функцию, обратную эйконалу $\tau(x)$. Введем обозначение $T = \tau(l)$.

Рассмотрим вспомогательную скалярную задачу для волнового уравнения

$$\rho u_{tt} - u_{xx} = h, \quad 0 < x < l, \; 0 < t < T; \tag{7}$$

$$u|_{t<\tau(x)} = 0; \tag{8}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{9}$$

с правой частью $h = h(x,t)$ и управлением $f = f(t)$. Пусть правая часть в (7) локализована выше характеристики: $h(x,t) = 0$ при $t < \tau(x)$.

Обозначим $\varrho(\tau) := \rho(x(\tau))$ и введем новую функцию $\mathrm{v}(\tau,t) := \varrho^{-1/4}(0)\varrho^{1/4}(\tau)u(x(\tau),t)$; как нетрудно показать она удовлетворяет задаче

$$\mathrm{v}_{tt} - \mathrm{v}_{\tau\tau} = \mathrm{h}, \quad 0 < \tau < T, \; 0 < t < T; \tag{10}$$

$$\mathrm{v}|_{t<\tau} = 0; \tag{11}$$

$$\mathrm{v}|_{\tau=0} = f, \tag{12}$$

где правая часть уравнения (10) имеет вид

$$\begin{gathered} \mathrm{h}(\tau,t) := \\ h(x(\tau),t)\varrho^{-1/4}(0)\,\varrho^{-3/4}(\tau) + \mathrm{v}(\tau,t)\varrho^{-1/4}(\tau)(\varrho^{1/2}(\varrho^{-1/4})_\tau)_\tau(\tau). \end{gathered} \tag{13}$$

Введем функцию $\mathrm{w}(\tau,t) := \mathrm{v}(\tau,t) - f(t-\tau)$, у которой второе слагаемое понимается с учетом соглашения:
все зависящие от времени функции доопределены нулем при $t < 0$.

Функция $\mathrm{w} = \mathrm{w}(\tau, t)$ является решением задачи:

$$\mathrm{w}_{tt} - \mathrm{w}_{\tau\tau} = \mathrm{h}, \quad 0 < \tau < T,\ 0 < t < T; \tag{14}$$

$$\mathrm{w}|_{t<\tau} = 0; \tag{15}$$

$$\mathrm{w}|_{\tau=0} = 0, \tag{16}$$

что позволяет применить формулу Д'Аламбера:

$$\mathrm{w}(\tau, t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\tilde{K}(\tau,t)} \mathrm{h}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{17}$$

где область интегрирования $\tilde{K}(\tau, t) := \{(\xi, \eta) |\, 0 \leqslant \xi \leqslant T;\ 0 \leqslant \eta \leqslant T;\ \eta + \xi \leqslant t + \tau;\ \eta - \xi \leqslant t - \tau;\ \eta + \xi \geqslant t - \tau\}$ (см. рис. 1).

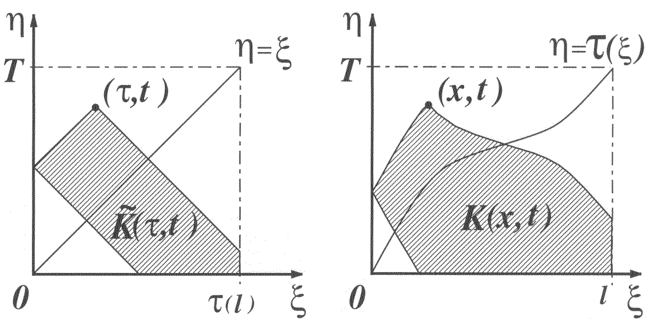

Рис. 1.

Вернемся к исходной задаче (7)–(9); подставляя (13) в (17) нетрудно получить:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \left(\frac{\rho(0)}{\rho(x)}\right)^{1/4} f(t - \tau(x)) + \\ + \frac{1}{2\rho^{1/4}(x)} \iint\limits_{K(x,t)} \frac{h(\xi,\eta)}{\rho^{1/4}(\xi)} + u(\xi,\eta) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\rho^{1/4}(\xi)}\right)\, d\xi d\eta, \end{gathered} \tag{18}$$

где область интегрирования $K(x, t) := \{(\xi, \eta) |\, 0 \leqslant \xi \leqslant l;\ 0 \leqslant \eta \leqslant T;\ \eta + \tau(\xi) \leqslant t + \tau(x);\ \eta - \tau(\xi) \leqslant t - \tau(x);\ \eta + \tau(\xi) \geqslant t - \tau(x)\}$ (см. рис. 1).

