Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

А. П. Качалов

ГАУССОВЫ ПУЧКИ, УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

0. Введение. В рамках теории гиперболических дифференциальных уравнений и систем таких уравнений имеется большое количество прямых и обратных задач, где используется специальный класс решений, так называемые гауссовы пучки. В любой момент времени эти решения сосредоточены около некоторой точки. С течением времени эта точка движется по траектории, которая определяется соответствующей задачей. Многие характеристики этих решений напоминают характеристики частиц. По этой причине такие решения также называются квазифотоны.

Гауссовы пучки – это решения гиперболических уравнений и систем таких уравнений, имеющие лучевую асимптотику вида

$$u(\mathbf{x},t;\epsilon) \asymp \exp\{\epsilon^{-1}\theta(\mathbf{x},t)\} \sum_{l\geq 0} u_l(\mathbf{x},t)(i\epsilon)^l \tag{1}$$

с комплексной фазой θ и амплитудами u_l, $l \geq 0$ и ϵ, являющимся малым параметром задачи, $0 < \epsilon < 1$. Здесь θ – скалярная функция, а u_l могут быть скалярными функциями, векторными полями, дифференциальными l-формами и т.д. в зависимости от рассматриваемой задачи.

Фазовая функция θ есть решение некоторого уравнения Гамильтона–Якоби, удовлетворяющая дополнительным свойствам

$$\Im\theta(\mathbf{x}(t),t) = 0, \tag{2}$$

$$\Im\theta(\mathbf{x},t) > 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ – некоторая траектория.

Эта статья была подготовлена при финансовой поддержке РФФИ гранта 02-01-00260.

Из вида асимптотического разложения (1) и свойств (2) и (3) фазовой функции θ вытекает, что решение $u(\mathbf{x}, t; \epsilon)$ вида (1) сосредоточено при любом t в малой ($O(\epsilon^{1/2+\sigma})$), $0 < \sigma < 1/3$, окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и $O(\epsilon^N)$ при любом $N > 0$ вне этой окрестности. Таким образом, если мы заинтересованы в построении асимптотики решения с точностью до слагаемых, имеющих асимптотический пррядок $(O(\epsilon^N))$ для любого N, нам достаточно построить решение задачи Коши $\theta(\mathbf{x}, t)$ для уравнения Гамильтона–Якоби со свойствами (2) и (3) только в малой окрестности траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ по заданной функции $\theta(\mathbf{x}, 0)$, которая известна в малой окрестности точки $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ и удовлетворяет там свойствам (2) и (3) при $t = 0$.

Процедура построения гауссовых пучков тесно связана с некоторыми геометрическими объектами, такими как метрика, геодезические, уравнение Риккати, тензор кривизны и т.д. Все эти геометрические объекты могут быть определены с помощью гамильтониана соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. В этой статье мы рассмотрим связь между гауссовыми пучками и этими геометрическими объектами для случаев Римановой и Финслеровой геометрий.

1. Гауссовы пучки и уравнение Гамильтона–Якоби.

Прежде всего мы дадим некоторые обозначения, которые будем использовать далее в этой статье. Пусть $\mathcal{M}$ – это C^∞ гладкое многообразие размерности m, $C^\infty(\mathcal{M})$ – пространство комплекснозначных C^∞ гладких скалярных функций на $\mathcal{M}$, $T\mathcal{M}$ и $T^*\mathcal{M}$ – комплексные касательное и кокасательное расслоения на $\mathcal{M}$ и $\Lambda^1(\mathcal{M})$ – пространство комплекснозначных дифференциальных 1-форм на $\mathcal{M}$. Мы также будем использовать обозначения $\widetilde{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\widetilde{T}\mathcal{M}$, $\widetilde{T}^*\mathcal{M}$, $\widetilde{\Lambda}^1(\mathcal{M})$ для соответствующих вещественных пространств.

В дальнейшем мы считаем, что все функции, 1-формы и т.д. зависят от времени t. Пусть функция $\theta : R \to C^\infty(\mathcal{M})$ такова, что $d\theta : R \to \Lambda^1(\mathcal{M})$. Пусть $\hat{h} : \widetilde{\Lambda}^1(\mathcal{M}) \to \widetilde{C}^\infty(\mathcal{M})$ есть гамильтониан рассматриваемой задачи, аналитически зависящий от 1-форм. Рассмотрим дифференциальное уравнение Гамильтона–Якоби для функции θ

$$\partial_t \theta + \hat{h}(d\theta) = 0. \tag{4}$$

Если $\omega_0 \in \widetilde{\Lambda}^1(\mathcal{M})$ есть вещественнозначная 1-форма, $\omega(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда существует окрестность U точки $\mathbf{x}_0$ в $\mathcal{M}$ и окрестность W 1-формы ω_0, симметричная по отношению к отображению $\omega \to \overline{\omega}$ в $\Lambda^1(\mathcal{M})$ такая, что гамильтониан $\hat{h} : W(U) \to C^\infty(U)$ есть гладкое отображение по $\mathbf{x}$ и аналитическое по 1-форме.

Поскольку любая 1-форма ω в любой локальной карте (U, X) имеет вид

$$\omega = p_i dx^i,$$

где $\mathbf{p}$ – некоторое ковариантное векторное поле на $\mathcal{M}$, мы можем отождествить гамильтониан $\hat{h}$ и функцию $h : T^*(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$,

$$\hat{h}(\omega)(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Эту функцию мы тоже будем называть гамильтонианом. В дальнейшем мы предполагаем, что

А) $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ есть вещественнозначная функция для $\mathbf{p} \in \widetilde{T}^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$
и

В) $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ является аналитической по $\mathbf{p}$.

Так как мы интересуемся гауссовыми пучками, то мы будем в этой статье искать комплекснозначное решение θ уравнения Гамильтона–Якоби (4), которое удовлетворяет следующим свойствам в окрестности траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\Im\theta(t)(\mathbf{x}(t)) = 0,$$
$$\Im\theta(t)(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}(t). \tag{5}$$

Более того, поскольку для построения гауссовых пучков нам нужно найти фазовую функцию θ только в малой по ϵ окрестности траектории $\mathbf{x}(t)$, достаточно построить конечное число членов разложения Тейлора для этой функции в точках $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. В локальной системе координат (U, X) вблизи $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ мы можем использовать следующее асимптотическое разложение

$$\theta(t) \asymp \sum_{l \geq 0} \theta_l(\mathbf{y}; t), \tag{6}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}(t)$ и $\theta_l(\mathbf{y}; t)$, $l \geq 0$, однородные многочлены степени l по $\mathbf{y}$ с коэффициентами, зависящими от t. При этом мы используем следующие обозначения

$$\theta_0(\mathbf{y}; t) = \Theta_0(t),$$

$$\theta_1(\mathbf{y};t) = p_i(t)y^i, \tag{7}$$

$$\theta_2(\mathbf{y};t) = \frac{1}{2}H_{ij}(t)y^i y^j.$$

Чтобы удовлетворить условиям (5) достаточно, чтобы

$$\Im\Theta_0(t) = 0,$$

$$\Im\mathbf{p}(t) = 0, \tag{8}$$

и матрица $\Im H(t)$ была положительно определена при любом t,

$$\Im H(t) > 0. \tag{9}$$

На первый взгляд это построение, использующее локальные координаты не имеет инвариантного геометрического смысла. Цель этой статьи показать его геометрический смысл.

Подстановка разложения (6) в уравнение Гамильтона–Якоби приводит к рекуррентной системе дифференциальных уравнений для однородных многочленов θ_l, $l \geq 0$. Особенно важными для нас являются уравнения для θ_0, θ_1 и θ_2, поскольку нам необходимо выполнение условий (8) и (9), а также поскольку члены θ_l, $l > 2$, играют только вспомогательную роль. Уравнения для θ_0 и θ_1 могут быть получены, если мы приравняем нулю однородные многочлены степени 0 и 1 в уравнении Гамильтона–Якоби. В результате мы имеем следующие уравнения

$$\frac{d\Theta_0}{dt} - p_k\frac{dx^k}{dt} + h(\mathbf{x},\mathbf{p}) = 0, \tag{10}$$

$$\left[\frac{dp_k}{dt} - \frac{1}{2}(H_{ik} + H_{ki})\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial p_i}(H_{ik} + H_{ki})\right] y^k = 0. \tag{11}$$

Мнимая часть уравнения (11) и условие (9) приводят к уравнениям

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{12}$$

которые представляют собой первую группу уравнений системы уравнений Гамильтона. Тогда из вещественной части уравнения (11) мы получим вторую группу уравнений системы уравнений Гамильтона.

