Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис

ТРУБНЫЕ ВОЛНЫ В СКВАЖИНЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ СМЕСЬЮ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

При проведении скважинных акустических измерений часто возникают ситуации, когда материал, заполняющий скважину, состоит из смеси жидких и твердых частиц, образующихся в процессе различных технологических операций: при бурении скважин, при гидродобыче, при извлечении нефти из коллекторов. Такой материал является двухфазной средой с малой или нулевой сдвиговой жесткостью. Допустимой моделью этого материала может быть пороакустическая среда Био. Целью данной работы является определение природы и кинематики трубных волн, возникающих в такой модели.

Рассмотрим вначале задачу о распространении упругих волн в безграничной пороакустической среде Био. Обозначим через $\vec{u}$ вектор смещения в твердой фазе, а через $\vec{U}$ в жидкой фазе и введем потенциалы φ и ψ, связанные с ними формулами

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\varphi \quad \vec{U} = \mathrm{grad}\psi. \tag{1}$$

Как известно [1, 2], потенциалы φ и ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} P\Delta\varphi + Q\Delta\psi &= \rho_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \\ Q\Delta\varphi + R\Delta\psi &= \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где для коэффициентов выполняются условия $PR-Q^2 > 0$, $P > 0$, $R > 0$, $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0$. Динамические параметры ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} связаны с плотностью жидкости ρ_f, плотностью твердых частиц ρ_s, извилистостью τ и пористостью Φ равенствами

$$\rho_{11} = \rho_s(1-\Phi) + \rho_f\Phi(\tau-1), \quad \rho_{12} = \Phi\rho_f(1-\tau), \quad \rho_{22} = \tau\Phi\rho_f. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант No. 03-05-65015.

Представляя потенциалы φ и ψ в виде

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \\ &\psi = \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2, \end{aligned} \tag{4}$$

можно показать, что φ_1 и φ_2 являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \frac{1}{v_1^2}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = \frac{1}{v_2^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

в которых v_1 и v_2 находятся из формулы

$$v_{1,2}^2 = \frac{1}{2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)}\Big\{P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12} \pm \sqrt{(P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12})^2 - 4(PR - Q^2)(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}\Big\},$$

а множители γ_1 и γ_2 определяются по формуле

$$\gamma_i^{-1} = \frac{Q - \rho_{12}v_i^2}{\rho_{22}v_i^2 - R} = \frac{P - \rho_{11}v_i^2}{\rho_{12}v_i^2 - Q}, \quad (i = 1, 2) \tag{6}$$

Рассмотрим в цилиндрической системе координат (r, z, θ) скважину $(r \leqslant r_0, -\infty < z < \infty)$, заполненную двухфазным материалом, и находящуюся в упругом пространстве $(r > r_0, -\infty < z, \infty)$. Продольный φ_3 и поперечный ψ_3 потенциалы в упругом пространстве удовлетворяют уравнениям движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} = \frac{1}{a_3^2}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \frac{\psi_3}{r} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = \frac{1}{b_3^2}\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

В упругом пространстве смещения u_r, u_z и напряжения t_{rr} и t_{rz} выражаются через потенциалы в виде

$$u_r^{(3)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}, \quad u_z^{(3)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \frac{\psi_3}{r}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} t_{rr} &= \frac{\lambda_3}{a_3^2}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} + 2\mu_3 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} - 2\mu_3 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r}, \\ t_{rz} &= \mu_3 \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z \partial r} - 2\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2}\right) + \rho_3 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda_3 + 2\mu_3 = a_3^2\rho_3$, $\mu_3 = b_3^2\rho_3$, λ_3, μ_3 — упругие модули, ρ_3 — плотность среды, a_3 и b_3 соответственно скорости продольной и поперечной волн.

В среде Био смещения u_r, u_z, U_r, U_z и напряжение σ_{rr} равны:

$$\begin{gathered} u_r = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}; \\ U_r = \gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}; \quad U_z = \gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}; \\ \sigma_{rr} = (\rho_{11} + \rho_{12})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + (\rho_{11} + \rho_{12})\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{10}$$

На стенке скважины нормальные к границе смещения непрерывны, полные напряжения непрерывны, а касательное напряжение в твердом теле обращается в ноль:

$$u_r = u_r^{(3)}, \quad U_r = u_r^{(3)}, \quad t_{rr} = \sigma_{rr}, \quad t_{rz} = 0. \tag{11}$$