Рассмотрим задачу

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + a u_x + b u = 0, \quad 0 < x < l, \ 0 < t < T; \tag{19}$$

$$u|_{t<\tau(x)} = 0; \tag{20}$$

$$u|_{x=0} = f, \tag{21}$$

где $a = a(x)$ и $b = b(x)$ определенные на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ гладкие функции. В уравнении (19) перенесем слагаемые $au_x + bu$ в правую часть. В этом случае, после интегрирования по частям, уравнение (18) преобразуется к виду:

$$u(x,t) - (\mathcal{M}u)(x,t) = \left(\frac{\rho(0)}{\rho(x)}\right)^{1/4} f(t - \tau(x)), \tag{22}$$

где $\mathcal{M}$ – интегральный оператор вида

$$\mathcal{M} := \partial M + M,$$

$$(\partial M u)(x,t) = \frac{1}{2\rho^{1/4}(x)} \int\limits_{\partial K(x,t)} \frac{a}{\rho^{1/4}}\, u\, d\eta,$$

$$(Mu)(x,t) =$$

$$\frac{1}{2\rho^{1/4}(x)} \iint\limits_{K(x,t)} \left[\frac{b}{\rho^{1/4}} + \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\rho^{1/4}}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{a}{\rho^{1/4}}\right)\right] u\ d\xi d\eta,$$

граница $\partial K(x,t)$ обходится в положительном направлении.

Задача (19)–(21) равносильна уравнению (22) в следующем смысле: пусть $f \in \mathcal{C}^2([0,T])$, $f(0) = f'(0) = 0$, тогда функция $u = u^f \in \mathcal{C}^2([0,l] \times [0,T])$ является классическим решением задачи (19)–(21) в том и только в том случае, если она удовлетворяет уравнению (22).

2.2. Области, подобласти, пространства. Вновь обратимся к системе (1)–(3). Точки $x = x_* > 0$, в которых $\rho_1(x_*) = \rho_2(x_*)$, мы будем называть *резонансными*. Интервалы, на которых плотности совпадают, мы будем называть *резонансными интервалами*.

Дополнительно предположим, что на отрезке $0 < x \leqslant l$ имеется лишь конечное число резонансных точек и резонансных интервалов.

Деревом характеристик $\mathcal{T}$ назовем линейный граф на плоскости (x,t) с вершиной в точке $(0,0)$ (см. рис. 2), такой, что:

(i) ветви дерева суть участки характеристик $t-\tau_\alpha(x)=\mathrm{const}, \alpha=1,2$;
(ii) из вершины $(0,0)$ исходят две ветви $t=\tau_\alpha(x), \alpha=1,2$;
(iii) ветвление дерева происходит над резонансными точками и над правыми концами резонансных интервалов (и только над ними) по правилу: каждая ветвь, входящая в точку ветвления слева, раздваивается, – из точки ветвления вправо выходят две характеристики $t-\tau_1(x)=\mathrm{const}$ и $t-\tau_2(x)=\mathrm{const}$.

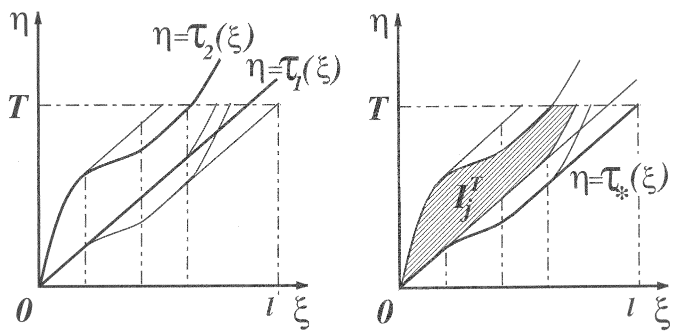

Рис. 2.

Напомним, что мы положили $T=\tau_*(l)$; в прямоугольнике $0<x<l$, $0<t<T$ рассмотрим множество точек, лежащих выше квазихарактеристики $t=\tau_*(x)$

$$\Pi^T := \{(x,t)\,|\,0<x<l,\ 0<t<T,\ \tau_*(x)<t\},$$

и рассмотрим его часть, лежащую ниже прямой $t=\eta$, $0<\eta\leqslant T$

$$\Pi^\eta := \{(x,t)\in\Pi^T\ |\ 0<t<\eta\}.$$

Дерево характеристик $\mathcal{T}$ разбивает множество Π^η на связные компоненты:

$$\Pi^\eta\setminus\mathcal{T}=\bigcup_{j=1}^{p}\mathrm{I}_j^\eta,$$

число которых $p=p(\eta)$ конечно в силу предположения о том, что на отрезке $0<x\leqslant l$ имеется лишь конечное число резонансных точек и резонансных интервалов.

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество $\mathbb{R}^2$–значных функций, определенных на $\Pi^T \setminus \mathcal{T}$ и непрерывных в каждой из компонент I_j^T.

Снабдим $\mathcal{D}$ семейством полунорм

$$\| u \|_\eta := \max_{\alpha=1,2} \max_{j=1,..,p(\eta)} \sup_{(x,t)\in \mathrm{I}_j^\eta} |u^\alpha(x,t)|, \; 0<\eta\leqslant T.$$

Отметим, что $\|\cdot\|_T$ есть норма, а $\mathcal{D}$ – банахово пространство относительно этой нормы.

Отнесем $u \in \mathcal{D}$ к классу $\mathcal{D}_0$, если существует функция $\bar{u} \in \mathcal{C}(\overline{\Pi^T})$, $\bar{u}(x,\tau_*(x)) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, такая, что $\bar{u}|_{\mathrm{I}_j^T} = u$. Как нетрудно показать, $\mathcal{D}_0$ есть подпространство $\mathcal{D}$.