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^i}, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{13}$$

Используя начальные условия

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{p}(0)) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0),$$

мы можем найти единственное решение $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ задачи Коши для системы уравнений Гамильтона. Наконец, используя эти решения, мы можем из уравнения (10) найти $\Theta_0(t)$,

$$\frac{d\Theta_0}{dt}(t) = p_k(t)\frac{\partial h}{\partial p_k}(\mathbf{x}(t)\mathbf{p}(t)) - h(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)). \tag{14}$$

Уравнения для комплекснозначной матрицы $H(t)$ получаются из уравнения для однородных многочленов степени два в уравнении Гамильтона–Якоби. После элементарных преобразований мы получим, что этим уравнением будет матричное уравнение Риккати

$$\frac{dH}{dt} + (BH + HB^t) + HCH + D = 0. \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B^i_k(t) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^k \partial p_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \\ C^{ik}(t) &= \frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_k}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \\ D_{ik}(t) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \end{aligned} \tag{16}$$

где функции в правой части формул (16) вычисляются на бихарактеристике $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$.

Так как гамильтониан h должен удовлетворять свойству A), мы возьмем начальные данные $\Theta_0(0)$ и $(\mathbf{x}(0), \mathbf{p}(0)) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in T^*\mathcal{M}$ так, что

$$\Im\Theta_0(0) = 0, \quad \Im\mathbf{p}_0 = 0.$$

Тогда однородные многочлены $\theta_0(t)$ и $\theta_1(t)$ существуют и вещественнозначны при любом t.

Используя еще раз свойство A) гамильтониана, мы получим из выражений (16), что матрицы B, C и D удовлетворяют следующим свойствам симметрии

$$B^t = B^*, \quad C^t = C^* = C, \quad D^t = D^* = D. \tag{17}$$

Используя эти свойства симметрии, мы можем доказать следующую лемму

Лемма 1. *Пусть h есть гладкая вещественнозначная функция на $\widetilde{T}^*\mathcal{M}$. Тогда, если начальные условия $H(0) = H_0$ для матричного уравнения Риккати* (15) *удовлетворяют свойствам*

$$H_0^t = H_0, \quad \Im H_0 > 0, \tag{18}$$

то решение $H(t)$ задачи Коши для матричного уравнения Риккати существует и единственно для любого t и имеют место следующие свойства

$$H^t(t) = H(t), \quad \Im H(t) > 0. \tag{19}$$

Доказательство. Доказательство леммы идентично аналогичному доказательству данному в книге [1].

2. Уравнение Гамильтона–Якоби и Риманова геометрия.

В предыдущем параграфе, когда мы изучали уравнение Гамильтона–Якоби в связи с гауссовыми пучками, мы использовали только свойство A) гамильтониана h. Однако в том случае, если мы хотим найти геометрический смысл в этой конструкции, мы неизбежно должны добавить дополнительные ограничения на гамильтониан h, чтобы зафиксировать некоторую геометрию.

Простейший вид гамильтониана, который появляется во многих физически важных задачах, это гамильтониан вида

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{g^{ij}(\mathbf{x})p_i p_j}, \tag{20}$$

где g^{ij} – это положительно определенный симметричный 2-контрвариантный тензор на $\mathcal{M}$. Такая форма гамильтониана появляется, когда мы исследуем волновое уравнение, классические уравнения Максвелла, уравнения изотропной упругости и т.д. Очевидно, что

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0, \tag{21}$$

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{p} = 0, \tag{22}$$

для вещественных $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \widetilde{T}^*\mathcal{M}$. Тензор g может рассматриваться как контрвариантный метрический тензор, соответствующий римановой структуре на $\mathcal{M}$.

Легко видеть, что этот метрический тензор может быть получен из h по формуле

$$g^{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial h^2(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$h(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{p}) = \lambda h(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \widetilde{T}^*M, \quad \lambda > 0. \tag{23}$$

Поскольку гамильтониан h, удовлетворяющий свойству (23), является положительно однородной функцией первого порядка по $\mathbf{p}$, имеем правую часть уравнения (14) равную нулю так, что это уравнение примет вид

$$\frac{d\Theta_0}{dt} = 0.$$

Следовательно, $\Theta_0(t)$ есть константа.

То же свойство однородности гамильтониана приводит к тому, что если функция $\theta(t)$ есть решение уравнения Гамильтона–Якоби со свойствами (2) и (3), тогда функция $a\theta(t) + b$ с постоянными $a, b \in R$, $a > 0$, тоже является решением уравнения Гамильтона–Якоби, которое удовлетворяет свойствам (2) и (3). Поэтому в дальнейшем для гамильтониана, задаваемого формулой (20), мы будем искать решение, которое удовлетворяет дополнительным свойствам

$$\Theta_0 \equiv 0, \tag{24}$$

и

$$< d\theta(t), d\theta(t) >_g (\mathbf{x}(0))\big|_{t=0} = 1. \tag{25}$$

Нормализация (25) соответствует следующей нормализации начальных данных

$$< \mathbf{p}(0), \mathbf{p}(0) >_g = 1 \tag{26}$$

для начального ковектора (импульса) $\mathbf{p}(0)$. Эта нормализация не влияет на траекторию $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ потому, что гамильтониан является положительно однородной функцией первого порядка по $\mathbf{p}$. Более точно, если мы сделаем перенормировку $\mathbf{p}(0) \to \widetilde{\mathbf{p}}(0) = c\mathbf{p}(0)$, где c – некоторая положительная постоянная и сохраним начальные данные для $\mathbf{x}$, $\widetilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$, то единственное решение задачи Коши с начальными данными $(\widetilde{\mathbf{x}}(0), \widetilde{\mathbf{p}}(0))$ для системы уравнений Гамильтона (12), (13) есть

$$(\widetilde{\mathbf{x}}(t), \widetilde{\mathbf{p}}(t)) = (\mathbf{x}(t), c\mathbf{p}(t))$$

при всех $t \in R$. Если мы выберем нормализацию (26) для начального ковектора $\mathbf{p}(0)$, тогда траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ будет геодезической в метрике g, начинающейся в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)$ с единичным вектором скорости $v^i(0) = g^{ij}(\mathbf{x}(0))p_i(0)$ и t – каноническим параметром на этой геодезической. Более того, $\mathbf{p}(t)$ есть единичный ковектор скорости для этой геодезической и $\mathbf{v}(t)$, $v^i(t) = g^{ij}(\mathbf{x}(t))p_j(t)$, есть единичный вектор скорости.

Лемма 2. *Пусть $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ задается формулой (20), где $g^{ij}(\mathbf{x})$ – некоторое 2-контрвариантное симметричное положительно определенное тензорное поле на $\mathcal{M}$, соответствующее римановой метрике g. Тогда любое решение $\widetilde{\theta}$ уравнения Гамильтона–Якоби, которое удовлетворяет свойствам (2) и (3) может быть представлено в виде*

$$\widetilde{\theta}(t) = a\theta(t) + b, \tag{27}$$

где a, $b \in R$, $a > 0$, и $\theta(t)$ имеет разложение Тейлора (6), которое обладает свойствами

(1) *Кривая $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ есть геодезическая метрики g и t есть канонический параметр на этой геодезической.*

(2)

$$\theta(t)(\mathbf{x}(t)) \equiv 0, \tag{28}$$

(3)

$$< d\theta, d\theta >_g (\mathbf{x}(t)) = 1. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь матричную функцию $H(t)$ на геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Легко видеть, что если мы сделаем замену координат $\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}}$,

$$\mathbf{x} = X(\widetilde{\mathbf{x}}), \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{X}(\mathbf{x}),$$