После выполнения преобразований Фурье по z и Бесселя по r выражения для спектров потенциалов, удовлетворяющих условию конечности поля на оси скважины $r = 0$ и условию убывания при $r \to \infty$, можно искать в виде

$$\begin{gathered} \bar\varphi_1 = a\cos kz I_0(kr\alpha_1)\exp(ikvt), \\ \bar\varphi_2 = b\cos kz I_0(kr\alpha_2)\exp(ikvt), \\ \bar\varphi_3 = c\cdot\cos kz\mathcal{K}_0(kr\alpha_3), \quad \bar\psi_3 = d\cdot\sin kz\mathcal{K}_1(kr\beta_3), \end{gathered} \tag{12}$$

где I_0, I_1, $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ – модифицированные функции Бесселя, $kr = 2\pi fr/v$ – безразмерное вертикальное волновое число, f – частота, v – фазовая скорость, $\alpha_1 = \sqrt{1-(v/v_1)^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{1-(v/v_2)^2}$, $\alpha_3 = \sqrt{1-(v/a_3)^2}$, $\beta_3 = \sqrt{1-(v/b_3)^2}$.

Подставляя (12) в граничные условия (11), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно констант a, b, c, d. Для того чтобы система имела нетривиальное решение, ее определитель $\Delta(kr_0, v)$ должен быть равен нулю. Уравнение

$$\Delta(kr_0, v) = 0 \tag{13}$$

определяет связь фазовой скорости v с безразмерным волновым числом kr_0 нормальных волн, распространяющихся в скважине.

Элементы $\{a_{ik}\}$ определителя, отличные от нуля, равны

$$a_{11} = -v^2(p+\gamma_1 q)\frac{I_0(kr_0\alpha_1)}{I_1(kr_0\alpha_1)};\ a_{12} = -v^2(p+\gamma_2 q)\frac{I_0(kr_0\alpha_2)}{I_1(kr_0\alpha_2)};$$
$$a_{13} = -\mu_3 g_3\frac{\mathcal{K}_0(kr_0\alpha_3)}{\mathcal{K}_1(kr_0\alpha_3)} - \frac{2\mu_3\alpha_3}{kr_0};\ a_{14} = -2\mu_3\beta_3\frac{\mathcal{K}_0(kr_0\beta_3)}{\mathcal{K}_1(kr_0\beta_3)} - \frac{2\mu_3}{kr_0};$$
$$a_{23} = 2\alpha_3;\quad a_{24} = g_3;\quad a_{31} = \alpha_1;\quad a_{32} = \alpha_2;\quad a_{33} = \alpha_3;$$
$$a_{34} = 1;\quad a_{41} = \gamma_1\alpha_1;\quad a_{42} = \gamma_2\alpha_2;\quad a_{43} = \alpha_3; a_{44} = 1, \tag{14}$$

здесь $g_3 = 2 - (v/b_3)^2$, $p = \rho_{11} + \rho_{12}$, $q = \rho_{12} + \rho_{22}$.

Будем в дальнейшем интересоваться только волнами, спектр которых начинается с нулевых частот. К таким волнам относятся и трубные волны. Известно, что в открытой скважине, находящейся в упругом пространстве и заполненной жидкостью, существует трубная волна, скорость v_T которой при нулевой частоте определяется формулой [3]

$$v_T = \frac{b_2}{\sqrt{\rho_{12} + (b_2/a_1)^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{1 + \rho_{12}(a_1/b_2)^2}}, \tag{15}$$

где a_1 – скорость звука в жидкости, b_2 – скорость поперечной волны в твердой среде, ρ_{12} – отношение плотности жидкости к плотности твердой среды. Как следует из (15), скорость v_T не зависит от скорости продольной волны в среде, окружающей скважину, и определяется только модулем сдвига среды $\mu_2 = \rho_2 b_2^2$.

Рассмотрим, что происходит с трубной волной в пороакустической модели. Перейдем к пределу в (13) $kr_0 \to 0$ и ограничимся первыми членами разложения в ряды функций Макдональда $I_0(x) \approx 1$, $I_1(x) \approx \frac{x}{2}$, $\mathcal{K}_0(x) \approx \ln\frac{2}{\gamma x}$, $\mathcal{K}_1(x) \approx \frac{1}{x}$ (γ – постоянная Эйлера). В результате уравнение (13) значительно упрощается и сводится к квадратному уравнению относительно квадрата скорости:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} v^2(p+\gamma_1 q) & v^2(p+\gamma_2 q) & \mu_3 \\ 1 - \frac{v^2}{v_1^2} & 1 - \frac{v^2}{v_2^2} & 1 \\ \gamma_1\left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right) & \gamma_2\left(1 - \frac{v^2}{v_2^2}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Можно показать, что это уравнение имеет два вещественных корня $v_1^{(0)}$ и $v_2^{(0)}$ ($v_1^{(0)} < v_2^{(0)}$), на величину которых внешняя среда влияет только посредством модуля сдвига μ_3. Таким образом в скважине, заполненной двухфазным материалом, распространяются две трубные волны. С ростом частоты скорости волн меняются и могут принимать комплексные значения. Условимся вещественную часть скорости называть фазовой скоростью $v_{ph} = \mathrm{Re}\, v$, а мнимую часть скорости $\mathrm{Im}\, v$ связывать с затуханием $\varkappa = \frac{2\pi f \mathrm{Im}\, v}{(\mathrm{Re}\, v)^2}$. Скорость v становится комплекснозначной величиной при выполнении неравенства $\mathrm{Re}\, v > b_3$.