2.3. Интегральное уравнение для двухскоростной системы. Вернемся к задаче (1)–(3). Обозначим

$$\bar{\alpha} := \begin{cases} 2, & \alpha = 1, \\ 1, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Записывая уравнение (1) в виде:

$$\rho_\alpha u_{tt}^\alpha - u_{xx}^\alpha = -A_{\bar{\alpha}}^\alpha u_x^{\bar{\alpha}} - \sum_{\beta=1,2} B_\beta^\alpha u^\beta \quad (\alpha = 1,2),$$

и применяя формулу Д'Аламбера (см. п.2.1) к каждой компоненте решения $u = \binom{u^1}{u^2}$, нетрудно свести систему (1)–(3) к интегральному уравнению

$$u - \mathcal{M}u = \tilde{f}, \tag{23}$$

с правой частью

$$\tilde{f}(x,t) := \begin{pmatrix} \mu_1(x) f^1(t-\tau_1(x)) \\ \mu_2(x) f^2(t-\tau_2(x)) \end{pmatrix}, \; \mu_\alpha(x) := \left(\frac{\rho_\alpha(0)}{\rho_\alpha(x)}\right)^{1/4}$$

и матричным интегральным оператором следующего вида

$$\mathcal{M}u = \begin{pmatrix} (\mathcal{M}u)^1 \\ (\mathcal{M}u)^2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\mathcal{M} := \partial M + M, \tag{25}$$

$$(\partial M u)^\alpha(x,t) := \frac{1}{2\rho_\alpha^{1/4}(x)} \int\limits_{\partial K_\alpha(x,t)} \frac{A_{\bar{\alpha}}^\alpha}{\rho_\alpha^{1/4}} u^{\bar{\alpha}} \, d\eta, \tag{26}$$

$$(Mu)^\alpha(x,t) := \frac{1}{2\rho_\alpha^{1/4}(x)} \iint\limits_{K_\alpha(x,t)} \sum_{\beta=1,2} M_\beta^\alpha u^\beta \; d\xi d\eta, \tag{27}$$

$$M_\alpha^\alpha := \frac{B_\alpha^\alpha}{\rho_\alpha^{1/4}} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\rho^{1/4}}\right);\; M_{\bar\alpha}^\alpha := \frac{B_{\bar\alpha}^\alpha}{\rho_\alpha^{1/4}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{A_{\bar\alpha}^\alpha}{\rho_\alpha^{1/4}}\right), \tag{28}$$

где область интегрирования в (27) есть $K_\alpha(x,t) := \{(\xi,\eta) \in \Pi^T \,|\, \eta + \tau_\alpha(\xi) \leqslant t + \tau_\alpha(x);\ \eta - \tau_\alpha(\xi) \leqslant t - \tau_\alpha(x);\ \eta + \tau_\alpha(\xi) \geqslant t - \tau_\alpha(x)\}$, а контур $\partial K_\alpha(x,t)$ в (26) есть участок границы (с положительной ориентацией) множества $\{(\xi,\eta) |\, 0 \leqslant \xi \leqslant l;\ 0 \leqslant \eta \leqslant T;\ \eta + \tau_\alpha(\xi) \leqslant t + \tau_\alpha(x);\ \eta - \tau_\alpha(\xi) \leqslant t - \tau_\alpha(x);\ \eta + \tau_\alpha(\xi) \geqslant t - \tau_\alpha(x)\}$, лежащий выше квазихарактеристики $\eta = \tau_*(\xi)$.

2.4. Операторы. Опишем свойства операторов (24)–(28).

Лемма 1. *В пространстве $\mathcal{D}$ оператор ∂M действует непрерывно и выполняется оценка*

$$\| \partial M u \|_t \leqslant C \int\limits_0^t \| u \|_\eta \; d\eta. \tag{29}$$

Доказательство. Покажем, что оператор ∂M корректно определен в $\mathcal{D}$.

Пусть точка (x,t) лежит в компоненте I_j^T. В этом случае контур $\partial K_\alpha(x,t)$ в определении (26) может иметь только трансверсальные пересечения с деревом $\mathcal{T}$. В самом деле, контур $\partial K_\alpha(x,t)$ образован участками характеристик $\eta + \tau_\alpha(\xi) = t + \tau_\alpha(x)$, $\eta + \tau_\alpha(\xi) = t - \tau_\alpha(x)$ и $\eta - \tau_\alpha(\xi) = t - \tau_\alpha(x)$. Из определения $\mathcal{T}$ (см. п.2.2) легко видеть, что первые две характеристики всегда пересекаются с $\mathcal{T}$ трансверсально. Допустим, что характеристика $\eta - \tau_\alpha(\xi) = t - \tau_\alpha(x)$ имеет в некоторой точке $(\xi_*, \tau_\alpha(\xi_*) + t - \tau_\alpha(x)) \in \mathcal{T}$, $\xi_* < x$, общий касательный вектор с некоторой ветвью $\mathcal{T}$: $\rho_1(\xi_*) = \rho_2(\xi_*)$. Тогда из определения $\mathcal{T}$ участок характеристики $\eta - \tau_\alpha(\xi) = t - \tau_\alpha(x)$, лежащий правее точки $(\xi_*, \tau_\alpha(\xi_*) + t - \tau_\alpha(x))$, является ветвью $\mathcal{T}$, что противоречит исходному предположению $(x,t) \in \mathrm{I}_j^T$.

