Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

**Н. Г. Кузнецов, О. В. Мотыгин**

# ЗАДАЧА СТЕКЛОВА В ПОЛУПЛОСКОСТИ: ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОТ КУСОЧНО–ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

**К столетию работы В. А. Стеклова** [1]

## 1. Введение; постановка задачи

В работе [1], В. А. Стеклов впервые рассмотрел следующую задачу:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{в} \quad D, \qquad \partial u/\partial n = \nu p u \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{1.1}$$

где $D$ – гладкая ограниченная область, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль на $\partial D$, $p$ – заданная неотрицательная функция, а $\nu$ – спектральный параметр. В зависимости от размерности области $D$ задача Стеклова имеет различные физические интерпретации (см. книгу [2], с. 95). Хорошо известно, [2], с. 103, что задача Стеклова имеет дискретный спектр:

$$0 = \nu_0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \ldots, \quad \nu_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

(здесь каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность) и для него найдены ответы на классические вопросы, а именно, получена асимптотика $\nu_n$ при $n \to \infty$ (см. обзор [3], с. 89) и доказан ряд изопериметрических неравенств для собственных значений (см. [2], гл. III, §§3, 5 и 7).

В заметке [4] авторы сформулировали ряд результатов для задачи Стеклова (часть из них доказана, а часть лишь анонсирована) в случае, когда

$$D = \mathbb{R}^2_- = \{-\infty < x < +\infty,\ y < 0\},$$

а $p(x) = 1$ при $b < |x| < b+1$ $(b > 0)$ и $p = 0$ на остальной части $\partial\mathbb{R}^2_-$. Для указанных области $D$ и коэффициента $p$ задача

Работа выполнена при финансовой поддержке авторов грантом РФФИ No. 01-01-00973.

Стеклова описывает свободные двумерные колебания идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, заполняющей нижнее полупространство и накрытой твердой крышкой с двумя бесконечными параллельными прорезями равной ширины (в силу подобия, ширина каждой прорези положена равной единице). Движение жидкости предполагается безвихревым (с точностью до гармонического по времени множителя вещественная функция $u$ есть потенциал скоростей), эффект поверхностного натяжения не учитывается, а амплитуда волн в прорезях считается малой. Частота собственных колебаний равна $(\nu g)^{1/2}$, где $g$ – ускорение свободного падения. Цель данной работы – доказать анонсированные в [4] результаты (в ряде случаев формулировки усилены) наряду с утверждениями, не вошедшими в [4].

Так как в нашем случае область не является ограниченной, то данная выше формулировка задачи Стеклова требует дополнений. Кроме того, из-за симметрии задачи (область симметрична относительно оси ординат, а коэффициент $p$ – четная функция абсциссы) удобно рассматривать раздельно случаи, когда собственные функции являются четными по $x$ (симметричные моды $u^{(+)}$) и нечетными по $x$ (антисимметричные моды $u^{(-)}$). Каждую из этих мод достаточно рассматривать в замкнутом квадранте $\overline{Q} = \{x \geqslant 0,\ y \leqslant 0\}$, и соответствующие краевые задачи можно записать единообразно в виде:

$$\nabla^2 u^{(\pm)} = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.2}$$

$$\partial_x u^{(+)} = 0, \quad u^{(-)} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ y < 0, \tag{1.3}$$

$$\partial_y u^{(\pm)} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ 0 < x < b,\ x > b + 1, \tag{1.4}$$

$$\partial_y u^{(\pm)} = \nu^{(\pm)} u^{(\pm)} \quad \text{при} \quad y = 0,\ b < x < b + 1, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_Q \left|\nabla u^{(\pm)}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty. \tag{1.6}$$

Последнее условие выражает конечность кинетической энергии. Заметим, что из этого условия вытекает конечность и потенциальной энергии $\int_F |u^{(\pm)}|^2\,\mathrm{d}x$, где $F = \{b < x < b + 1,\ y = 0\}$.

В [4] анонсировано, что

$$0 = \nu_0^{(+)} < \nu_1^{(+)} < \nu_2^{(+)} < \ldots < \nu_n^{(+)} < \ldots,$$

т.е. все собственные значения, которым соответствуют симметричные моды, являются простыми. Этот факт будет доказан здесь как и аналогичный факт для собственных значений, соответствующих антисимметричным модам,

$$0 < \nu_1^{(-)} < \nu_2^{(-)} < \ldots < \nu_n^{(-)} < \ldots ,$$

который был анонсирован в [4] лишь для значений $b$, достаточно близких к нулю. При этом $\nu_n^{(-)} \neq \nu_m^{(+)}$ для любых $b \geqslant 0$ и $n, m \geqslant 1$. Нами доказано в [4], что $\nu_n^{(-)}$ $(\nu_n^{(+)})$, $n = 1, 2, \ldots$, является монотонно убывающей (возрастающей) функцией аргумента $b$, и при $b > 0$ имеют место следующие формулы для производных:

$$\frac{\mathrm{d}\nu_n^{(+)}}{\mathrm{d}b} = \frac{\int_{-\infty}^{0} \left|\partial_y u_n^{(+)}(0, y)\right|^2 \mathrm{d}y}{\int_b^{b+1} \left|u_n^{(+)}(x, 0)\right|^2 \mathrm{d}x}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu_n^{(-)}}{\mathrm{d}b} = -\frac{\int_{-\infty}^{0} \left|\partial_x u_n^{(-)}(0, y)\right|^2 \mathrm{d}y}{\int_b^{b+1} \left|u_n^{(-)}(x, 0)\right|^2 \mathrm{d}x}. \tag{1.8}$$

В заключение вводного параграфа отметим, что случай $b = 0$ (т.е. задача, описывающая колебания жидкости в случае, когда в крышке имеется единственная прорезь) рассматривался в многих работах (см. обзор [5] и цитированную там литературу), т.к. соответствующие собственные значения служат универсальными верхними границами для собственных значений в плоских областях, имеющих отрезок той же длины в качестве свободной поверхности.

## 2. Вспомогательные утверждения

Используя стандартные методы (они описаны, например, в книге Назарова и Пламеневского [6], гл. 2), устанавливается, что в некоторой окрестности точки $(b+1, 0)$ для собственной функции $u^{(\pm)}$ задачи (1.3)–(1.6) справедлива формула:

$$u^{(\pm)}(\rho, \theta) = c^{(\pm)}\left\{\pi/\nu^{(\pm)} + \rho\left(\cos\theta \log\rho - \theta \sin\theta\right)\right\} \\ + d^{(\pm)}\rho\cos\theta + \psi^{(\pm)}(\rho, \theta). \tag{2.1}$$

Здесь $(\rho, \theta)$ – полярные координаты, такие что $x + \mathrm{i}y = b + 1 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [-\pi, 0]$, $c^{(\pm)}$ и $d^{(\pm)}$ – константы, а для функции $\psi^{(\pm)}$ имеют место оценки: $\psi^{(\pm)} = O(\rho^{1+\delta})$, $\left|\nabla\psi^{(\pm)}\right| = O(\rho^{\delta})$ и $\left|\nabla_2\psi^{(\pm)}\right| = O(\rho^{\delta-1})$

при $\rho \to 0$, где $\delta > 0$ и $\nabla_2\psi^{(\pm)}$ обозначает матрицу вторых производных.