Для численных расчетов дисперсии фазовых скоростей трубных волн возьмем параметры пороакустической среды Био, заполняющей скважину, из работы [4]:

модуль всестороннего сжатия жидкости $k_f = 2.5$ ГПа,
модуль всестороннего сжатия твердого тела $k_s = 40$ ГПа,
модуль всестороннего сжатия скелета $k_m = k_s(1.0 - 1.2\Phi)$,
извилистость $\tau = 0.5\ (1. + \Phi^{-1})$,
плотность твердого тела $\rho_s = 2500$ кг/м^3,
плотность скелета $\rho_m = 2000$ кг/м^3,
плотность жидкости $\rho_f = 1040$ кг/м^3,
пористость среды Био $\Phi = 0.4; 0.7$.

Параметры упругой среды, окружающей скважину, выбраны в четырех вариантах:

1. $a_3 = 4800$ м/с, $b_3 = 2520$ м/с, $\rho_3 = 2600$ кг/м^3 ($\gamma = b_3/a_3 = 0.525$)
2. $a_3 = 4800$ м/с, $b_3 = 1440$ м/с, $\rho_3 = 2600$ кг/м^3 ($\gamma = 0.3$)
3. $a_3 = 2500$ м/с, $b_3 = 1312$ м/с, $\rho_3 = 2000$ кг/м^3 ($\gamma = 0.525$)
4. $a_3 = 2500$ м/с, $b_3 = 750$ м/с, $\rho_3 = 2000$ кг/м^3 ($\gamma = 0.3$).

Первые две модели соответствуют случаю высокоскоростной среды, двум значениям γ и двум значениям пористости (рис. 1, рис. 2). Цифра I отвечает медленной трубной волне (МТВ), а цифра II – быстрой трубной волне (БТВ). Для сравнения на рисунках приведены и кривые (0) фазовой скорости для жидкозаполненной скважины. Из дисперсионных кривых видно, что МТВ имеет фазовую скорость близкую к скорости трубной волны в жидком заполнителе, причем дисперсия очень слабая, о чем можно судить по фрагменту рис. 1а, представленному в увеличенном масштабе. При стремлении kr_0 к бесконечности скорость МТВ приближается к скорости волны Стоунли на плоской границе пороакустической среды Био и упругой среды. Эта скорость несколько ниже скорости v_2 медленной волны в среде Био. Скорость БТВ почти в два раза выше скорости МТВ и становится комплексной, когда ее фазовая скорость больше b_3. Интервал kr_0, на которой БТВ становится затухающей, может иметь различную длину, определяемую параметрами модели. Например, для второй модели и $\Phi = 0.4$ (рис. 2a) БТВ имеет затухание отличное от нуля на интервале $0 < kr_0 < 0.8$. Затухание является следствием излучения поперечной конической волны в окружающую среду.