Интеграл в (26) корректно определен на функциях из $\mathcal{D}$, поскольку подынтегральная функция определена и непрерывна всюду на $\partial K_\alpha(x,t)$ за исключением конечного числа точек пересечения контура и дерева характеристик $\mathcal{T}$.

Оценивая в (26) гладкие функции $A_{\bar\alpha}^{\alpha}(x)$ и $\rho_\alpha^{-1/4}(x)$ максимумом их абсолютного значения на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$, и пользуясь тем, что $|u^{\bar\alpha}(\xi,\eta)| \leqslant \| u \|_\eta$, несложно получить оценку

$$|(\partial M u)^\alpha(x,t)| \leqslant \tilde{C} \int\limits_0^t \| u \|_\eta \; d\eta,$$

которая легко приводит к (29). Лемма доказана.

Лемма 2. $\mathcal{D}_0$ – *инвариантное подпространство оператора* ∂M*:* $\partial M \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0$.

Доказательство. При $u \in \mathcal{D}_0$ найдется функция $\bar u \in \mathcal{C}(\overline{\Pi^T})$, $\bar u(x, \tau_*(x)) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, такая, что $\bar u|_{\mathrm{I}_j^T} = u$. Из определения (26) несложно видеть, что оператор ∂M действует непрерывно в $\mathcal{C}(\overline{\Pi^T})$, и при этом $(\partial M \bar u)|_{\mathrm{I}_j^T} = \partial M u$, поскольку, подынтегральные функции в левой и правой части равенства различаются на контурах $\partial K_\alpha(x,t)\,(\alpha = 1,2)$ лишь в конечном числе точек.

Выполнено равенство $(\partial M \bar u)^\alpha(x, \tau_*(x)) = 0$, поскольку из (26) компонента $(\partial M \bar u)^\alpha(x, \tau_*(x))$ выражается через интеграл по контуру $\partial K_\alpha(x, \tau_*(x))$, совпадающему с участком квазихарактеристики $t = \tau_*(x)$, где функция $\bar u(x,t)$ обращается в нуль.

Мы показали, что выполнено соотношение $(\partial M u)^\alpha \in D_0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Оператор* $\mathbf{1} - \partial M$ *ограниченно обратим в* $\mathcal{D}_0$.

Доказательство. При любом $g \in \mathcal{D}_0$, итерируя оценку (29), получаем:

$$\| (\partial M)^n g \|_T \leqslant C^n \int\limits_0^T d\eta_1 \int\limits_0^{\eta_1} d\eta_2 \ldots \int\limits_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \, \| g \|_{\eta_n} \leqslant \frac{T^n C^n}{n!} \| g \|_T,$$

поэтому для уравнения $u - \partial M u = g$ сходится метод последовательных приближений в $\mathcal{D}_0$ в силу леммы 2. Следовательно, оператор $\mathbf{1} - \partial M$ ограниченно обратим в $\mathcal{D}_0$. Лемма доказана.

Прием построения вольтерровских оценок с использованием монотонного семейства полунорм заимствован из работы [2].

Лемма 4. *Оператор M действует непрерывно из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}_0$ и выполнена оценка*

$$\| Mu \|_t \leqslant C \int\limits_0^t \| u \|_\eta \; d\eta. \tag{30}$$

Доказательство. Из определения (27), имеем

$$|(Mu)^\alpha(x,t)| = \frac{1}{2\rho_\alpha^{1/4}(x)} \left| \int\limits_0^t d\eta \int\limits_{a(\eta)}^{b(\eta)} d\xi \sum_{\beta=1,2} M_\beta^\alpha u^\beta \right|,$$

где $a(\eta), b(\eta)$ суть левый и правый концы концы проекции на ось ξ горизонтального сечения области $K_\alpha(x,t)$ на уровне η. Откуда, оценивая гладкие функции $M_\beta^\alpha(x)$ и $\rho_\alpha^{-1/4}(x)$ максимумом их абсолютного значения на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$, и пользуясь тем, что $\left| u^\beta(\xi,\eta) \right| \leqslant \| u \|_\eta$, имеем

$$|(Mu)^\alpha(x,t)| \leqslant C \int\limits_0^t \| u \|_\eta \; d\eta,$$

что легко приводит к (30). Лемма доказана.

Объединяя результаты леммы 1 и леммы 4, получим

Лемма 5. *В пространстве $\mathcal{D}$ для оператора $\mathcal{M}$ выполнена оценка*

$$\| \mathcal{M}u \|_t \leqslant C \int\limits_0^t \| u \|_\eta \; d\eta. \tag{31}$$

Теорема 1. *При любом $g \in \mathcal{D}$ уравнение*

$$u - \mathcal{M}u = g \tag{32}$$

однозначно разрешимо в $\mathcal{D}$.