в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}(t)$, то матрица $H(t)$ преобразуется в матрицу $\widetilde{H}(t)$, так что

$$H_{ij}(t) = \widetilde{H}_{kr}(t)\frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}(t))\frac{\partial \widetilde{X}^r}{\partial x^j}(\mathbf{x}(t)) + \frac{\partial^2 \widetilde{X}^r(\mathbf{x}(t))}{\partial x^i \partial x^j}\widetilde{p}_r(t). \tag{30}$$

Эта формула показывает, что $H(t)$ не является тензорным полем на γ и, следовательно, не имеет геометрического смысла. С другой стороны, из этой формулы легко видеть, что $\Im H(t)$ есть 2-ковариантный тензор в точке $\mathbf{x}(t)$. Более того, матричная функция

$$G_{ij}(t) = H_{ij}(t) - \Gamma^r_{ij}(\mathbf{x}(t))p_r(t) \tag{31}$$

есть 2-ковариантное тензорное поле на геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Здесь $\Gamma^r_{ij}(\mathbf{x})$ – символы Кристоффеля римановой геометрии,

$$\Gamma^r_{ij} = \frac{1}{2} g^{rl} \left\{ \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}.$$

Введем $(1,1)$ тензорное поле $\widetilde{G}$ на γ,

$$\widetilde{G}^j_i(t) = g^{jk}(\mathbf{x}(t)) G_{ki}(t). \tag{32}$$

Это тензорное поле может рассматриваться также как оператор на $T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$, $\widetilde{G}(t) : T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M} \to T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$. Используя уравнение Риккати (15) и соотношения (31) и (32), мы можем получить уравнение Риккати для оператора $\widetilde{G}$ на геодезической $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\frac{D\widetilde{G}}{dt} + \widetilde{G}\widetilde{C}\widetilde{G} + \widetilde{R}_\gamma = 0. \tag{33}$$

Здесь $\widetilde{C}$ и $\widetilde{R}_\gamma$ – операторы на $T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$ или $(1,1)$ тензоры на γ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$,

$$\widetilde{C}(t) = I - P_\gamma(t), \quad \widetilde{C}^i_j(t) = \delta^i_j - g_{jk}(\mathbf{x}(t)) v^i(t) v^k(t),$$

где $P_\gamma(t)$ – одномерный проектор и $\mathbf{v}(t)$ – единичный вектор скорости на геодезической γ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$,

$$v^i(t) = g^{ij}(\mathbf{x}(t)) p_j(t).$$

Оператор $\widetilde{R}_\gamma(t)$ может быть получен из оператора кривизны R,

$$R(V,W)Z = (\nabla_V \nabla_W - \nabla_W \nabla_V) Z - \nabla_{[V,W]} Z$$

посредством соотношения

$$\widetilde{R}_{\gamma(t)} \mathbf{w} = R(\mathbf{w}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \quad \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}.$$

Соответствующие компоненты могут быть записаны как

$$[\widetilde{R}_\gamma(t)]^i_j = R^i_{jkl}(\mathbf{x}(t)) v^k(t) v^l(t)$$

и

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^r_{lj} \Gamma^i_{kr} - \Gamma^r_{kj} \Gamma^i_{lr}.$$

Уравнение Риккати (33) дает нам некоторое инвариантное представление для уравнения Риккати (15) через проекторы P_γ и сечение $\widetilde{R}_\gamma$ оператора кривизны.

Лемма 3. *Пусть гамильтониан $h : T^*\mathcal{M} \to C$ задается формулой (20), соответствующей некоторой метрике g. Тогда для любого 2-ковариантного тензора G_0 в точке $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{M}$,*

$$G_0^t = G_0, \quad \Im G_0 > 0, \tag{34}$$

существует единственное 2-ковариантное тензорное поле $G(t)$ в точке $\mathbf{x}(t)$ на геодезической γ, начинающейся в точке $\mathbf{x}(0)$ в направлении $p(0)$, такое, что оператор $\widetilde{G}(t)$, задаваемый формулой (32), решает задачу Коши $\widetilde{G}(0) = \widetilde{G}_0$, $[\widetilde{G}_0]^i_j = g^{ik}(\mathbf{x}(t))[G_0]_{kj}$, для уравнения Риккати (33). Более того, для любого $t \in R$

$$G^t = G, \quad \Im G > 0. \tag{35}$$

Вследствие соотношений (31) аналогичная лемма имеет место также для матричной функции $H(t)$. С помощью лемм 1,2 и 3 в книге [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть гамильтониан $h : T^*\mathcal{M} \to C$ задается формулой* (20). *Для любого решения $\hat{\theta}(t)$ уравнения Гамильтона–Якоби* (4), *которое удовлетворяет свойствам* (2) *и* (3), *справедливы следующие свойства*

(1) *Траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ есть геодезическая γ метрики g с каноническим параметром t на этой геодезической, такая, что $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ есть единичный вектор скорости на этой геодезической.*

(2) *Функция $\hat{\theta}(t) = a\theta(t) + b$, где $a, b \in R$, $a > 0$, и $\theta(t)$ также есть решение уравнения Гамильтона–Якоби.*

(3) *Для любого $t \in R$*

$$\theta(t)(\mathbf{x}(t)) = 0, \quad < d\theta, d\theta >_g (\mathbf{x}(t)) = 1. \tag{36}$$

(4) *Функция $\theta(t)$ имеет разложение Тейлора* (6), (7) *в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ для любого t, где*

$$\mathbf{p}(t) = I_g \mathbf{v}(t), \quad p_i(t) = g_{ij}(\mathbf{x}(t)) v^j(t). \tag{37}$$

(5) *Операторное поле $\widetilde{G}(t)$, которое получается из квадратичной формы $H(t)$ с помощью соотношений* (31), (32), *удовлетворяет уравнению Риккати* (33). *Более того, $G(t)$ удовлетворяет свойствам* (35).

Эта теорема описывает основные геометрические свойства решения уравнения Гамильтона–Якоби, имеющего вид гауссового пучка.

3. Уравнение Гамильтона–Якоби, финслерова геометрия и геодезические.

Если мы строим решения в виде гауссовых пучков для более сложных систем уравнений, таких как система уравнений Максвелла для анизотропной электромагнитной среды или уравнений анизотропной теории упругости, мы придем к гамильтонианам, которые не описываются формулой (20). Тем не менее эти гамильтонианы удовлетворяют свойствам A) и B), описанным ранее. Кроме того эти гамильтонианы обладают следующими свойствами при $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \widetilde{T}\mathcal{M}$

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0, \tag{38}$$

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \mathbf{p} = 0, \tag{39}$$

$$h(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{p}) = \lambda h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad \text{для} \quad \lambda > 0. \tag{40}$$

Заметим, что гамильтониан, описанный с помощью формулы (20) и соответствующий случаю римановой геометрии, удовлетворяет этим свойствам.

Если мы рассмотрим систему уравнений Гамильтона с гамильтонианом, удовлетворяющим свойствам (38)–(40), мы можем видеть, что, вследствие условия однородности (40), траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системы уравнений Гамильтона с этим гамильтонианом не зависит от длины начального импульса $\mathbf{p}_0$. Более того, если мы изменим начальные данные $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \to (\mathbf{x}_0, c\mathbf{p}_0)$, где $c > 0$, то единственное решение системы уравнений Гамильтона изменится с $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ на $(\mathbf{x}(t), c\mathbf{p}(t))$. Используя еще раз свойство однородности (40), мы видим, что, если $\theta(t)$ есть решение уравнения Гамильтона–Якоби, которое удовлетворяет свойствам (2) и (3), тогда то же самое справедливо и для функции $a\theta(t) + b$ при любых постоянных $a, b \in R$, $a > 0$. Тогда, как и в случае римановой геометрии мы в качестве начальных данных для системы уравнений Гамильтона можем брать только нормализованные импульсы. Удобно в качестве таких нормализованных импульсов взять импульсы $\mathbf{p}_0$, так что для $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in \widetilde{T}\mathcal{M}$,

$$h(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) = 1.$$

Эта нормализация обобщает нормализацию (26) для случая гамильтониана (20).