Формула, аналогичная (2.1), имеет место и в окрестности точки $(b, 0)$. Таким образом, функция $u^{(\pm)}$ непрерывна всюду в $\overline{Q}$, а градиент $\nabla u^{(\pm)}$ имеет логарифмические особенности в точках, разделяющих свободную поверхность $F$ и твердую границу $\partial\mathbb{R}^2_-\setminus\overline{F}$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $u^{(+)}$ удовлетворяет задаче* (1.3)–(1.6) *при $\nu^{(+)} > 0$. Если $u^{(+)}$ принадлежит пространству Соболева $H^1(Q)$, то $u^{(+)} = 0$ в $\overline{Q}$.*

**Доказательство.** Поскольку $u^{(+)} \in H^1(Q)$, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность $\{R_m\}$, такая что при $m \to \infty$

$$R_m^2 \int\limits_{-\pi/2}^{0} |\nabla u(R_m, \varphi)|^2 \,\mathrm{d}\varphi \to 0, \quad R_m^2 \int\limits_{-\pi/2}^{0} \bigl[u(R_m, \varphi)\bigr]^2 \,\mathrm{d}\varphi \to 0. \qquad (2.2)$$

Здесь и далее в доказательстве мы пишем $u$ вместо $u^{(+)}$; $(R, \varphi)$ – полярные координаты с центром в начале координат $(x, y)$.

Пусть $v$ – сопряженная к $u$ гармоническая функция, такая что

$$v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ y < 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < b,\ y = 0. \qquad (2.3)$$

Это возможно в силу (1.3) и (1.4). Из последнего условия вытекает также, что

$$v = C = \mathrm{const} \quad \text{при} \quad x > b + 1,\ y = 0. \qquad (2.4)$$

Покажем, что $C = 0$. В силу (2.3) имеем

$$v(R_m, \varphi_0) = \int\limits_{-\pi/2}^{\varphi_0} \partial_\varphi v(R_m, \varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

где $-\pi/2 \leqslant \varphi_0 \leqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} C^2 = \bigl[v(R_m, 0)\bigr]^2 &\leqslant \frac{\pi}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{0} \bigl[\partial_\varphi v(R_m, \varphi)\bigr]^2 \,\mathrm{d}\varphi \\ &\leqslant \frac{\pi}{2} R_m^2 \int\limits_{-\pi/2}^{0} \bigl|\nabla v(R_m, \varphi)\bigr|^2 \,\mathrm{d}\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty, \end{aligned}$$

где последнее соотношение справедливо в силу (2.2). Тем самым, $C = 0$. Более того, приведенное рассуждение показывает, что

$$v(R_m, \varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{для} \quad -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0.$$

Рассмотрим кольцевой сектор $\{R_m \leqslant r \leqslant R_{m+1},\ -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0\}$. На прямолинейных отрезках его границы функция $v$ обращается в ноль, а на дугах окружностей она стремится к нулю при $m \to \infty$. Отсюда и из принципа максимума вытекает, что $v(r, \varphi) \to 0$ при $r \to \infty$. Аналогично доказывается, что $u(r, \varphi) \to 0$ при $r \to \infty$. Отличие от приведенного доказательства для $v$ состоит в том, что вместо однородного условия Дирихле на прямолинейных частях границы кольцевого сектора имеется однородное условие Неймана. Поэтому надо воспользоваться леммой Хопфа, согласно которой нормальная производная не может обращаться в ноль в точке границы, в которой $u$ достигает максимума или минимума.

Согласно принципу симметрии Шварца голоморфная функция

$$u(z) + \mathrm{i}v(z), \quad z = x + \mathrm{i}y,$$

продолжается на всю комплексную плоскость, из которой вырезан круг, имеющий радиус больший чем $b + 1$. Точка $z = \infty$ является регулярной для этой аналитической функции, а из доказанного убывания функций $u$ и $v$ и краевых условий, которым они удовлетворяют, вытекает, что разложение в окрестности бесконечности имеет вид:

$$u(z) + \mathrm{i}v(z) = \mathrm{const} \cdot z^{-2} + \dots \tag{2.5}$$

Сказанное в начале этого параграфа про поведение функции $u$ вблизи оси абсцисс переносится и на функцию $v$. В частности, вблизи точки $(b + 1, 0)$ имеет место асимптотика при $\rho \to 0$

$$v(\rho, \theta) = -c^{(+)}\rho\big[\sin\theta \log\rho + \theta\cos\theta\big] + d^{(+)}\rho\sin\theta + \phi(\rho, \theta), \tag{2.6}$$

где $c^{(+)}$ и $d^{(+)}$ – те же, что и в формуле (2.1), $\phi = O(\rho^{1+\delta})$ и $|\nabla\phi| = O(\rho^{\delta})$. Это позволяет применить к гармоническим функциям $x$ и $u^2 - v^2$ формулу Грина в области $\{0 < r < R,\ -\pi/2 < \varphi < 0\}$, а возникающий при этом интеграл по дуге окружности стремится к нулю при $R \to \infty$, что является следствием формулы (2.5). В результате получаем равенство

$$\int\limits_{\partial Q} \big\{ \big(u^2 - v^2\big) n_x - x\partial_{\mathbf{n}}\big(u^2 - v^2\big) \big\}\, \mathrm{d}s = 0, \tag{2.7}$$

которое после упрощений, основанных на краевых условиях для $u$ и $v$, принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left[u(0,y)\right]^2 \mathrm{d}y + \int\limits_{b}^{b+1} x\, \partial_y \left(u^2 - v^2\right) \mathrm{d}x = 0. \tag{2.8}$$

Согласно уравнениям Коши–Римана $\partial_y \left(u^2 - v^2\right) = -\partial_x \left(2uv\right)$, что позволяет применить интегрирование по частям в последнем интеграле, при этом внеинтегральные члены обращаются в ноль вследствие краевых условий для $v$ и непрерывности функции в $\overline{Q}$ (см.(2.6)). В результате из (2.8) получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left[u(0,y)\right]^2 \mathrm{d}y + 2\int\limits_{F} uv\, \mathrm{d}x = 0.$$

Воспользуемся краевым условием (1.5) в последнем интеграле. Тогда имеем

$$2\int\limits_{F} uv\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\nu^{(+)}} \int\limits_{F} v\partial_y u\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\nu^{(+)}} \int\limits_{F} \partial_x (v^2)\, \mathrm{d}x = 0,$$

где снова использовались соотношения Коши–Римана и краевые условия для $v$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left[u(0,y)\right]^2 \mathrm{d}y = 0,$$

откуда вытекает, что

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ y < 0.$$

Это условие и (1.3) для $u^{(+)} = u$ позволяют применить теорему о единственности решения задачи Коши для уравнения Лапласа, гарантирующую, что $u = 0$ в $\overline{Q}$. $\bullet$

Заметим, что приведенное доказательство пригодно и для случая, когда свободная поверхность связна ($b = 0$).

## 3. Антисимметричные моды

**3.1. Спектральная задача для интегрального оператора.**

В заметке [4] установлено, что в антисимметричном случае задача (1.2)–(1.6) эквивалентна следующей спектральной задаче

$$w^{(-)}(x) = \frac{\nu^{(-)}}{\pi} \int_0^1 \Big[\log(x+\xi+2b) - \log|x-\xi|\Big]\, w^{(-)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad x \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{K}^{(-)}$ (зависимость от параметра $b$ не указывается явно, когда в этом нет необходимости) является компактным, самосопряженным, положительным оператором в пространстве $L_2(0,1)$, и ядро $\mathrm{Ker}\mathbf{K}^{(-)}$ тривиально.