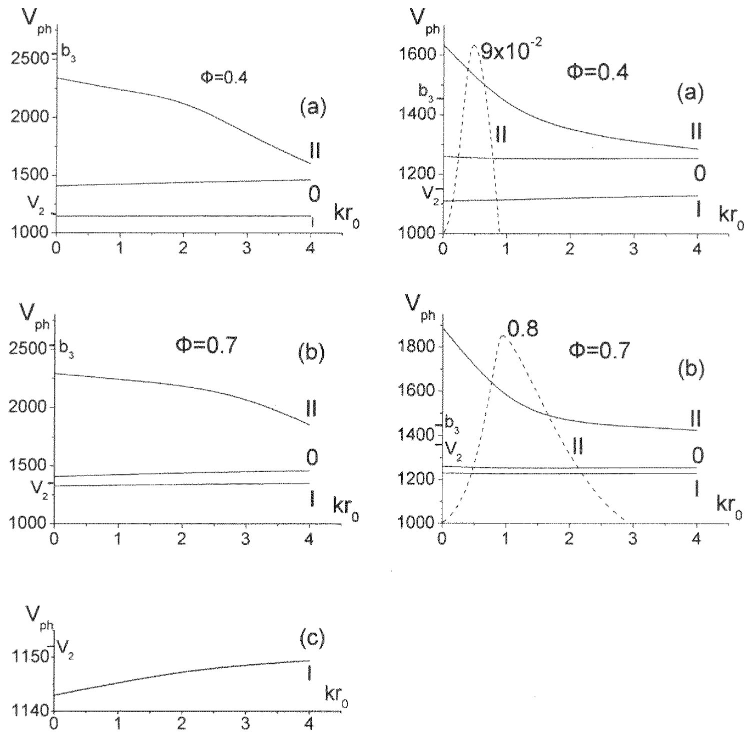

Рис. 1. Дисперсия фазовой скорости v_{ph} (м/с) и затухание $\varkappa$ (м$^{-1}$) (штриховая линия) трубных волн в скважине, заполненной средой Био, для модели 1 при пористости $\Phi = 0.4$ (a) и $\Phi = 0.7$ (б). Фрагмент рис. 1a в бо́льшем масштабе (c).
Рис. 2. То же, что на рис. 1 для модели 2.

Последние две модели (рис. 3, 4) относятся к случаю низкоскоростной окружающей среды, когда БТВ становится затухаю-

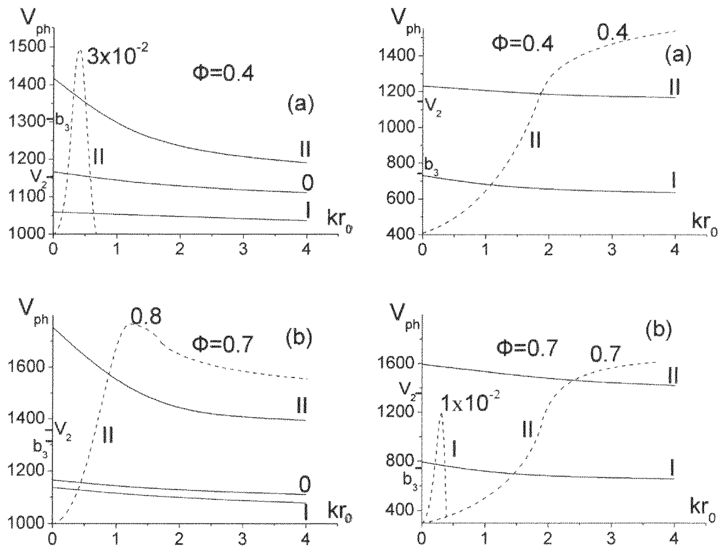

Рис. 3. Дисперсия фазовой скорости v_{ph} (м/с) и затухание $\varkappa$ (м$^{-1}$) (штриховая линия) трубных волн в скважине, заполненной средой Био, для модели 3 при пористости $\Phi = 0.4(a)$ и $\Phi = 0.7(b)$.
Рис. 4. То же, что на рис. 3 для модели 4.

щей волной, а при высокой пористости и МТВ является затухающей, хотя это затухание на два порядка ниже затухания БТВ.

В заключение подчеркнем, что факт возникновения двух трубных волн в скважине, заполненной двухфазной средой, был отмечен в ряде работ, связанных с акустическими скважинными измерениями на месторождениях углеводородов.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Исследование Распространения Волн в Пористых и Трещиноватых Средах на Основе Эффективных Моделей БИО и Слоистых Сред.* — СПб (2001), 347.
2. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Интерференционная медленная волна в пороакустическом слое Био.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 109–116.
3. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Волновое поле точечного источника в*

скважине. — Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн **XVI** (1976), 41–53.

4. J. M. Carcione, G. Quiroga-Goode, *Full frequency-range transient solution for compressional waves in a fluid-saturated viscoacoustic porous medium.* — Geophys. Prospecting **44** (1966), 99–129.

Krauklis P. V. and Krauklis L. A. Tube waves in a borehole filled by a mixture of solid and fluid particles.

Kinematic and dynamic parameters of the lowfrequency waves propagating in the two-phase mixture of the solid and fluid particles are investigated. It is shown, that in this model two tube waves propagate at that time as only one tube wave propagates in the fluidfilled well. The dispersion and attenuation of tube waves are studied.

УДК 550.34.016

Изучаются кинематические и динамические характеристики низкочастотных волн, распространяющихся в двухфазной смеси твердых и жидких частиц, заполняющих скважину. Показано, что в такой модели в отличие от модели жидкозаполненной скважины распространяются не одна, а две трубные волны. Изучены дисперсия и затухание волн вследствие излучения из скважины. Библ. - 4 назв., рис. 4.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 января 2003 г.