Определим косферический пучок

$$S^*\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in T^*\mathcal{M}, \quad h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 1\}$$

соответствующий этому гамильтониану. Очевидно, что для любого $\mathbf{p} \in \widetilde{T}^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$,

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\widetilde{\mathbf{p}}, \quad \widetilde{\mathbf{p}} \in S^*\mathcal{M}, \quad |\mathbf{p}| = h(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Таким образом, любая траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом, который удовлетворяет свойствам (38)–(40), зависит только от начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ и начального импульса $\mathbf{p}_0$, такого что $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in S^*\mathcal{M}$. Поскольку такие гамильтонианы сохраняются вдоль любого решения системы уравнений Гамильтона мы имеем, что, если $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in S^*\mathcal{M}$, тогда для любого t

$$(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in S^*\mathcal{M}.$$

Это свойство показывает важность поверхностей $S^*\mathcal{M}$ или $S^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$. Если поверхность $S^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \subset T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ выпукла для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ как подмножество $T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$, рассматриваемого как пространство R^m, тогда соответствующая геометрия называется финслеровой геометрией. В этой геометрии поверхность $S^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ называется фигуратриссой задачи. Далее, когда мы будем описывать свойства объектов финслеровой геометрии, мы будем ссылаться на книгу [2].

Легко доказать, что условие выпуклости фигуратриссы совпадает с неравенством

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 h^2(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \xi_i \xi_j \geq c(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \tag{41}$$

для некоторой функции $c(\mathbf{x}) > c_0 > 0$ и любого $\xi \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$.

Если мы сделаем преобразование Лежандра от $\mathbf{p} \to \xi$, тогда функция $\frac{1}{2}h^2(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ преобразуется в функцию $\frac{1}{2}F^2(\mathbf{x}, \xi)$. Как это доказано в [2] функция $F : \widetilde{T}\mathcal{M} \to R$ удовлетворяет следующим свойствам

$$F(\mathbf{x}, \xi) \geq 0,$$

$$F(\mathbf{x}, \xi) = 0 \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ \xi = 0. \tag{42}$$

$$F(\mathbf{x}, \lambda\xi) = \lambda F(\mathbf{x}, \xi), \quad \lambda > 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F^2(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \eta^i \eta^j \geq c(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{m} (\eta^i)^2$$

для некоторой функции $c(\mathbf{x}) > c_0 > 0$ и любого $\eta \in \widetilde{T}^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$. Поверхность

$$F(\mathbf{x},\xi) = 1$$

при фиксированном $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ называется индикатриссой задачи.

Таким же образом, если мы сделаем преобразование Лежандра $\xi \to \mathbf{p}$, тогда $\frac{1}{2}F^2(\mathbf{x},\xi)$ преобразуется в $\frac{1}{2}h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})$. Если функция F удовлетворяет свойствам (42), то гамильтониан h удовлетворяет свойствам (38)–(40), (41). Функция F играет роль функции Лагранжа в механических системах.

Заметим, что если мы рассматриваем анизотропные электромагнитные или упругие среды, свойство выпуклости вообще говоря не удовлетворяется. В этом случае исследование уравнения Гамильтона–Якоби и системы уравнений Гамильтона, данное в параграфе 2, остается справедливым, но в этом случае соответствующая геометрия не является Финслеровой. В этом случае для некоторых направлений $\xi \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$, $F(\mathbf{x},\xi) = 1$ могут существовать несколько траекторий системы уравнений Гамильтона, которые определяются импульсами $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \dots M$, $\mathbf{p}_i \in S^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$, $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_j$ для $i \neq j$.

Для случая римановой геометрии преобразование Лежандра $\mathbf{p} \to \xi$ приводит к преобразованию от $\frac{1}{2}h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})$ к функции $\frac{1}{2}F^2(\mathbf{x},\xi)$ на $T\mathcal{M}$. В локальной карте эта функция имеет следующее представление

$$F(\mathbf{x},\xi) = \sqrt{g_{ij}(\mathbf{x})\xi^i\xi^j}. \tag{43}$$

Очевидно, что в случае римановой геометрии ковариантный и контрвариантный метрические тензоры могут быть найдены из функций $h(\mathbf{x},\mathbf{p})$ и $F(\mathbf{x},\xi)$,

$$g^{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}, \quad g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j}.$$

Таким же образом мы можем построить ковариантный и контрвариантный метрические тензоры в финслеровой геометрии,

$$g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}, \quad g_{ij}(\mathbf{x},\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j}.$$

Заметим, что в этом случае эти тензоры фактически зависят не от точки на $\mathcal{M}$, а от точек на $S^*\mathcal{M}$ и $S\mathcal{M}$ соответственно, где

$$S\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, \xi) \in T\mathcal{M}, \quad F(\mathbf{x}, \xi) = 1\}.$$

Поскольку $h^2(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ и $F^2(\mathbf{x}, \xi)$ есть положительно однородные функции порядка 2 по отношению к $\mathbf{p}$ и ξ соответственно, то

$$g^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) p_i p_j = h^2(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad g_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \xi^i \xi^j = F^2(\mathbf{x}, \xi).$$

Пусть $L_{a,b}$ есть множество всех C^∞ гладких кривых на $\mathcal{M}$, которые связывают точку a с точкой b,

$$L_{a,b} = \{\sigma : I = [0, T] \to \mathcal{M}, \quad \sigma(0) = a \quad \sigma(T) = b\}.$$

Рассматривая F как функцию Лагранжа задачи, введем функционал $\mathcal{F}$ на $L_{a,b}$,

$$\mathcal{F}(\sigma) = \int_0^T F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) dt.$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ есть локальное представление кривой σ. Поскольку $F(\mathbf{x}, \xi)$ – это положительно однородная функция порядка 1 по ξ, функционал $\mathcal{F}$ не зависит от выбора параметра t на кривой и зависит только от кривой σ на $\mathcal{M}$. Вообще говоря этот функционал зависит также от направления на кривой. В самом деле, рассмотрим для данной кривой $\sigma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ кривую $\widetilde{\sigma} = \{\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) : [0, T] \to \mathcal{M},\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(T - t)\}$. Тогда, вообще говоря

$$\mathcal{F}(\sigma) \neq \mathcal{F}(\widetilde{\sigma}).$$

Функционал $\mathcal{F}$ не зависит от направления кривой в том и только том случае, если

$$F(\mathbf{x}, \xi) = F(\mathbf{x}, -\xi), \quad \text{или} \quad h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = h(\mathbf{x}, -\mathbf{p}). \tag{44}$$

Это тождество удовлетворяется для многих интересныхслучаев, таких как анизотропные электромагнитные и упругие среды. Функционал $\mathcal{F}$ определяет расстояние между точками a, $b \in \mathcal{M}$,

$$\rho(a, b) = \inf\{F(\sigma); \sigma \in L_{a,b}\}.$$

Для случая финслеровой геометрии это расстояние удовлетворяет следующим свойствам

1.
$$\rho(a,b) \geq 0,$$
2.
$$\rho(a,b) = 0 \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ a = b,$$
3.
$$\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c).$$

Если функция $F(\mathbf{x},\xi)$ удовлетворяет свойству (44), тогда ρ также удовлетворяет свойству симметрии

4.
$$\rho(a,b) = \rho(b,a).$$

В последнем случае функция ρ – это классическое расстояние на $\mathcal{M}$.

Экстремали функционала $\mathcal{F}$ называются геодезическими финслеровой метрики. Используя ту же процедуру, что и при исследовании экстремалей классической механики, мы можем получить следующую лемму.

Лемма 4. *Кривая $\sigma = \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) : [0,T] \to \mathcal{M}$ есть геодезическая финслеровой метрики в том и только том случае, если $(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t)) \in \widetilde{T}^*_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$,*
$$p_i(t) = g_{ij}(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}'(t))x^{j\prime}(t) \tag{45}$$
есть решение системы уравнений Гамильтона (12), (13).