Непосредственным следствием уравнения (3.1) является возможность явно вычислить

$$\Delta(b) = \sum_1^\infty \big[\nu_n^{(-)}(b)\big]^{-2} = \pi^{-2} \int_0^1\!\!\int_0^1 \big[\log(x+\xi+2b) - \log|x-\xi|\big]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

Для вычисления последнего двойного интеграла его следует разбить на сумму нескольких слагаемых и несколько раз проинтегрировать по частям, пользуясь при этом формулами 1.15, 1.16, 5.4, 5.5, 5.9 и 5.14 из справочника [7], §1.6. В результате довольно длинных вычислений получаем

$$\begin{aligned}
\pi^2\Delta(b) = {} & (1+2\,b)\,\pi^2/6 + 4b^2\log^2 2 + \{1+2\,b\,(1+b)\}\log^2(1+b) \\
& -(1+2b)^2\log^2(1+2b) + 2\Big\{\big[1+2b\,(1+b)\big]\log 2 \\
& - (1+2b)\log b\Big\}\log(1+b) + 2\,(1+2b)\log(2+2b)\log(1+2b) \\
& -2\,\big\{\big[1+2b\,(1-b)\big]\log 2 - b^2\log b\big\}\log b \\
& -\Big\{2+4\,(1-b)\,b\Big\}\mathrm{Li}_2(-(2b)^{-1}) + 4\,(1+b)^2\,\mathrm{Li}_2\frac{1}{2+2b} \\
& +2(1+2b)\left\{\mathrm{Li}_2(-1-b^{-1}) - \mathrm{Li}_2(-b) - \mathrm{Li}_2\frac{1+2b}{2+2b}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\mathrm{Li}_2(z) = \int_0^z t^{-1}\log(1-t)\,\mathrm{d}t$ – это дилогарифмическая функция, являющаяся частным случаем полилогарифма $\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k/k^n$, свойства которого описаны в книге [8].

Формула (3.2) обобщает равенство

$$\Delta(0) = 1/3, \tag{3.3}$$

доказанное в заметке [9] (ранее предположение о справедливости равенства (3.3) было сделано в работе [10] на основании численных результатов). Предельный переход в формуле (3.2) при $b \to 0$ естественно приводит к равенству (3.3), но это требует использования равенств:

$$\mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2 2$$

(см. формулы (1.8), (1.9) и (1.16) в [8]). Также используются асимптотические формулы:

$$\mathrm{Li}_2(x) = x + O\big(x^2\big) \quad \text{при} \quad x \to -0,$$
$$\mathrm{Li}_2(x) = -\frac{1}{2}\log^2|x| - \frac{\pi^2}{6} + O\big(x^{-1}\big) \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

вытекающие из соотношений (1.3), (1.4) и (1.7) в [8].

Из (3.2) и асимптотических формул для $\mathrm{Li}_2(x)$ следует, что

$$\Delta(b) = \frac{1}{\pi^2}\left[\log^2(2\,b) + 3\,\log(2\,b) + 7/2\right] + O(b^{-1}) \quad \text{при} \quad b \to \infty.$$

Здесь главный член асимптотики – это вклад фундаментального собственного значения, что вытекает из доказанной ниже теоремы 3.1.

### 3.2. Асимптотика фундаментального собственного значения.

**Теорема 3.1.** *При $b \to \infty$ имеют место следующие асимптотические представления:*

$$\frac{\pi}{\nu_1^{(-)}} = \log(2b) + \frac{3}{2} + O\left(1/\log b\right), \tag{3.4}$$

$$1 - w_1^{(-)}(x) = \frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + x\log x + (1-x)\log(1-x)\right] + O\left(1/\log^2 b\right). \tag{3.5}$$

*Последнее равенство выполняется равномерно по* $x \in [0,1]$ *для* $w_1^{(-)}$*, нормированной так, что*

$$\int\limits_0^1 w_1^{(-)}(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{3.6}$$

*(ввиду положительности оператора* $\mathbf{K}^{(-)}$*,* $w_1^{(-)} \geqslant 0$*,* $w_1^{(-)} \not\equiv 0$*).*

**Доказательство.** Интегрируя уравнение (3.1) по $x$ и используя (3.6), находим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \left[\log(2b) + \log\left(1 + \frac{x+\xi}{2b}\right) - \log|x-\xi|\right] w_1^{(-)}(\xi;b)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\left\{\log(2b) + \int\limits_0^1 w_1^{(-)}(\xi;b)\Big[f_1(\xi,b) + f_2(\xi)\Big]\,\mathrm{d}\xi\right\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\xi,b) &= \int\limits_0^1 \log\left(1 + \frac{x+\xi}{2b}\right)\mathrm{d}x = \\ &= (1+2b+\xi)\log(1+2b+\xi) - (2b+\xi)\log(2b+\xi) \\ &- \log(2b) - 1, \\ f_2(\xi) &= -\int\limits_0^1 \log|x-\xi|\ \mathrm{d}x = 1 - \xi\log\xi - (1-\xi)\log(1-\xi). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Поскольку

$$\partial_\xi f_1(\xi,b) = \log(1+2b+\xi) - \log(2b+\xi) > 0,$$

то функция $f_1(\xi,b)$ является монотонно возрастающей функцией $\xi$. Отсюда, учитывая условие (3.6) и положительность $w_1^{(-)}$, получаем, что

$$\left|\int\limits_0^1 f_1(\xi,b) w_1^{(-)}(\xi;b)\,\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \max\left\{|f_1(0,b)|, |f_1(1,b)|\right\}.$$

Здесь

$$f_1(0,b) = (2b+1)\log\left(1+(2b)^{-1}\right) - 1,$$
$$f_1(1,b) = 2(1+b)\log[2(1+b)] - (2b+1)\log(2b+1) - \log(2b) - 1,$$

откуда для этих величин вытекает оценка $O(b^{-1})$ при $b \to \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 w_1^{(-)}(\xi;b) f_1(\xi,b)\,\mathrm{d}\xi = O(b^{-1}) \quad \text{при} \quad b \to \infty,$$

и согласно (3.7) имеем

$$\pi/\nu_1^{(-)} = \log(2b) + \sigma(b) + O(b^{-1}) \quad \text{при} \quad b \to \infty, \tag{3.9}$$

где $\sigma(b) = \int_0^1 w_1^{(-)}(\xi;b) f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant \sigma(b) \leqslant 1 + \log 2, \tag{3.10}$$

которые доказываются следующим образом.

Поскольку $w_1^{(-)}(\xi,b) \geqslant 0$ и справедливо условие (3.6), то по теореме о среднем $\sigma(b) = f_2(\xi_*(b))$, где $\xi_*(b) \in [0,1]$. Так как $f_2'(\xi) = \log(\xi^{-1}-1)$, то $f_2(\xi)$ монотонно возрастает при $\xi \in [0,1/2]$ и монотонно убывает при $\xi \in [1/2,1]$. Для получения оценок (3.10) остается заметить, что $f_2(0) = f_2(1) = 1$ и $f_2(1/2) = 1 + \log 2$. Чтобы найти асимптотику функции $\sigma(b)$, что завершит доказательство формулы (3.4), нам потребуется следующий факт

$$\left\| w_1^{(-)} - 1 \right\|_C = \max_{x\in[0,1]} \left| w_1^{(-)}(x;b) - 1 \right| = O\left([\log b]^{-1}\right) \quad \text{при} \quad b \to \infty \tag{3.11}$$

Для его доказательства разобьем интеграл в уравнении (3.1) на сумму двух и применим теорему о среднем к первому из них:

$$w_1^{(-)}(x;b) = \frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\left[\log(2b) + \log\left(1 + \frac{x+\xi_*(b)}{2b}\right)\right.$$
$$\left. + f_2(x) - \int\limits_0^1 \left(w_1^{(-)}(\xi;b) - 1\right)\log|x-\xi|\,\mathrm{d}\xi\right]. \tag{3.12}$$

Вычтем единицу из обеих частей этого равенства и оценим норму разности в $C([0,1])$:

$$\big\|w_1^{(-)} - 1\big\|_C \leqslant \frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\Big[\|\sigma\|_C + \|f_2\|_C + c\|w_1^{(-)} - 1\|_C + O(b^{-1})\Big], \quad (3.13)$$

где $c = \| \int_0^1 \big|\log|x-\xi|\big| \,\mathrm{d}\xi\|_C$. Для получения правой части в (3.13) учтено соотношение (3.9), записанное в форме:

$$1 = \frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\big[\log(2b) + \sigma(b) + O(b^{-1})\big],$$

а также асимптотическая формула

$$\log\left(1 + \frac{x + \xi_*(b)}{2b}\right) = O(b^{-1}),$$

справедливая при $b \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$. Согласно (3.8) и доказательству формулы (3.10)

$$\|\sigma\|_C = \|f_2\|_C = 1 + \log 2,$$

что вместе с (3.13) приводит к неравенству

$$\big\|w_1^{(-)} - 1\big\|_C \leqslant \frac{2 + 2\log 2 + O(b^{-1})}{c + \pi/\nu_1^{(-)}},$$

из которого асимптотика (3.11) вытекает вследствие (3.9).