Доказательство. Итерируя оценку (31), получаем:

$$\| (\mathcal{M})^n g \|_T \leqslant C^n \int\limits_0^T d\eta_1 \int\limits_0^{\eta_1} d\eta_2 \ldots \int\limits_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \| g \|_{\eta_n} \leqslant \frac{T^n C^n}{n!} \| g \|_T,$$

поэтому для уравнения $u - \mathcal{M}u = g$ сходится метод последовательных приближений при любом $g \in \mathcal{D}$. Следовательно, оператор $\mathbf{1} - \mathcal{M}$ ограниченно обратим в $\mathcal{D}$. Теорема доказана.

2.5. Фундаментальное решение. Легко усматривается, что при управлениях $f_1 := \binom{\theta}{0}$ и $f_2 := \binom{0}{\theta}$ правые части уравнения (23) $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ суть элементы пространства $\mathcal{D}$. Пусть u_1 и u_2 – решения уравнения (23), отвечающие этим правым частям. Из них, как из столбцов, составим матрицу

$$U(x,t) := \{u_1(x,t);\ u_2(x,t)\},\ (x,t) \in \Pi^T,$$

которую и будем называть *фундаментальным решением* системы (4)–(6).

Главные особенности фундаментального решения – предмет нашего исследования.

3. Разрывы фундаментального решения

Здесь мы опишем разрывы фундаментального решения U: как будет показано, разрывы его компонент U_α^β и функций $([\mathbf{1} - \partial M]^{-1}\tilde{f}_\alpha)^\beta$ совпадают.

Лемма 6. *Справедливо соотношение*

$$u_\alpha - [\mathbf{1} - \partial M]^{-1}\tilde{f}_\alpha \in \mathcal{D}_0.$$

Доказательство. Запишем уравнение (23) в виде

$$u_\alpha - [\mathbf{1} - \partial M]^{-1}\tilde{f}_\alpha = [\mathbf{1} - \partial M]^{-1}Mu_\alpha.$$

Пользуясь леммой 4, имеем: $Mu_\alpha \in \mathcal{D}_0$. По лемме 3 оператор $\mathbf{1} - \partial M$ ограниченно обратим $\mathcal{D}_0$, откуда правая часть равенства является элементом $\mathcal{D}_0$. Лемма доказана.

3.1. Изолированные резонансные точки. Рассмотрим ситуацию, когда на интервале $0 < x < l$ имеется не более конечного числа резонансных точек. Покажем, что в этом случае, разрывы компонент фундаментального решения U_α^β и функций $(\tilde{f}_\alpha)^\beta$ совпадают.

Лемма 7. *Справедливо соотношение*

$$u_\alpha - \tilde{f}_\alpha \in \mathcal{D}_0.$$

Доказательство. Запишем интегральное уравнение (23) в виде

$$[1 - \partial M](u_\alpha - \tilde{f}_\alpha) = (Mu_\alpha + \partial M \tilde{f}_\alpha). \tag{33}$$

По лемме 3 имеем: $Mu_\alpha \in \mathcal{D}_0$. Рассмотрим слагаемое $\partial M \tilde{f}_\alpha$ в правой части (33). Для управлений f_α выполнено $(\tilde{f}_\alpha)^{\bar{\alpha}} = 0$; как следствие, имеем равенство $(\partial M \tilde{f}_\alpha)^\alpha = 0$, легко следующее из определения ∂M (см. (26)). Поскольку функция $(f_\alpha)^\alpha$ равна единице выше характеристики $t = \tau_\alpha(x)$ и аннулируется ниже нее, для компоненты $(\partial M \tilde{f}_\alpha)^{\bar{\alpha}}$ из (26) получаем представление

$$(\partial M \tilde{f}_\alpha)^{\bar{\alpha}}(x,t) = \frac{\rho_\alpha^{1/4}(0)}{2\rho_{\bar{\alpha}}^{1/4}(x)} \int\limits_{L_{\bar{\alpha}}(x,t)} \frac{A_\alpha^{\bar{\alpha}}}{\rho_{\bar{\alpha}}^{1/4}\rho_\alpha^{1/4}}\, d\eta, \tag{34}$$

в котором $L_{\bar{\alpha}}(x,t) := \{(\xi,\eta) \in \partial K_{\bar{\alpha}}(x,t) | \eta \geqslant \tau_\alpha(\xi)\}$, то есть интегрирование ведется по участку контура $\partial K_{\bar{\alpha}}(x,t)$, лежащему выше характеристики $t = \tau_\alpha(x)$. Контур $L_{\bar{\alpha}}(x,t)$ образован участками характеристик $\eta + \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t + \tau_{\bar{\alpha}}(x)$, $\eta + \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t - \tau_{\bar{\alpha}}(x)$ и $\eta - \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t - \tau_{\bar{\alpha}}(x)$. Из представления (34) усматривается, что компонента $(\partial M \tilde{f}_\alpha)^{\bar{\alpha}}(x,t)$ непрерывна на Π^T, если длина каждого из этих участков является непрерывной функцией точки $(x,t) \in \Pi^T$. Покажем, что последнее имеет место.