Мы можем также написать уравнения геодезической как системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на многообразии
$$x^{i\prime\prime} + \gamma^i_{jk}(\mathbf{x},\mathbf{x}')x^{j\prime}x^{k\prime} = 0.$$
В этой формуле мы используем длину дуги в качестве параметра на кривой. Здесь $\gamma^i_{jk}(\mathbf{x},\xi)$, i, j, $k = 1,\ldots,m$, так называемые символы Кристоффеля первого рода
$$\gamma^i_{jk}(\mathbf{x},\xi) = g^{il}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma_{jlk}(\mathbf{x},\xi),$$
где $\mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ и $\xi \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ связаны между собой посредством преобразования Лежандра, описываемого с помощью функции

$h(\mathbf{x},\mathbf{p})$ или функции $F(\mathbf{x},\xi)$. Символы Кристоффеля γ_{jlk} определяются формулами

$$\gamma_{jlk}(\mathbf{x},\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}(\mathbf{x},\xi)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}(\mathbf{x},\xi)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}(\mathbf{x},\xi)}{\partial x^l}\right).$$

Геодезические финслеровой метрики однозначно определяются по начальной точке $(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}'_0)\in\widetilde{T}\mathcal{M}$ или начальной точке $(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)\in\widetilde{T}^*\mathcal{M}$. Метрические тензоры финслеровой геометрии позволяют нам определить нормы векторов $\mathbf{p}\in\widetilde{T}^*\mathcal{M}$ и $\xi\in\widetilde{T}\mathcal{M}$. В самом деле, пусть $\mathbf{p}\in\widetilde{T}^*_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ и $\xi\in\widetilde{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$

$$|\mathbf{p}|^2 =<\mathbf{p},\mathbf{p}>= h^2(\mathbf{x},\mathbf{p}) = g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_ip_j.$$

$$|\xi|^2 =<\xi,\xi>= F^2(\mathbf{x},\xi) = g_{ij}(\mathbf{x},\xi)\xi^i\xi^j.$$

Если $a=\mathbf{x}$ и $b\approx\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ являются близкими точками на многообразии, такими, что $d\mathbf{x}\in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$, тогда расстояние между ними может быть приближенно оценено как

$$\rho^2(a,b)\approx< d\mathbf{x},d\mathbf{x}>= F^2(\mathbf{x},d\mathbf{x}).$$

К сожалению на этом пути нелегко определить скалярное произведение в $T^*\mathcal{M}$ или $T\mathcal{M}$, а также углы между векторами или ковекторами, используя метрический тензор. Несколько определений этих величин даны в [2].

4. Гауссовы пучки и уравнение Риккати в финслеровой геометрии.

Теперь мы обобщим матричное уравнение Риккати (33) на случай финслеровой геометрии. Прежде всего мы должны заменить матричную функцию $H(t)$ на некоторый тензор $G(t)$. Мы хотим, чтобы формула для тензора G была бы вида (31). Мы уже знаем, что такое импульсы $\mathbf{p}(t)$ в финслеровой геометрии. Но какие символы Кристоффеля мы должны использовать вместо символов Кристоффеля римановой геометрии. К сожалению естественное предположение, что этими символами Кристоффеля в указанной формуле будут символы Кристоффеля первого рода γ^i_{jk}, является ошибочным. Действительно, простые вычисления показывают, что если мы сделаем замену системы координат $\mathbf{x}\to\widetilde{\mathbf{x}}$, тогда выражение $\gamma^k_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k = \gamma_{ilj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')x'^l$ преобразуется по формуле

$$\widetilde{\gamma}^{k'}_{i'j'}(\widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{x}}')\widetilde{p}_{k'} = \gamma^k_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k\frac{\partial X^i}{\partial\widetilde{x}^{i'}}\frac{\partial X^j}{\partial\widetilde{x}^{j'}} -$$

$$-C_{ijh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}}\frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}}\frac{\partial^2 X^h}{\partial \widetilde{x}^{k'}\partial \widetilde{x}^{h'}}(\widetilde{x}')^{h'}(\widetilde{x}')^{k'}+ \tag{46}$$

$$+g_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{x}')x'^k\frac{\partial^2 X^i}{\partial \widetilde{x}^{j'}\partial \widetilde{x}^{i'}},$$

где

$$C_{ijh}(\mathbf{x},\xi)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ih}(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^j}=\frac{1}{4}\frac{\partial^3 F^2(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^i\partial \xi^j\partial \xi^h}. \tag{47}$$

Следовательно выражение

$$H_{ij}(t)-\gamma^k_{ij}(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}'(t))p_k(t)$$

не является тензором на геодезической $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$. Фактически символы Кристоффеля в формуле (31) это символы Кристоффеля третьего рода

$$P^*_{ikj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\gamma_{ikj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')-$$

$$-\Big[C_{kjh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')P^h_{il}(\mathbf{x},\mathbf{x}')+C_{kih}(\mathbf{x},\mathbf{x}')P^h_{jl}(\mathbf{x},\mathbf{x}')-$$

$$-C_{ijh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')P^h_{kl}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\Big]x'^l, \tag{48}$$

и $P^h_{il}(\mathbf{x},\xi)$ – это символы Кристоффеля второго рода,

$$P^h_{il}(\mathbf{x},\xi)=\gamma^h_{il}(\mathbf{x},\xi)-g^{hr}(\mathbf{x},\xi)C_{irk}(\mathbf{x},\xi)\gamma^k_{pl}(\mathbf{x},\xi)\xi^p. \tag{49}$$

Символы Кристоффеля второго рода используются для инвариантного определения дифференцирования вдоль геодезической $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, которое называется дельта дифференцированием,

$$\frac{\delta X^i}{\delta t}=\frac{dX^i}{dt}+P^i_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')X^h dx^j.$$

Символы Кристоффеля третьего рода используются в определении ковариантной производной

$$X^i_{,j}=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}+P^{*i}_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')X^h.$$

Как обычно, символы Кристоффеля $P^{*i}_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ и $P^*_{hrj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ соотносятся посредством метрических тензоров $g^{ir}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ и $g_{ir}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$, а $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}'$ связаны посредством преобразования Лежандра.

Выражение $\frac{\delta X^i}{\delta t}$ фактически является векторным полем вдоль кривой, а $X^i_{,j}$ является тензорным полем. Заметим, что, вообще говоря,

$$P^h_{il} \neq P^h_{li} \quad P^{*h}_{il} = P^{*h}_{li}.$$

После простого преобразования мы можем переписать формулу (46) в виде

$$\gamma_{i'k'j'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}')(\widetilde{x}')^{k'} = \gamma_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^k \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'} \partial \widetilde{x}^{j'}} p_i -$$

$$-C_{ijh}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}} \left[\frac{\partial X^h}{\partial \widetilde{x}^{h'}} \gamma^{h'}_{p'l'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}')(\widetilde{x}')^{p'}(\widetilde{x}')^{l'} - \gamma^h_{pl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') x'^p x'^l \right].$$

Так, что

$$\gamma_{i'k'j'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}')(\widetilde{x}')^{k'} + C_{i'j'h'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}')\gamma^{h'}_{p'l'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}')(\widetilde{x}')^{p'}(\widetilde{x}')^{l'} = \tag{50}$$

$$= \left[\gamma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + C_{ijh}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\gamma^h_{pl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^p(x')^l\right] \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}} + \frac{\partial^2 X^r}{\partial \widetilde{x}^{i'} \partial \widetilde{x}^{j'}} p_r.$$

Здесь мы использовали, что

$$\frac{\partial^2 X^h}{\partial \widetilde{x}^{k'} \partial \widetilde{x}^{h'}}(\widetilde{x}')^{k'}(\widetilde{x}')^{h'} = \frac{\partial X^h}{\partial \widetilde{x}^{h'}} \gamma^{h'}_{p'l'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}')(\widetilde{x}')^{p'}(\widetilde{x}')^{l'} - \gamma^h_{pl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^p(x')^l.$$

Эта формула следует из закона преобразования для символов Кристоффеля первого рода

$$\gamma_{i'k'j'}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}') = \gamma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}} \frac{\partial X^k}{\partial \widetilde{x}^{k'}} + g_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial X^k}{\partial \widetilde{x}^{k'}} \frac{\partial^2 X^i}{\partial \widetilde{x}^{j'} \partial \widetilde{x}^{i'}} +$$

$$C_{ijh} \Bigg\{ \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{j'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{k'}} \frac{\partial^2 X^h}{\partial \widetilde{x}^{i'} \partial \widetilde{x}^{h'}} + \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{k'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{i'}} \frac{\partial^2 X^h}{\partial \widetilde{x}^{j'} \partial \widetilde{x}^{h'}} -$$

$$- \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}} \frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}} \frac{\partial^2 X^h}{\partial \widetilde{x}^{k'} \partial \widetilde{x}^{h'}} \Bigg\} (\widetilde{x}')^{h'}, \tag{51}$$

а также равенств

$$C_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^i = C_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^j = C_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^k = 0, \tag{52}$$

которые следуют из свойства однородности функции $F(\mathbf{x}, \xi)$ по ξ.