Теперь покажем, что при $b \to \infty$ выполняется равенство

$$\sigma(b) = 3/2 + O\big([\log b]^{-1}\big),$$

которое вместе с (3.9) доказывает формулу (3.4). Чтобы установить справедливость последнего соотношения напишем

$$\sigma(b) = \int\limits_0^1 f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^1 f_2(\xi)\big[w_1^{(-)}(\xi;b) - 1\big]\,\mathrm{d}\xi$$

и заметим, что первый интеграл в правой части равен $3/2$, а последний интеграл есть $O\big([\log b]^{-1}\big)$ в силу (3.11).

Остается доказать формулу (3.5), для чего вычтем единицу из обеих частей равенства (3.12), а затем заменим выражение

$\nu_1^{(-)}\pi^{-1}\log(2b)-1$ его асимптотикой. Это приводит к равенству

$$w_1^{(-)}(x;b)-1=\frac{\nu_1^{(-)}}{\pi}\Big\{\frac{3}{2}+\int_0^1\log|x-\xi|\,\mathrm{d}\xi$$
$$+\int_0^1\big[w_1^{(-)}(\xi;b)-1\big]\log|x-\xi|\,\mathrm{d}\xi+O\big(b^{-1}\big)\Big\}.$$

Отсюда и из формул (3.8) и (3.11) получаем (3.5). •

**3.3. Простота собственных значений при малых $b$.**

Для собственных значений $\nu_n^{(-)}$ $(n=1,2,\dots)$, которым соответствуют антисимметричные собственные функции, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *Все собственные значения $\nu_n^{(-)}(b)$ $(n=1,2,\dots)$ спектральной задачи (3.1) являются простыми собственными значениями при $b\geqslant 0$.*

Доказательство этого утверждения разбито на несколько лемм (та их часть, которая касается малых значений $b$ доказана здесь, а остальные приведены в пп. 3.4, 3.5), но прежде чем сформулировать первую из них заметим, что простота $\nu_1^{(-)}(b)$ вытекает из теоремы Ентча (см. [11], гл. IV, §18), примененной к оператору $\mathbf{K}_b^{(-)}$ (см. уравнение (3.1)).

**Лемма 3.1.** *Собственные значения $\nu_n^{(-)}$ $(n=1,2,\dots)$ являются простыми в случае, когда свободная поверхность $F$ связна $(b=0)$.*

**Доказательство.** Приведем к противоречию противоположное утверждение. Допустим, что существует собственное значение $\nu\in\big\{\nu_n^{(-)}(0)\big\}_1^\infty$, которому соответствуют две линейно независимые собственные функции $u_1$ и $u_2$, удовлетворяющие задаче (1.2)–(1.6), где $b=0$, и условие (1.3) имеет вид:

$$u_i=0\quad\text{при}\quad x=0,\ y<0,\ i=1,2. \tag{3.14}$$

Как показано в заметке [4], имеет место представление

$$u_i(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 w_i(\xi)\log\frac{(x+\xi)^2+y^2}{(x-\xi)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi,\qquad i=1,2,$$

где $w_i$ – собственная функция уравнения (3.1), в котором $b = 0$, а $\nu = \nu^{(-)}$. Следовательно, для производных порядка $k$ от $u_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ справедлива оценка $O\big(|z|^{-k-1}\big)$ при $|z| = |x + \mathrm{i}y| \to \infty$.

Рассмотрим функции $\partial_x u_i$ $(i = 1, 2)$, для которых условие (1.3) принимает вид:

$$\partial_x u_i = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ y = 0.$$

Это вытекает из условия (3.14), гарантирующего гармоническую продолжимость функций $u_1$ и $u_2$ в квадрант $\{x < 0,\ y < 0\}$ нечетным по $x$ образом. Кроме того, для $\partial_x u_i$ $(i = 1, 2)$ выполнены условия (1.2), (1.4) и (1.5). Наконец, согласно формуле (2.1) вблизи точки $(1, 0)$ справедлива асимптотическая формула:

$$\partial_x u_i(\rho, \theta) = c_i \log \rho + c_i \cos 2\theta + d_i + O(\rho^\delta), \quad \text{при} \quad \rho \to 0,\ i = 1, 2.$$

Отсюда и из установленных выше оценок производных $u_i$ на бесконечности следует, что если $c_i = 0$, то функция $\partial_x u_i$ принадлежит $H^1(Q)$. Тогда к ней применима Лемма 2.1, согласно которой $\partial_x u_i = 0$ в $\overline{Q}$. Следовательно $u_i(x, y) = u_i(y)$, и благодаря условию (3.14) функция $u_i$ есть тождественный ноль в $\overline{Q}$.

Тем самым, из предположения о существовании нетривиальных собственных функций $u_1$ и $u_2$ следует, что коэффициенты $c_1$, $c_2$ отличны от нуля. Теперь приведенные выше рассуждения можно применить к линейной комбинации $c_2 \partial_x u_1 - c_1 \partial_x u_2$ и получить равенство $c_2 u_1 - c_1 u_2 = 0$ в $\overline{Q}$, противоречащее предположению о линейной независимости $u_1$ и $u_2$. $\bullet$

Из Леммы 3.1 и классических результатов о непрерывных возмущениях самосопряженных операторов (см., например [12], гл. 9, §4) вытекает

**Лемма 3.2.** *Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует $\delta_n > 0$ такое, что для $0 \leqslant b < \delta_n$ собственное значение $\nu_n^{(-)}(b)$ оператора $\mathbf{K}_b^{(-)}$ является простым и $\nu_n^{(-)}(b) \to \nu_n^{(-)}(0)$ при $b \to 0$.*

**Доказательство.** Так как

$$\Big(\big(\mathbf{K}_b^{(-)} - \mathbf{K}_0^{(-)}\big) w\Big)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 w(\xi) \log \frac{x + \xi + 2b}{x + \xi}\, \mathrm{d}\xi, \tag{3.15}$$

то

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{K}_b^{(-)} - \mathbf{K}_0^{(-)}\right\|^2 \leqslant \pi^{-2} \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[\log(x+\xi+2b) - \log(x+\xi)\right]^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi \\
= \pi^{-2}\bigl\{2b^2\log^2(b) + 2\,(1+b)^2\log^2(1+b) - 4b^2\log(4b) \\
- 4b\,(1+b)\log(1+b) - (1+2b)^2\log^2(1+2b) \\
+ 4b\,(1+2b)\log(1+2b) + 4b\,(1+b)\log(2)\log(2b^2) \\
- 4b\,(2+b)\,\mathrm{Li}_2\bigl(-b^{-1}\bigr) + 8b\,(1+b)\,\mathrm{Li}_2\bigl(-(2b)^{-1}\bigr)\bigr\},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

где интеграл вычисляется тем же способом, что и выражение в формуле (3.2). Формулы, использованные для предельного перехода от (3.2) к (3.3) позволяют найти для правой части в неравенстве (3.16) асимптотику, которая имеет вид:

$$
\pi^{-2}\left[10 - \frac{2\pi^2}{3} - 4\log(4b)\right]b^2 + O\bigl(b^3\bigr) \quad \text{при} \quad b \to 0.
$$

Эта асимптотика оценивает скорость, с которой оператор $\mathbf{K}_b^{(-)}$ сходится по норме к $\mathbf{K}_0^{(-)}$, когда $b \to 0$. Теперь утверждение леммы вытекает из Леммы 3.1 и упомянутых результатов теории возмущений самосопряженных операторов. •

**3.4. Пределы собственных значений при $b \to \infty$.**

Согласно Теореме 3.1, доказанной в п. 3.2, $\nu_1^{(-)}(b) \to 0$ при $b \to \infty$. Здесь рассматривается вопрос о предельных значениях $\nu_n^{(-)}(\infty)$, $n = 2, 3, \ldots$, к которым стремятся при $b \to \infty$ остальные собственные значения оператора $\mathbf{K}_b^{(-)}$.