Нетрудно видеть, что если точка (x,t) лежит выше характеристики $\eta = \tau_{\bar{\alpha}}(\xi)$, то характеристики $\eta + \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t - \tau_{\bar{\alpha}}(x)$ и $\eta = \tau_\alpha(\xi)$ имеют единственное трансверсальное пересечение, и координаты точки пересечения являются непрерывными функциями (x,t). В этом случае, контур $L_{\bar{\alpha}}(x,t)$ содержит участок характеристики $\eta + \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t - \tau_{\bar{\alpha}}(x)$, длина которого стремиться к нулю при выходе точки (x,t) сверху на характеристику $\eta = \tau_{\bar{\alpha}}(\xi)$.

Если точка (x,t) лежит выше $\eta = \tau_\alpha(\xi)$, то контур $L_{\bar{\alpha}}(x,t)$ содержит участок характеристики $\eta + \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t + \tau_{\bar{\alpha}}(x)$. Характеристики $\eta + \tau_{\bar{\alpha}}(\xi) = t + \tau_{\bar{\alpha}}(x)$ и $\eta = \tau_\alpha(\xi)$ имеют единственное трансверсальное пересечение, и координаты точки пересечения зависят от точки (x,t) непрерывно. Длина этого участка контура $L_{\bar{\alpha}}(x,t)$ стремиться к нулю при выходе точки (x,t) сверху на характеристику $\eta = \tau_\alpha(\xi)$.

В силу условий леммы характеристики $\eta - \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t - \tau_{\bar\alpha}(x)$ и $\eta = \tau_\alpha(\xi)$ могут иметь не более конечного числа общих точек, координаты которых зависят от (x,t) непрерывным образом. Если точка (x,t) лежит на квазихарактеристике $(t = \tau_*(x))$, то из определения квазихарактеристики для точек (ξ,η) кривой $\eta - \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t - \tau_{\bar\alpha}(x)$ при $\xi < x$ выполнено одно из условий: либо $\eta < \tau_*(\xi)$; либо $\tau_{\bar\alpha}(\xi) = \tau_*(\xi)$; либо найдется резонансная точка x_*: $0 < x_* < x$ такая, что $\eta = \tau_*(\xi)$ при $\xi \geqslant x_*$ и $\eta < \tau_*(\xi)$ при $0 \leqslant \xi < x_*$. Отсюда получаем, что при $\xi < x$ все точки кривой $\eta - \tau_{\bar\alpha}(\xi) = \tau_*(x) - \tau_{\bar\alpha}(x)$, исключая, может быть, одну точку, лежат ниже характеристики $\eta = \tau_\alpha(\xi)$. Следовательно, при выходе точки (x,t) сверху на квазихарактеристику длина участков контура $L_{\bar\alpha}(x,t)$ лежащих на характеристике $\eta - \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t - \tau_{\bar\alpha}(x)$ стремиться к нулю.

Таким образом, компонента $(\partial M\tilde f_\alpha)^{\bar\alpha}$ является непрерывной функцией на Π^T, и длина контура $L_{\bar\alpha}(x,t)$ стремиться к нулю при выходе точки (x,t) сверху на квазихарактеристику. Следовательно, справедливо включение $\partial M\tilde f_\alpha \in \mathcal{D}_0$.

Мы показали, что правая часть представления (33) является функцией из $\mathcal{D}_0$. По лемме 3 оператор $\mathbf{1} - \partial M$ ограниченно обратим в $\mathcal{D}_0$, откуда из (33) имеем

$$(u_\alpha - \tilde f_\alpha) = [1 - \partial M]^{-1}(Mu_\alpha + \partial M\tilde f_\alpha) \in \mathcal{D}_0.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Справедливо включение* $U_\alpha^{\bar\alpha} \in \mathcal{D}_0$.

3.2. Резонансный интервал. Пусть на промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$, $\tau_*(l) = T$ имеется резонансный интервал $[x_*, l]$:

(i) $\rho_1(x) < \rho_2(x)$ при $0 \leqslant x < x_*$;

(ii) $\rho_1(x) = \rho_2(x)$ при $x_* \leqslant x \leqslant l$.