Используя формулы (47) и (49), мы получим, что

$$P^*_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')x'^k = \gamma_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')x'^k + C_{ijh}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')P^h_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(x')^l(x')^k =$$

$$= \gamma_{ikj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')x'^k + C_{ijh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\gamma^h_{kl}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^l(x')^k -$$

$$-C_{ijh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')g^{hs}(\mathbf{x},\mathbf{p})C_{ksr}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\gamma^r_{pl}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^p(x')^l(x')^k =$$

$$= \gamma_{ikj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')x'^k + C_{ijh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\gamma^h_{kl}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^l(x')^k, \qquad (53)$$

что следует из свойства (52). Рассматривая совместно формулы (53) и (50), мы получим формулу преобразования для $P^*_{ikj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^k$

$$\widetilde{P}^*_{i'k'j'}(\widetilde{\mathbf{x}},\widetilde{\mathbf{x}}')(\widetilde{x}')^{k'} = P^*_{ikj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^k \frac{\partial X^i}{\partial \widetilde{x}^{i'}}\frac{\partial X^j}{\partial \widetilde{x}^{j'}} + \frac{\partial^2 X^r}{\partial \widetilde{x}^{i'}\partial \widetilde{x}^{j'}}p_r. \qquad (54)$$

Эта формула вместе с формулой преобразования (30) приводит к тому, что выражение

$$G_{ij}(t) = H_{ij}(t) - P^{*k}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k(t) \qquad (55)$$

является 2-ковариантным тензорным полем на геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

После подстановки тензорного поля $G_{ij}(t)$ в уравнение Риккати (15) мы получим следующую формулу

$$\frac{dG_{ij}}{dt} + \widehat{B}^l_i G_{lj} + G_{il}\widehat{B}^l_j + C_{il}C^{lm}G_{mj} + \widehat{D}_{ij} = 0, \qquad (56)$$

где

$$\widehat{B}^l_i = B^l_i + P^{*k}_{im}p_k C^{ml}, \qquad (57)$$

$$\widehat{D}_{ij} = D_{ij} + \frac{d}{dt}\left(P^{*k}_{ij}p_k\right) + B^l_i P^{*m}_{lj}p_m + B^l_j P^{*m}_{li}p_m + P^{*k}_{il}p_k C^{lm}P^{*s}_{mj}p_s =$$

$$= D_{ij} + \frac{d}{dt}\left(P^{*k}_{ij}p_k\right) + \widehat{B}^l_i P^{*m}_{lj}p_m + \widehat{B}^l_j P^{*m}_{li}p_m - P^{*k}_{il}p_k C^{lm}P^{*s}_{mj}p_s. \qquad (58)$$

5. Преобразование уравнения Риккати.

Теперь мы найдем выражения для $\widehat{B}^l_i$, $\widehat{D}_{ij}$ и C^{lm}. Заметим, что все величины вычисляются на бихарактеристике $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$. Мы начнем с формулы для $C^{lm}(t)$

$$C^{lm}(t) = \frac{\partial^2 h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_l \partial p_m} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_l \partial p_m} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_l}\frac{1}{2}\frac{\partial h^2(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_m} =$$

$$= g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p}) - g^{ls}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_s g^{mk}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_k. \tag{59}$$

Здесь мы использовали, что $h(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t)) \equiv 1$.

Далее, используя формулу (53), мы найдем выражение для величин $P^{*k}_{im}(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}'(t))p_k(t)$

$$P^{*k}_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k = P^{*}_{ihm}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^h =$$

$$= \gamma_{ihm}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^h + C_{iml}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\gamma^l_{hr}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^r(x')^h =$$

$$= \gamma_{ihm}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^h + 2C_{ihm}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\mathcal{E}^h(\mathbf{x},\mathbf{x}'),$$

где

$$\mathcal{E}^h(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{2}\gamma^h_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}')x'^i x'^j. \tag{60}$$

Выражение для B^l_i может быть легко найдено

$$B^l_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial h(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_l}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m}{h}\right) =$$

$$= \frac{\partial g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^i}p_m - g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m\frac{\partial h}{\partial x^i} = \tag{61}$$

$$= \frac{\partial g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^i}p_m - \frac{1}{2}g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m\frac{\partial g^{rs}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^i}p_r p_s.$$

Далее используем следующее тождество

$$\frac{\partial g^{ik}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^j}p_k = -g^{hk}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_k\gamma^i_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}') - g^{hi}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma^k_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k. \tag{62}$$

Это тождество может быть доказано прямой подстановкой. В самом деле,

$$-g^{hk}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_k\gamma^i_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}') - g^{hi}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma^k_{hj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k =$$

$$= -g^{hk}(\mathbf{x},\mathbf{p})g^{ir}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_k\frac{\partial g_{hr}(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial x^j} =$$

$$= p_h\left[\frac{\partial g^{ih}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^j} + \frac{\partial g^{ih}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_l}\frac{\partial g_{lr}(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial x^j}(x')^r\right] = -\frac{\partial g^{ih}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x^j}p_h.$$

На последнем шаге мы использовали, что

$$-\frac{\partial g^{ih}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_l}p_h = 0.$$

Это тождество аналогично тождеству (52). Используя формулу (62) в выражении (61) для B^l_i, мы получим, что

$$B^l_i = -g^{hm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m\gamma^l_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}') - g^{hl}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma^k_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k+$$

$$+\frac{1}{2}g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m\left[g^{hs}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_s\gamma^r_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + g^{hr}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma^s_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_s\right]p_r =$$

$$= -g^{hm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m\gamma^l_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}') - g^{hl}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma^k_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k+$$

$$+g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_m g^{hs}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_s\gamma^r_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_r. \qquad (63)$$

Лемма 5. *Следующее тождество имеет место на геодезической* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\widehat{B}^l_i = -P^{*l}_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^m = -P^l_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^m. \qquad (64)$$

Доказательство. Используя формулы (48), (57) и (63), получим

$$\widehat{B}^l_i + P^{*l}_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^m = B^l_i + P^{*k}_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k C^{ml} + P^{*l}_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^m =$$

$$= -\gamma^l_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^h - g^{hl}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma^k_{hi}(\mathbf{x},\mathbf{x}')p_k + \gamma_{hri}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^r(x')^h(x')^l+$$

$$+g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})\gamma_{irm}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^r + g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})C_{imh}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\gamma^h_{sr}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^r(x')^s-$$

$$-\gamma_{irm}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^r(x')^l(x')^m + \gamma^l_{im}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^m - g^{lr}(\mathbf{x},\mathbf{p})C_{rih}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\times$$

$$\left[\gamma^h_{mj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^j(x')^m - g^{hk}(\mathbf{x},\mathbf{p})C_{mks}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\gamma^s_{pj}(\mathbf{x},\mathbf{x}')(x')^p(x')^j(x')^m\right] = 0.$$

Последнее тождество в формуле (64) есть элементарное следствие определений (48), (49).

$$P^{*l}_{ik}x'^k = \gamma^l_{ik}x'^k - C^l_{ih}P^h_{kr}x'^r x'^k = \gamma^l_{ik}x'^k - 2C^l_{ih}\mathcal{E}^h = P^l_{ik}x'^k,$$

где

$$C^l_{ih}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = g^{lm}(\mathbf{x},\mathbf{p})C_{imh}(\mathbf{x},\mathbf{x}').$$

Наконец мы приведем некоторые формулы, которые будем использовать в дальнейшем. Используя определение (60), мы можем получить формулы для производных от $\mathcal{E}^l(\mathbf{x},\mathbf{x}')$,

$$\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^i} = \gamma^l_{ik}x'^k + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x'^i}(\gamma^l_{rk})x'^r x'^k = \gamma^l_{ik}x'^k + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{lr}}{\partial x'^i}g_{rh}\mathcal{E}^h =$$

$$= \gamma^l_{ik}x'^k - 2g^{lr}C_{irh}\mathcal{E}^h = P^{*l}_{ik}x'^k = P^l_{ik}x'^k. \qquad (65)$$

Подстановка формулы (65) в определение (48) приводит к следующему представлению для P^*_{ikj}

$$P^*_{ikj} = \gamma_{ikj} - C_{kjh}\frac{\partial\mathcal{E}^h}{\partial x'^i} - C_{kih}\frac{\partial\mathcal{E}^h}{\partial x'^j} + C_{ijh}\frac{\partial\mathcal{E}^h}{\partial x'^k}.$$

Используя эту формулу, легко получить следующее тождество

$$P^{*l}_{ik}p_l = P^*_{irk}x'^r = \left(\gamma_{irk}x'^r + C_{ikh}\frac{\partial\mathcal{E}^h}{\partial x'^r}x'^r\right) = \gamma_{irk}x'^r + 2C_{ikh}\mathcal{E}^h. \quad (66)$$

На последнем шаге мы использовали, что $\mathcal{E}^h$ однородна порядка 2 по $\mathbf{x}'$.