**Теорема 3.3.** *Пределы $\nu_n^{(-)}(\infty)$, $n = 2, 3, \ldots$, существуют и для них справедливы равенства:*

$$
\nu_n^{(-)}(\infty) = 2\lambda_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{3.17}
$$

*где* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *– последовательность собственных значений задачи:*

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u = 0 \quad &\textit{в} \quad \mathbb{R}^2_-; \\ \partial_y u = \lambda u \quad &\textit{при} \quad |x| < 1,\ y = 0; \\ \partial_y u = 0 \quad &\textit{при} \quad |x| > 1,\ y = 0; \\ \int\limits_{-1}^{1} u(x,0)\,\mathrm{d}x = 0; &\int\limits_{\mathbb{R}^2_-} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы заметим, что в наших обозначениях

$$\lambda_{2k-1} = \nu_k^{(-)}(0), \quad \lambda_{2k} = \nu_k^{(+)}(0), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.19}$$

чередование симметричных и антисимметричных мод следует, например, из результатов работы [10].

**Доказательство.** Через $L_2^{(c)}(0,1)$ обозначим ортогональное дополнение в $L_2(0,1)$ к одномерному подпространству, состоящему из констант. Ясно, что проектор на $L_2^{(c)}(0,1)$ имеет вид:

$$\big(Pw\big)(x) = w(x) - \int\limits_0^1 w(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Аналогично, пусть $L_2^{(w_1)}(0,1)$ – зависящее от $b$ подпространство $L_2(0,1)$, ортогональное положительному решению $w_1 = w_1^{(-)}$ уравнения (3.1) при $\nu^{(-)} = \nu_1^{(-)}$, являющемуся фундаментальным характеристическим значением. Оператор проектирования на $L_2^{(w_1)}(0,1)$ определяется формулой

$$\big(P_1 w\big)(x) = w(x) - \frac{1}{w_1(x)} \int\limits_0^1 w_1(\xi) w(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Оценим норму $\|P_1 - P\|$ при $b \to \infty$, для чего воспользуемся неравенством

$$\big\|P_1 - P\big\|^2 \leqslant \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 \big[1 - w_1(\xi)/w_1(x)\big]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

Из асимптотик (3.4) и (3.5) вытекает следующая формула

$$1-\frac{w_1(\xi)}{w_1(x)}=\frac{s(\xi)-s(x)}{\log 2b}+O(1/\log^2 b) \quad \text{при} \quad b\to\infty,$$

где $s(x)=x\log x+(1-x)\log(1-x)+1/2$. Так как двойной интеграл от функции $[s(x)-s(\xi)]^2$ конечен, то предыдущие соотношения приводят к оценке

$$\|P_1-P\|=O(1/\log b) \quad \text{при} \quad b\to\infty. \tag{3.20}$$

Для рассмотрения собственных значений $\nu_k^{(-)}$, $k=2,3,\dots$, спроектируем уравнение (3.1) на подпространство $L_2^{(w_1)}(0,1)$:

$$P_1 w^{(-)}=\nu^{(-)}P_1\mathbf{K}_b^{(-)}P_1 w^{(-)}, \tag{3.21}$$

и покажем, что

$$\big\|P_1\mathbf{K}_b^{(-)}P_1-P\mathbf{K}^{(0)}P\big\|=O(1/\log b) \quad \text{при} \quad b\to\infty. \tag{3.22}$$

Здесь $\big(\mathbf{K}^{(0)}w\big)(x)=-\pi^{-1}\int_0^1 w(\xi)\log|x-\xi|\,\mathrm{d}\xi$. Для обоснования оценки (3.22) воспользуемся равенством $\mathbf{K}_b^{(-)}=\mathbf{K}^{(0)}+\mathbf{K}^{(1)}+\mathbf{K}^{(2)}$, где последние два оператора зависят от $b$ и заданы следующим образом:

$$\big(\mathbf{K}^{(1)}w\big)(x)=\frac{\log 2b}{\pi}\int_0^1 w(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\big(\mathbf{K}^{(2)}w\big)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 w(\xi)\log\Big(\frac{x+\xi}{2b}+1\Big)\,\mathrm{d}\xi.$$

Тогда оператор в правой части (3.21) представим в виде:

$$P_1\mathbf{K}_b^{(-)}P_1=\sum_{m=0}^{2}\Big[\big(P_1-P\big)\mathbf{K}^{(m)}\big(P_1-P\big)$$
$$+\big(P_1-P\big)\mathbf{K}^{(m)}P+P\mathbf{K}^{(m)}\big(P_1-P\big)+P\mathbf{K}^{(m)}P\Big].$$

Устремляя $b\to\infty$, оценим вклады слагаемых с $m=0,1,2$ в отдельности.

Так как операторы $P$ и $\mathbf{K}^{(0)}$ не зависят от $b$, то для первых трех слагаемых, входящих в последнюю сумму при $m = 0$, имеет место оценка $O(1/\log b)$, которая вытекает из (3.20). Далее, из очевидных равенств $P\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)}P = 0$ следует, что член, соответствующий $m = 1$, равен $(P_1 - P)\mathbf{K}^{(1)}(P_1 - P)$. Поэтому, вследствие соотношения (3.20), для него также справедлива оценка $O(1/\log b)$ при $b \to \infty$. Наконец, для слагаемого, отвечающего $m = 2$, оценка $O(b^{-1})$ вытекает из непосредственно проверяемого факта: $\|\mathbf{K}^{(2)}\| = O(b^{-1})$ при $b \to \infty$.

Объединяя полученные оценки, приходим к соотношению (3.22). Оно, в свою очередь, позволяет применить рассуждения, использованные в доказательстве Леммы 3.2, и установить, что при $b \to \infty$ собственные значения оператора $P_1\mathbf{K}_b^{(-)}P_1$ сходятся к собственным значениям оператора $P\mathbf{K}^{(0)}P$. Как следует из результатов § 3 работы [13], замены переменных $x \to 2x - 1$ и $\xi \to 2\xi - 1$ преобразуют последний оператор в интегральный оператор, набор характеристических значений которого совпадает со спектром краевой задачи, фигурирующей в формулировке теоремы. Тем самым, пределы $\nu_n^{(-)}(\infty)$, $n = 2, 3, \ldots$, существуют. Для доказательства равенств (3.17) остается заметить, что коэффициент два в их правой части возникает как результат растяжения координат в приведенных выше заменах переменных. •

### 3.5. Простота собственных значений спектральной задачи (3.1).

Теперь мы можем завершить доказательство основного утверждения данного параграфа.

**Доказательство Теоремы 3.2.** Поскольку оператор $\mathbf{K}^{(-)}$ уравнения (3.1) зависит от $b$ аналитически при $b > 0$, аналитическая теория возмущений операторов (применительно к самосопряженным операторам см. [14, ч. VII, п. 3]) гарантирует, что для любого значения $n$ график $\nu_n^{(-)}(b)$ представляет собой кусочно-гладкую кривую, которая не может иметь конечных точек внутри области $\{\nu > 0, b > 0\}$. Причем кратность сохраняется на гладких компонентах, а изломы соответствуют точкам пересечения кривых, отвечающих разным модам. Покажем, что на самом деле таких точек пересечения нет.