Введем в рассмотрение область $\Delta_* := \{(x,t) \in \Pi^T \mid\ x_* < x < l\}$. Определим функцию $V_\alpha^\beta = V_\alpha^\beta(x)$ пропорциональную амплитуде скачка компоненты ф.р. $U_\alpha^\beta(x,t)$ на характеристике $t = \tau_\alpha(x)$ следующим правилом:

$$V_\alpha^\beta(x) := \left(\frac{\rho_\beta(x)}{\rho_\alpha(0)}\right)^{1/4} U_\alpha^\beta(x,t)\Big|_{t=\tau_\alpha(x)-0}^{t=\tau_\alpha(x)+0}.$$

На множестве функций, непрерывных на резонансом интервале, определим интегральный оператор $\mathcal{A}_\alpha$:

$$(\mathcal{A}_\alpha v)(x) := \int\limits_{x_*}^{x} \mathcal{A}_\alpha(x,\xi)v(\xi)d\xi,$$

с ядром

$$\mathcal{A}_\alpha(x,\xi) := \frac{1}{4}A_\alpha^{\bar\alpha}(\xi)\int\limits_{\xi}^{x} A_{\bar\alpha}^{\alpha}(\zeta)d\zeta.$$

Лемма 8. *В области Δ_* компоненты фундаментального решения $U_\alpha^\beta(x,t)$ непрерывны всюду вне характеристики $t = \tau_\alpha(x)$. На интервале $x_* \leqslant x \leqslant l$ функции $V_\alpha^\beta(x)$ непрерывны и справедливы представления в виде рядов Неймана*

$$V_\alpha^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_\alpha^k 1,$$

$$V_\alpha^{\bar\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_{\bar\alpha}^k g_\alpha; \quad g_\alpha(x) := -\frac{1}{2}\int\limits_{x_*}^{x} A_\alpha^{\bar\alpha}(\xi)d\xi,$$

сходящихся в $\mathcal{C}([x_*,l])$.

Доказательство. Как было показано в лемме 6, скачки компонент ф.р. $U_\alpha^\beta(x,t)$ совпадают со скачками функций $([\mathbf{1}-\partial M]^{-1}\tilde f_\alpha)^\beta$. Рассмотрим ряд Неймана оператора $[\mathbf{1}-\partial M]^{-1}$. Отметим особенность представления (26) для оператора ∂M: компонента $(\partial M u)^\alpha$ определяется лишь компонентой $u^{\bar\alpha}$. Это приводит к следующему представлению для ряда

$$([\mathbf{1} - \partial M]^{-1}\tilde f_\alpha)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}([\partial M]^{2k}\tilde f_\alpha)^\alpha, \tag{35}$$

$$([\mathbf{1} - \partial M]^{-1}\tilde f_\alpha)^{\bar\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}([\partial M]^{2k+1}\tilde f_\alpha)^{\bar\alpha}. \tag{36}$$

В области Δ_* функции $([\partial M]^{2k}\tilde f_\alpha)^\alpha$ и $([\partial M]^{2k+1}\tilde f_\alpha)^{\bar\alpha}$ имеют скачок на характеристике $t = \tau_\alpha(x)$; в силу наличия резонансного интервала длина контура $L_{\bar\alpha}(x,t) := \{(\xi,\eta) \in \partial K_{\bar\alpha}(x,t) | \eta \geqslant \tau_\alpha(\xi)\}$

меняется скачком при переходе точки (x,t) через характеристику $t = \tau_\alpha(x)$. В самом деле, контур $L_{\bar\alpha}(x,t)$ образован участками характеристик $\eta + \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t + \tau_{\bar\alpha}(x)$, $\eta + \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t - \tau_{\bar\alpha}(x)$ и $\eta - \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t - \tau_{\bar\alpha}(x)$. Первые две характеристики пересекают $\eta = \tau_\alpha(\xi)$ трансверсально. Если точка (x,t) принадлежит характеристике $\eta = \tau_\alpha(\xi)$, то характеристики $\eta - \tau_{\bar\alpha}(\xi) = t - \tau_{\bar\alpha}(x)$ и $\eta = \tau_\alpha(\xi)$ в области Δ_* совпадают, что и приводит к появлению скачка (см.рис. 3).

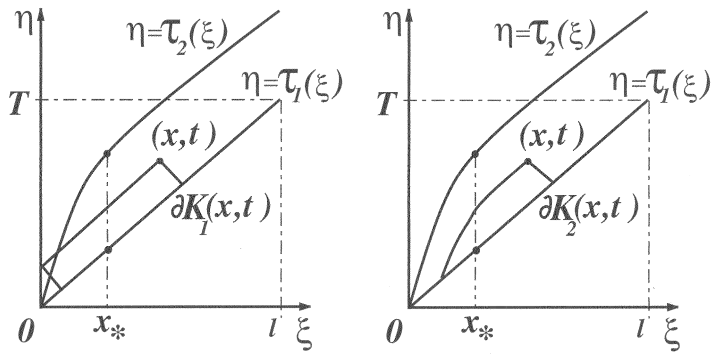

Рис. 3.