Далее мы найдем выражение для $\widehat{D}_{ij}$.

Лемма 6. *Следующее тождество имеет место на геодезической* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\widehat{D}_{ij} = -R^m_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')p_m(x')^k, \quad (67)$$

где R^m_{ikj} *есть третий тензор кривизны Картана.*

$$R^m_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{\partial P^{*m}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial P^{*m}_{ik}}{\partial x'^l}\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^j}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial P^{*m}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial P^{*m}_{ij}}{\partial x'^l}\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^k}\right) +$$

$$+C^m_{ir}\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}^r}{\partial x^j\partial x'^k} - \frac{\partial^2\mathcal{E}^r}{\partial x'^j\partial x^k} - \mathcal{E}^r_{kl}\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^j} + \mathcal{E}^r_{jl}\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^k}\right) +$$

$$+P^{*m}_{rj}P^{*r}_{ik} - P^{*m}_{rk}P^{*r}_{ij},$$

и

$$\mathcal{E}^l_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\partial^2\mathcal{E}^l(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x'^i\partial x'^j}.$$

Доказательство состоит в вычислении левой и правой частей формулы (67). Эти вычисления достаточно длинные и сложные. Поэтому мы проведем их в виде серии шагов.

Шаг 1. Используя формулу (65), мы получим

$$\frac{\partial P^{*m}_{ik}}{\partial x^j}x'^k p_m = \frac{\partial^2\mathcal{E}^m}{\partial x'^i\partial x^j}p_m.$$

Аналогично, применяя формулу (66), будем иметь

$$\frac{\partial P^{*m}_{ij}}{\partial x^k} x'^k p_m = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\gamma_{irj} x'^r + 2C_{ijr}\mathcal{E}^r\right] x'^k - P^{*m}_{ij}\frac{\partial g_{mr}}{\partial x^k} x'^k x'^r.$$

Шаг 2. Используя еще раз формулу (65), нетрудно получить, что

$$\frac{\partial P^{*m}_{ik}}{\partial x'^l} x'^k p_m = p_m\left[\frac{\partial}{\partial x'^l}\left(\frac{\partial \mathcal{E}^m}{\partial x'^i}\right) - P^{*m}_{il}\right] =$$

$$= \mathcal{E}^m_{il} p_m - \left[\gamma_{irl} x'^r + 2C_{irl}\mathcal{E}^r\right].$$

Еще раз применяя формулу (66), будем иметь

$$\frac{\partial P^{*m}_{ij}}{\partial x'^l} p_m \frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^k} x'^k = 2\mathcal{E}^l\left\{\frac{\partial}{\partial x'^l}\left[\gamma_{irj} x'^r + 2C_{ijr}\mathcal{E}^r\right] - g_{ml}P^{*m}_{ij}\right\}.$$

Шаг 3. Поскольку $C^m_{ir}p_m = C_{imr}x'^k = 0$,

$$C^m_{ir}\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}^r}{\partial x^j\partial x'^k} - \frac{\partial^2\mathcal{E}^r}{\partial x'^j\partial x^k} - \mathcal{E}^r_{kl}\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^j} + \mathcal{E}^r_{jl}\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^k}\right) p_m x'^k = 0.$$

Наконец,

$$\left(P^{*m}_{rj}P^{*r}_{ik} - P^{*m}_{rk}P^{*r}_{ij}\right) p_m x'^k =$$

$$= \left(\gamma_{rhj} x'^h + 2C_{rhj}\mathcal{E}^h\right)\frac{\partial \mathcal{E}^r}{\partial x'^i} - P^{*r}_{ij}\frac{\partial \mathcal{E}^m}{\partial x'^r} p_m.$$

Объединяя результаты шагов 1–3, мы найдем выражение для правой части формулы (67)

$$R^m_{ikj}p_m x'^k = \frac{\partial^2\mathcal{E}^m}{\partial x'^i\partial x^j}p_m - p_m\mathcal{E}^m_{il}\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^j} + \left[\gamma_{irl}x'^r + 2C_{ilr}\mathcal{E}^r\right]\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^j} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\gamma_{irj}x'^r + 2C_{irj}\mathcal{E}^r\right] x'^k + P^{*m}_{ij}\frac{\partial g_{mr}}{\partial x^k} x'^r x'^k +$$

$$+2\mathcal{E}^l\left[\frac{\partial}{\partial x'^l}\left(\gamma_{irj}x'^r + 2C_{irj}\mathcal{E}^r\right) - g_{ml}P^{*m}_{ij}\right] +$$

$$+\left(\gamma_{rhj}x'^h + 2C_{rhj}\mathcal{E}^h\right)\frac{\partial \mathcal{E}^r}{\partial x'^i} - P^{*r}_{ij}\frac{\partial \mathcal{E}^m}{\partial x'^r}p_m.$$

Теперь мы вычислим выражение в левой части равенства (67).

Шаг 4. Используя очевидное тождество

$$\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^i} p_l p_k = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} x'^r, x'^s$$

легко получить выражение для D_{ij}

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{1}{h}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^j} p_l p_k\right] = -\frac{1}{4}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} x'^r x'^s \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} x'^k x'^l -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^j} x'^r x'^s\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x'^n}\left[\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^j} x'^r x'^s\right]\frac{\partial g^{nh}}{\partial x^i} p_h =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x^i \partial x^j} x'^r x'^s - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} x'^r x'^s \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} x'^k x'^l + g^{nh}\frac{\partial g_{rn}}{\partial x^j} x'^r \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i} x'^k.$$

Шаг 5. Дифференцируя формулу (66) вдоль геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(P^{*k}_{ij} p_k\right) = \frac{d}{dt}\left[\gamma_{irj} x'^r + 2C_{irj}\mathcal{E}^r\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\gamma_{irj} x'^r + 2C_{irj}\mathcal{E}^r\right] x'^l + \frac{\partial}{\partial x'^l}\left[\gamma_{irj} x'^r + 2C_{irj}\mathcal{E}^r\right](-2\mathcal{E}^l).$$

Здесь мы использовали, что

$$x''^l = \frac{d}{dt}(g^{lr} p_r) =$$

$$= \frac{\partial g^{lr}}{\partial x^k} g_{rs} x'^k x'^s - \frac{\partial g^{lr}}{\partial p_s}\frac{\partial h}{\partial x^s} p_r - \frac{1}{2} g^{lr}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r} g_{is} x'^s p_k =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{lr}\left[2\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^r}\right] x'^k x'^s = -2\mathcal{E}^l.$$

Шаг 6.

$$\widehat{B}^l_i P^{*m}_{lj} p_m = -\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^i}\left[\gamma_{lrj} x'^r + 2C_{lrj}\mathcal{E}^r\right].$$

Аналогично

$$\widehat{B}^l_j P^{*m}_{li} p_m = -\frac{\partial \mathcal{E}^l}{\partial x'^j}\left[\gamma_{lri} x'^r + 2C_{lri}\mathcal{E}^r\right].$$