Для собственных значений задачи (3.18) имеют место неравенства (см. [10]):

$$n\frac{\pi}{2} < \lambda_n < (n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.23}$$

из которых ввиду (3.19) следует, что $\nu_n^{(-)}(0) \in \big(n\pi - \pi/2, n\pi\big)$, $n = 1, 2, \dots$. Принимая во внимание предельные при $b \to \infty$ свойства спектра, полученные в Теореме 3.3, имеем

$$\nu_{n+1}^{(-)}(\infty) = 2\lambda_n \in \big(n\pi, (n+1)\pi\big), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Рассмотрим полуполосу $\Pi_1 = \{b \geqslant 0,\ 0 < \nu < \pi\}$, которая полностью содержит график $\nu_1^{(-)}(b)$. Последнее вытекает из положительности и монотонности $\nu_1^{(-)}(b)$ по $b$, поскольку $\nu_1^{(-)}(0) \in (\pi/2, \pi)$. Допустим, что в полуполосе содержатся части графиков более высоких мод. При этом, из последней выделенной формулы следует, что интервал $(0, \pi)$ не содержит точек предельного при $b \to \infty$ спектра. Тем самым, ввиду монотонности по $b$ все содержащиеся в $\Pi_1$ кривые должны при $b \to \infty$ приходить к нулевому значению. Последнее является простым, и можно заключить, что моды с $n > 1$ не попадают в $\Pi_1$ – в этой полуполосе каждому значению $b \geqslant 0$ сопоставляется единственное значение $\nu_1^{(-)}(b)$, при этом $\nu_1^{(-)}(\infty) = 0$ (см. также Теорему 3.1).

Рассмотрим полуполосу $\Pi_2 = \{b \geqslant 0,\ \pi < \nu < 2\pi\}$. Поскольку $\nu_2^{(-)}(0) \in (3\pi/2, 2\pi)$ и $\nu_2^{(-)}(b)$ убывает по $b$, то график $\nu_2^{(-)}(b)$ полностью содержится в этой полуполосе. Допустим, что в $\Pi_2$ также содержатся части графиков более высоких мод. Эти функции монотонно убывают, но не могут попасть в интервал $\Pi_1$. Следовательно, при $b \to \infty$ кривые приходят к значению $2\lambda_1 \in \big(\pi, 2\pi\big)$. Из Леммы 3.1 и Теоремы 4.2, которая будет доказана в следующем параграфе, следует, что собственные значения $\lambda_n$ – простые. Поэтому можно заключить, что в $\Pi_2$ имеется единственная кривая $\nu_2^{(-)}(b)$. Продолжая этот процесс можно показать, что

$$\nu_n^{(-)}(b) \in \big((n-1)\pi, n\pi\big), \quad n = 1, 2, \dots, \quad b \geqslant 0. \tag{3.24}$$

Тем самым, кривые не пересекаются и кратность сохраняется на кривой $\nu_n^{(-)}(b)$, а из утверждения Леммы 3.2 следует, что кратность равна единице. Последнее завершает доказательство Теоремы 3.2. $\bullet$

## 4. Симметричные моды

### 4.1. Спектральная задача для интегрального оператора.

Начнем со свойства симметричных собственных функций, которое играет существенную роль в дальнейшем.

**Лемма 4.1.** *Если* $u^{(+)}(x,y)$ *– собственная функция задачи* (1.2)–(1.6)*, соответствующая* $\nu^{(+)} \neq 0$*, то справедливо равенство*

$$\int\limits_b^{b+1} u^{(+)}(x,0)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.1}$$

**Доказательство.** Пусть $r > b+1$, тогда согласно первой формуле Грина для $u^{(+)}$ в области $Q \cap \{|z| < r\}$, с учетом условий (1.2)–(1.5) имеем

$$\nu^{(+)} \int\limits_b^{b+1} u^{(+)}(x,0)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{C_r} \partial_{\mathbf{n}} u^{(+)}\,\mathrm{d}s,$$

где $C_r = Q \cap \{|z| = r\}$.

Последний интеграл стремится к нулю, когда $r$ стремится к бесконечности, принимая значения из некоторой последовательности (вследствие (1.6) имеет место первая из формул (2.2) в доказательстве Леммы 2.1). Переходя к пределу указанным способом, получаем равенство (4.1). •

Как и в случае антисимметричных мод, удобно свести задачу (1.2)–(1.6) к эквивалентной спектральной задаче для интегрального оператора. В работе [13], где рассматривалась задача, аналогичная нашей, но в предположении, что коэффициент $p$ в (1.1) равен единице только на одном интервале $(-1,1)$ оси абсцисс, для этой цели была предложена функция

$$\begin{aligned} W(z;\xi) = -\frac{1}{\pi}\Bigg\{ \log\frac{4(z-\xi)}{(1-2z)(1-2\xi)} - \frac{1+2z}{2}\log\left(\frac{1+2z}{1-2z}\right) \\ -\frac{1+2\xi}{2}\log\left(\frac{1+2\xi}{1-2\xi}\right) + \frac{1}{2} - \pi\mathrm{i}(z+\xi)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для $(x, y) \in \overline{Q}$ и $\xi \in (b, b+1)$ определим следующую функцию

$$G(x, y; \xi) = 2^{-1}\mathrm{Re}\big\{W(z+b+2^{-1}; \xi+b+2^{-1})$$
$$+W(z-b-2^{-1}; \xi-b-2^{-1}) + W(z+b+2^{-1}; -\xi+b+2^{-1})$$
$$+W(z-b-2^{-1}; -\xi-b-2^{-1})\big\} - G_0(b), \qquad (4.3)$$

где

$$G_0(b) = \frac{1}{2\pi}\big[2b^2\log(2b) + 2(1+b^2)\log[2(1+b)] - (1+2b)^2\log(1+2b)\big].$$

Данный выбор $G_0(b)$ обеспечивает выполнение условий

$$\int\limits_b^{b+1} G(x, 0; \xi)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^{b+1} G(x, 0; \xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \qquad (4.4)$$

Из построения $G$, ввиду свойств функции $W$, указанных в [13], следует что выполняется краевое условие

$$\partial_y\big(G(x, y, \xi) + \pi^{-1}\log|z-\xi|\big)\Big|_{y=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (0, b) \cup (b+1, +\infty) \\ -1 & \text{при } x \in (b, b+1) \end{cases} \qquad (4.5)$$

Пусть

$$H(\xi) = (\xi-b)\log(\xi-b) - (\xi+b)\log(\xi+b) + (1+b-\xi)\log(1+b-\xi)$$
$$+(1+b+\xi)\log(1+b+\xi), \qquad (4.6)$$

тогда нетрудно показать, что при $|z| \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$G(z, \xi) = \frac{1}{\pi} - G_0(b) - 2y + \frac{1}{\pi}H(\xi) + O(|z|^{-2}),$$
$$\partial_x G = O(|z|^{-3}), \quad \partial_y G = -2 + O(|z|^{-3}), \qquad (4.7)$$

которые выполняются равномерно по $\xi \in [b, b+1]$.