В областях $\{(x,t) \in \Delta_* \,|\, t > \tau_\alpha(x)\}$ и $\{(x,t) \in \Delta_* \,|\, t < \tau_\alpha(x)\}$ слагаемые рядов (35)–(36) суть непрерывные функции и допускают непрерывное продолжение на характеристику $t = \tau_\alpha(x)$ сверху и снизу соответственно. Воспользуемся оценкой, полученной в лемме 1

$$\left|(\partial M \tilde{f}_\alpha)^\beta(x,t)\right| \leqslant \tilde{C} \int\limits_0^t \| \, \tilde{f}_\alpha \, \|_\eta \ d\eta \leqslant C \int\limits_0^t d\eta,$$

откуда имеем

$$\left|([\partial M]^k \tilde{f}_\alpha)^\beta(x,t)\right| \leqslant (CT)^k/k!$$

следовательно, ряды (35)–(36) сходятся равномерно на любом компактном подмножестве областей $\{(x,t) \in \Delta_* \,|\, t \geqslant \tau_\alpha(x)\}$ и $\{(x,t) \in \Delta_* \,|\, t \leqslant \tau_\alpha(x)\}$. Следовательно, сумма ряда $[\mathbf{1} - \partial M^T]^{-1} \tilde{f}_\alpha$

непрерывна в области Δ_* всюду вне характеристики $t = \tau_\alpha(x)$, и выполняется равенство

$$([\mathbf{1} - \partial M^T]^{-1}\tilde{f}_\alpha)\Big|_{t=\tau_\alpha(x)-0}^{t=\tau_\alpha(x)+0} = \sum_{k=0}^{\infty}([\partial M^T]^k\tilde{f}_\alpha)|_{t=\tau_\alpha(x)-0}^{t=\tau_\alpha(x)+0}.$$

Переходя к пределу для каждого слагаемого в правой части (35)–(36), получим искомое представление для функций $V_\alpha^\beta(x)$. Лемма доказана.

С динамической точки зрения леммы 7 и 8 описывают следующий эффект: разрыв, введенный в α-ый канал двухскоростной системы, распространяется в нем со скоростью c_α, при этом компонента волны в $\bar{\alpha}$-ом канале при $x < x_*$ остается непрерывной. Резонанс на интервале усиливает взаимодействие между каналами настолько, что приводит к появлению разрыва у компоненты волны в $\bar{\alpha}$-ом канале.

Физически выделенным является случай антисимметричной матрицы A. Введем оператор

$$L := \rho^{-1}[\frac{d^2}{dx^2} - A\frac{d}{dx} - B],$$

связанный с уравнением (1). Если на матричные коэффициенты наложить условия

$$A(x) = -A^\sharp(x), \quad \frac{d}{dx}A(x) = B(x) - B^\sharp(x),$$

(где $\sharp$ – означает транспонирование), то оператор L становится самосопряженным по Лагранжу, т.е. симметричным в пространстве $\mathbb{L}_{2,\rho}((0,l);\mathbb{R}^2)$ на множестве $C_0^\infty((0,l);\mathbb{R}^2)$. В качестве примера системы с самосопряженным оператором L можно привести модель балки Тимошенко [3].

В этом случае, пользуясь соотношением

$$\int_{x_*}^{x} d\xi_1\, a(\xi_1) \int_{x_*}^{\xi_1} d\xi_2\, a(\xi_2) ... \int_{x_*}^{\xi_{n-1}} d\xi_n\, a(\xi_n) = \frac{1}{n!}\left(\int_{x_*}^{x} a(\xi)\, d\xi\right)^n,$$

из леммы 8 легко найти амплитуды скачков фундаментального решения в области Δ_* на характеристике $t = \tau_\alpha(x)$:

$$V_\alpha^\alpha(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\int_{x_*}^{x} A_{\bar{\alpha}}^{\alpha} d\xi\right), \quad V_\alpha^{\bar{\alpha}}(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\int_{x_*}^{x} A_{\bar{\alpha}}^{\alpha} d\xi\right).$$

Таким образом, для систем с антисимметричной матрицей A переход главной особенности из канала в канал на резонансном интервале можно интерпретировать как вращение поляризации волны.

Литература

1. М. И. Белишев, А. В. Зуров, *Эффекты, связанные с совпадением скоростей в двухскоростной динамической системе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 44-65.
2. Л. П. Нижник, *Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнения.* Наукова думка, Киев, 1991.
3. Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов, *Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.* — В кн.: Итоги Науки и техники, серия Механика твердых деформируемых тел. т. 5, М, 1973.

Zurov A. V. The effects in the two-velocities dynamical system due to coincidence of the velocities in an interval.

The paper deals with the system

$$\begin{aligned} &\rho u_{tt} - u_{xx} + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T; \\ &u|_{t<\tau_*(x)} = 0; \\ &u|_{x=0} = f, \end{aligned}$$

where $\rho = \rho(x)$, $A = A(x)$ and $B = B(x)$ are 2×2-matrix functions; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_\alpha > 0$; $A^\alpha_\alpha = 0\,(\alpha = 1,2)$; $f = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix}$ is a boundary control; $u = \begin{pmatrix} u^1(x,t) \\ u^2(x,t) \end{pmatrix}$ is the solution.

The matrix fundamental solution consists of solutions, as columns, corresponding to the controls $\begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$ properly. The principle singularities of the fundamental solution are under investigation.

Only diagonal components of the fundamental solution have the principle singularities in the case of $\rho_1 \neq \rho_2$ or in the presence of several points $x_* > 0:\ \rho_1(x_*) = \rho_2(x_*)$. In the presence of an interval, where $\rho_1 = \rho_2$, an interesting effect occurs: the principle singularities appear in non-diagonal components of the fundamental solution.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 20 ноября 2001 г.