Шаг 7. Наконец

$$P^{*k}_{il} p_k C^{lm} P^{*s}_{mj} p_s = \left[g^{lm} - x'^l x'^m\right]\left[\gamma_{ipl} x'^p + 2C_{ipl}\mathcal{E}^p\right]\left[\gamma_{iqm} x'^q + 2C_{jqm}\mathcal{E}^q\right].$$

Шаг 8. Объединяя вычисления, выполненные на шагах 1–7, мы получим

$$\widehat{D}_{ij}+R^m_{ihj}p_m x'^h=$$
$$=D_{ij}-\left[g^{lm}-x'^l x'^m\right]\left[\gamma_{ipl}x'^p+2C_{ipl}\mathcal{E}^p\right]\left[\gamma_{iqm}x'^q+2C_{jqm}\mathcal{E}^q\right]+$$
$$+\frac{\partial^2\mathcal{E}^m}{\partial x'^i\partial x^j}p_m-p_m\mathcal{E}^m_{il}\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^j}+P^{*m}_{ij}\frac{\partial g_{mr}}{\partial x^k}x'^r x'^k-$$
$$-2\mathcal{E}^l g_{ml}P^{*m}_{ij}-P^{*r}_{ij}\frac{\partial\mathcal{E}^m}{\partial x'^r}p_m. \tag{68}$$

Шаг 9.

$$P^{*m}_{ij}\left[\frac{\partial g_{mr}}{\partial x^k}x'^r x'^k-2\mathcal{E}^l g_{ml}-\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^m}p_l\right]=$$
$$=P^{*m}_{ij}\left[\frac{\partial g_{mr}}{\partial x^k}x'^r x'^k-\gamma_{kmr}x'^r x'^k-\gamma_{krm}x'^r x'^k\right]=0. \tag{69}$$

Здесь мы использовали, что

$$\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^m}p_l=\frac{\partial}{\partial x'^m}(\mathcal{E}^l p_l)-\mathcal{E}^l g_{lm}=\gamma_{krm}x'^r x'^k=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kr}}{\partial x^m}x'^k x'^r.$$

Шаг 10.

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}^m}{\partial x^j\partial x'^i}p_m=\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\gamma_{irl}x'^l x'^r\right]-g^{mr}\left[\gamma_{irl}x'^r-2C_{irl}\mathcal{E}^l\right]\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}x'^k=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{rl}}{\partial x^i\partial x^j}x'^r x'^l-\left[\gamma^m_{il}x'^l-2C^m_{il}\mathcal{E}^l\right]\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}x'^k, \tag{70}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}^m}{\partial x'^l x'^i}p_m=\frac{\partial}{\partial x'^l}\left(\frac{\partial\mathcal{E}^m}{\partial x'^i}p_m\right)-\frac{\partial\mathcal{E}^m}{\partial x'^i}g_{ml}. \tag{71}$$

Шаг 11. Комбинируя формулы (68), (69), (70) и (71), мы получим

$$\widehat{D}_{ij}+R^m_{ihj}p_m x'^h=D_{ij}-g^{lm}\left[\gamma_{irm}x'^r+2C_{irm}\mathcal{E}^r\right]\left[\gamma_{lhj}x'^h+2C_{lhj}\mathcal{E}^h\right]+$$
$$+\gamma_{irm}x'^r x'^m\gamma_{lhj}x'^h x'^l+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{rl}}{\partial x^i\partial x^j}x'^r x'^l-$$
$$-\left(\gamma^m_{il}x'^l-2C^m_{il}\mathcal{E}^l\right)\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}x'^k+g_{ml}\frac{\partial\mathcal{E}^m}{\partial x'^i}\frac{\partial\mathcal{E}^l}{\partial x'^j}-$$

$$-\left(\gamma_{jl}^{m} x'^{l} - 2C_{jl}^{m}\mathcal{E}^{l}\right)\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}} x'^{k} =$$

$$= g^{lm}\left[\frac{\partial g_{rl}}{\partial x^{j}} x'^{r}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}} x'^{k} - \gamma_{ikm} x'^{k}\gamma_{lrj} x'^{r} - \gamma_{imk} x'^{k}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^{j}} x'^{r} - \right.$$

$$\left. -\gamma_{rlj} x'^{r}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}} x'^{k} + \gamma_{imk} x'^{k}\gamma_{ilr} x'^{r}\right] +$$

$$+2C_{jr}^{l}\mathcal{E}^{r}\left[-\gamma_{lkj} x'^{k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^{j}} x'^{k} - \gamma_{jlk} x'^{k}\right]$$

$$+2C_{jr}^{l}\mathcal{E}^{r}\left[-\gamma_{ikl} x'^{k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^{i}} x'^{k} - \gamma_{ilk} x'^{k}\right] =$$

$$= g^{lm}\left[\frac{\partial g_{rl}}{\partial x^{j}} x'^{r}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}} x'^{k} - \gamma_{ikm} x'^{k}\gamma_{lrj} x'^{r} + \left(\gamma_{ikm} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}}\right) x'^{k}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^{j}} x'^{r} + \right.$$

$$\left. + \left(\gamma_{lrj} - \frac{g_{lr}}{\partial x^{j}}\right) x'^{r}\frac{g_{mk}}{\partial x^{i}} x'^{k} + \left(\gamma_{imk} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}}\right)\left(\gamma_{jrl} - \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^{j}}\right) x'^{k} x'^{r}\right] =$$

$$= 0. \tag{72}$$

Лемма доказана.

Подстановка выражений для $\widehat{B}_{i}^{l}$, $\widehat{D}_{ij}$ и C^{lm}, задаваемых формулами (64), (67) и (59), в уравнении Риккати (56) приводит к следующей теореме

Теорема 2. *Тензорное поле $G_{ij}(t)$ на геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ удовлетворяет ковариантному уравнению Риккати*

$$\frac{\delta G_{ij}}{\delta t} + G_{il}C^{lm}G_{mj} + R_{ij} = 0, \tag{73}$$

где $\frac{\delta G_{ij}}{\delta t}$ есть ковариантная дельта производная вдоль геодезической

$$\frac{\delta G_{ij}}{\delta t} = \frac{dG_{ij}}{dt} - P_{im}^{l} x'^{m} G_{lj} - P_{mj}^{l} x'^{m} G_{il} =$$

$$= \frac{dG_{ij}}{dt} - P_{im}^{*l} x'^{m} G_{lj} - P_{mj}^{*l} x'^{m} G_{il} \tag{74}$$

и

$$R_{ij}(t) = R_{ihj}^{m}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) p_{m}(t) x'^{h}(t). \tag{75}$$

Здесь R^m_{ihj} – *это третий тензор кривизны Картана на геодезической и*

$$C^{lm}(t) = g^{lm}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) - x'^l(t)x'^m(t). \qquad (76)$$

Напомним, что дельта производная играет роль ковариантной производной вдоль геодезической в финслеровой геометрии.

Уравнение (73) дает нам геометрическую интерпретацию уравнения Риккати (15) в случае финслеровой геометрии. Оно аналогично уравнению (33) в случае римановой геометрии.

Рассмотрения этой статьи показывают, что имеется фундаментальная аналогия между случаями римановой и финслеровой геометриями при описании решений, имеющих вид гауссовых пучков. В обоих случаях гауссовы пучки распространяются вдоль геодезических соответствующей метрики, причем t является каноническим параметром на них. Поведение соответствующих квадратичных форм описывается посредством ковариантного уравнения Риккати, которое содержит тензор кривизны соответствующей метрики.

Литература

1. A. Katchalov, Ya. Kurylev, M. Lassas, *Inverse boundary spectral problems*. Chapman & Hall / CRC (2001).
2. Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*. Наука, М. (1970).

Katchalov A. P. Gaussian beams, the Hamilton–Jacobi equations and Finsler geometry.

The relationships between Gaussian beams and geometry are considered in the paper. It is shown that the main properties of the Gaussian beam solutions are determined by the natural geometry, related to the problem under considerations. The geometry is determined by the Hamilton–Jacobi equation and corresponding hamiltonian. In particular, it was found a geometric interpretation of the Riccati equation for the quadratic form of the phase function corresponding to the Gaussian beam in the case of Finsler geometry.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 января 2003 г.