**Теорема 4.1.** *Задача* (1.2)–(1.6) *для симметричных мод эквивалентна спектральной задаче*

$$w^{(+)}(x) = \nu^{(+)}\int\limits_b^{b+1} G(x, 0; \xi)\, w^{(+)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad x \in (b, b+1), \qquad (4.8)$$

*рассматриваемой на пространстве $L_2(b, b+1)$. Интегральный оператор уравнения $\mathbf{K}^{(+)}$ в правой части (4.8) является компактным и самосопряженным, а $w^{(+)}(x) = u^{(+)}(x, 0)$, где последняя функция – след решения краевой задачи. Кроме того,*

$$u^{(+)}(x, y) = \nu^{(+)} \int\limits_{b}^{b+1} w^{(+)}(\xi)\, G(x, y; \xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad (x, y) \in \overline{Q}. \tag{4.9}$$

**Доказательство.** Пусть $u_n^{(+)}$ – решение задачи (1.2)–(1.6), отвечающее собственному значению $\nu_n^{(+)}$. Рассмотрим функцию

$$\hat{u}_n^{(+)}(x, y) = \nu_n^{(+)} \int\limits_{b}^{b+1} u_n^{(+)}(\xi, 0) G(x, y; \xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad (x, y) \in \overline{Q}, \tag{4.10}$$

которая, очевидно, гармонична и удовлетворяет первому условию (1.3). В силу соотношения (4.5) условие (1.4) также выполнено для $\hat{u}_n^{(+)}$, а формулы (4.7) гарантируют и справедливость условия (1.6). Ввиду (4.4) для $\hat{u}_n^{(+)}$ выполняется (4.1). Наконец, по теореме о предельных значениях нормальной производной потенциала простого слоя имеем

$$\partial_y \hat{u}_n^{(+)}(x, y) = \nu_n^{(+)} u_n^{(+)}(x, 0) \quad (x, y) \in F.$$

Ввиду (1.6) для $u_n^{(+)}$ справедлива первая из формул (2.2), где $\{R_m\}$ – некоторая стремящаяся к бесконечности последовательность. В области $Q_m = Q \cap \{|z| < R_m\}$ применим первую формулу Грина к гармонической функции $\tilde{u} = u_n^{(+)} - \hat{u}_n^{(+)}$ и получим равенство

$$0 = \int\limits_{Q_m} |\nabla \tilde{u}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = I_1(R_m) + I_2(R_m) + I_3(R_m), \tag{4.11}$$

где

$$I_1(R_m) = \int\limits_{C_{R_m}} \hat{u}_n^{(+)} \partial_{\mathbf{n}} \hat{u}_n^{(+)}\, \mathrm{d}s, \quad I_2(R_m) = -\int\limits_{C_{R_m}} \hat{u}_n^{(+)} \partial_{\mathbf{n}} u_n^{(+)}\, \mathrm{d}s,$$

$$I_3(R_m) = \int\limits_{C_{R_m}} u_n^{(+)} \left( \partial_{\mathbf{n}} u_n^{(+)} - \partial_{\mathbf{n}} \hat{u}_n^{(+)} \right) \mathrm{d}s.$$

Ввиду равенства (4.1) из определения (4.10) и формул (4.7) вытекают асимптотики:

$$\hat{u}_n^{(+)} = \mathrm{const} + O(|z|^{-2}), \quad |\nabla \hat{u}_n^{(+)}| = O(|z|^{-3}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty.$$

Поэтому $I_1(R_m) \to 0$ при $m \to \infty$, а вследствие первой из формул (2.2), и $I_2(R_m) \to 0$. Далее, для любой пары точек $z_1, z_2 \in C_{R_m}$ справедливы соотношения (ср. с доказательством Леммы 2.1):

$$\left|u_n^{(+)}(z_1) - u_n^{(+)}(z_2)\right|^2 = \Big| \int\limits_{C_{R_m}(z_1,z_2)} \partial_s u_n^{(+)}\,\mathrm{d}s \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi R_m}{2} \int\limits_{C_{R_m}} \left|\nabla u_n^{(+)}\right|^2 \mathrm{d}s \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

где $C_{R_m}(z_1, z_2)$ – часть дуги $C_{R_m}$, соединяющая точки $z_1$ и $z_2$. Отсюда вытекает, что

$$u_n^{(+)}(z) = c_m + \epsilon_m(z) \quad \text{для} \quad z \in C_{R_m}.$$

Здесь $\{c_m\}$ – некоторая последовательность, а

$$\max_{z \in C_{R_m}} |\epsilon(z)| = o(1) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Поскольку для $u_n^{(+)}$ и $\hat{u}_n^{(+)}$ выполняется (4.1), то (см. доказательство Леммы 4.1)

$$\int\limits_{C_{R_m}} \partial_{\mathbf{n}} u_n^{(+)}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{C_{R_m}} \partial_{\mathbf{n}} \hat{u}_n^{(+)}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Эти факты и первая формула (2.2) показывают, что $I_3(R_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Переходя к пределу $m \to \infty$ в тождестве (4.11) получаем, что

$$\int\limits_{Q} |\nabla \tilde{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Поэтому функции $u_n^{(+)}$ и $\hat{u}_n^{(+)}$ отличаются на константу, которая равна нулю, так как обе функции удовлетворяют условию (4.1).

Таким образом, установлено, что для решения задачи $u_n^{(+)}$ (1.2)–(1.6) имеет место представление (4.9), а из свойств потенциала простого слоя вытекает уравнение (4.8) для следа $u_n^{(+)}$ на $F$.

Чтобы завершить доказательство эквивалентности, покажем, что всякому решению уравнения (4.8) соответствует решение задачи (1.2)–(1.6), доставляемое формулой (4.9). Для этого достаточно воспользоваться свойствами потенциала простого слоя и описанными выше свойствами потенциала (4.10). Кроме того, следует отметить, что любое решение уравнения (4.8) удовлетворяет условию (4.1), поскольку для самосопряженного оператора $\mathbf{K}^{(+)}$ уравнения справедлива альтернатива Фредгольма, а, как следует из (4.4), $\mathrm{Ker}\mathbf{K}^{(+)}$ содержит константу. $\bullet$

Заметим, что интегральное уравнение (4.8) имеет более сложное ядро, чем уравнение для антисимметричных мод (3.1). Если же по аналогии с (3.1) написать уравнение

$$u^{(+)}(x) = -\nu^{(+)}\pi^{-1} \int\limits_b^{b+1} \Big[\log(x+\xi)+\log|x-\xi|\Big]\, u^{(+)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad x \in (b, b+1) \tag{4.12}$$

(именно такое уравнение использовалось в работе [15] в случае, когда $b = 0$), то для восстановления решения в $Q$ следует применить представление

$$u^{(+)}(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_b^{b+1} u^{(+)}(\xi)\, \log\Big[\big((x+\xi)^2+y^2\big)\big((x-\xi)^2+y^2\big)\Big]\,\mathrm{d}\xi.$$

Однако, условие (4.1) при этом не будет выполняться, так как в случае его выполнения решение убывает на бесконечности, что влечет его обращение в тождественный ноль ввиду Леммы 2.1. Таким образом, уравнение (4.12) не эквивалентно краевой задаче.

При этом уравнение (4.12) позволяет найти собственные значения, используя схему, предложенную в случае $b = 0$ в работе [15], согласно которой решение представляется рядом по полиномам Лежандра степени не меньше единицы. Тем самым решается спектральная задача для оператора $P\mathbf{K}_* P$, где $\mathbf{K}_*$ – интегральный оператор в (4.12), а $P$ – проектор на пространство $L_2^{(c)}(b, b+1)$, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(b, b+1)$ и удовлетворяющих условию ортогональности (4.1). Далее заметим, что из формул (4.2) и (4.3) вытекает равенство

$$\big(P\mathbf{K}^{(+)}Pu^{(+)}\big)(x) =$$

$$-\frac{1}{\pi}P\int\limits_{b}^{b+1}\big(Pu^{(+)}\big)(\xi)\big[\log|x-\xi|+\log(x+\xi)\big]\,\mathrm{d}\xi, \qquad (4.13)$$

так как благодаря проектору под знаком интеграла можно опустить все слагаемые в ядре оператора $\mathbf{K}^{(+)}$, которые зависят от $x$, но не зависят от $\xi$. Аналогично, второй проектор обращает в ноль слагаемые зависящие от $\xi$, но не зависящие от $x$. Таким образом, $P\mathbf{K}^{(+)}P$ совпадает с $P\mathbf{K}_*P$, что означает эквивалентность уравнений (4.8) и (4.12) на подпространстве $L_2^{(c)}(b, b+1)$. При этом решение (4.8) принадлежит этому подпространству, а решение (4.12) – нет. Поэтому несмотря на то, что процедура [15] дает правильные приближенные собственные значения, для соответствующих собственных функций на свободной поверхности имеет место соотношение $\partial_y u^{(+)} - \nu^{(+)}u^{(+)} = \mathrm{const} \neq 0$ вместо (1.5).

### 4.2. Простота собственных значений и пределы при $b \to 0$.

**Теорема 4.2.** *Собственные значения $\nu_n^{(+)}(b)$, $n = 1, 2, \ldots$, спектральной задачи (4.8) являются простыми для любых значений параметра $b \geqslant 0$.*

**Доказательство.** Допустим, что собственному значению $\nu^{(+)} \in \{\nu_n^{(+)}(b)\}_1^\infty$ соответствуют две линейно независимые симметричные собственные функции $u_1^{(+)}$ и $u_2^{(+)}$, удовлетворяющие задаче (1.2)–(1.6). Из формулы (4.9) вытекает, что при $|z| \to \infty$ справедлива асимптотика:

$$u_i^{(+)}(x, y) = a_i + O(|z|^{-2}),$$

где

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{b}^{b+1} u_i^{(+)}(\xi, 0)H(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

(выражение $H(\xi)$ определено в (4.6)) и $a_i \neq 0$, $i = 1, 2$, так как при $a_i = 0$ функция $u_i^{(+)}$ обращается в ноль тождественно в силу Леммы 2.1. Поскольку линейная комбинация $a_2u_1^{(+)} - a_1u_2^{(+)}$ убывает на бесконечности, эта же лемма гарантирует, что $a_2 u_1^{(+)} - a_1 u_2^{(+)} \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Тем самым, $u_1^{(+)}$ и $u_2^{(+)}$ совпадают с точностью до постоянного множителя. •

Доказательство следующего утверждения более громоздко, чем доказательство Леммы 3.2, но при этом совершенно ему аналогично, и поэтому мы его опускаем.

**Лемма 4.2.** *Справедливы предельные соотношения*

$$\nu_n^{(+)}(b) \to \nu_n^{(+)}(0) \quad \textit{при} \quad b \to 0.$$

**4.3. Свойства собственных значений при $b \to \infty$.**

Следующая теорема аналогична Теореме 3.3 и касается предельных значений $\nu_n^{(+)}(\infty)$, к которым стремятся при $b \to \infty$ собственные значения уравнения (4.8).

**Теорема 4.3.** *Пределы $\nu_n^{(+)}(\infty)$ существуют и для них справедливы равенства:*

$$\nu_n^{(+)}(\infty) = 2\lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.14}$$

*где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – последовательность собственных значений задачи* (3.18).

**Доказательство.** Из сказанного в конце п. 4.1 вытекает эквивалентность на подпространстве $L_2^{(c)}(b, b+1)$ уравнения (4.8) и уравнения, в котором оператор задан формулой (4.13). Последнее уравнение преобразуем при помощи замены переменных так, чтобы искомая функция, за которой сохраним обозначение $w^{(+)}$, была задана на интервале $(0, 1)$. Сохраняя также обозначение $P$ за проектором на подпространство, ортогональное константам, разобьем преобразованный оператор (4.13) на сумму операторов $P\mathbf{K}^{(0)}P$ (оператор $\mathbf{K}^{(0)}$ был введен в доказательстве Теоремы 3.3) и оператора, действующего на $w^{(+)}$ следующим образом

$$-\frac{1}{\pi} P \int_0^1 \left(P w^{(+)}\right)(\xi) \log\left[2^{-1}\beta(x+\xi) + 1\right] \mathrm{d}\xi, \quad x \in (0, 1). \tag{4.15}$$

Ясно, что последний оператор аналитически зависит от $\beta = 1/b$ и обращается в нулевой оператор при $\beta = 0$. Тогда аналитическая теория возмущений (см., например, [14]) гарантирует, что при

$\beta \to 0$ ($b \to \infty$) точечный спектр суммы оператора $P\mathbf{K}^{(0)}P$ и оператора, определенного формулой (4.15), имеет пределом спектр оператора $P\mathbf{K}^{(0)}P$, который был рассмотрен в доказательстве Теоремы 3.3. Это доказывает равенство (4.14). $\bullet$

Формула (1.7) позволяет уточнить результат последней теоремы.

**Следствие 4.1.** *Имеют место неравенства*

$$0 \leqslant \nu_n^{(+)}(\infty) - \nu_n^{(+)}(b) \leqslant \frac{\left[\nu_n^{(+)}(\infty)\right]^2}{4\pi b(b+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

**Доказательство.** Нормируем собственные функции задачи (1.2)–(1.6) так, чтобы знаменатель в формуле (1.7) равнялся единице. Тогда с учетом Теоремы 4.2 из этой формулы вытекает, что

$$\nu_n^{(+)}(b) = \nu_n^{(+)}(0) + \int\limits_0^b \mathrm{d}t \int\limits_{-\infty}^0 \left|\partial_y u_n^{(+)}(0, y; t)\right|^2 \mathrm{d}y. \tag{4.16}$$

Ввиду предельных свойств спектра, установленных в Теореме 4.3, в последнем равенстве можно перейти к пределу при $b \to \infty$. Вычитая из получающегося таким образом равенства соотношение (4.16), получаем

$$\nu_n^{(+)}(\infty) - \nu_n^{(+)}(b) = \int\limits_b^\infty \mathrm{d}t \int\limits_{-\infty}^0 \left|\partial_y u_n^{(+)}(0, y; t)\right|^2 \mathrm{d}y. \tag{4.17}$$

Из формулы (4.9) вытекает, что

$$u_n^{(+)}(0, y) = \nu_n^{(+)} \int\limits_b^{b+1} u_n^{(+)}(\xi, 0) G(0, y; \xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

откуда

$$\partial_y u_n^{(+)}(0, y) = \nu_n^{(+)} \int\limits_b^{b+1} u_n^{(+)}(\xi, 0) \partial_y G(0, y; \xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Согласно (4.3) справедливо равенство

$$\partial_y G(0, y; \xi) = \frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{b + b^2 + y^2}\right) - \frac{2}{\pi} \frac{y}{\xi^2 + y^2}.$$

Таким образом,

$$\partial_y u_n^{(+)}(0,y) = \frac{2y\nu_n^{(+)}}{\pi} \int\limits_b^{b+1} \frac{u_n^{(+)}(\xi,0)}{\xi^2+y^2} = \frac{2y\nu_n^{(+)}}{\pi} \int\limits_b^{b+1} u_n^{(+)}(\xi,0) \left[\frac{1}{\xi^2+y^2} - \frac{1}{(b+1)^2+y^2}\right] \mathrm{d}\xi, \tag{4.18}$$

где последнее равенство является следствием (4.1). Ввиду принятой нормировки собственных функций получаем оценку

$$\left|\partial_y u_n^{(+)}(0,y)\right|^2 \leqslant \frac{4y^2\left[\nu_n^{(+)}\right]^2}{\pi^2} \left\{\int\limits_b^{b+1} \left|u_n^{(+)}(\xi,0)\right| \mathrm{d}\xi\right\}^2 \times \left\{\max_{\xi\in[b,b+1]} \left[\frac{1}{\xi^2+y^2} - \frac{1}{(b+1)^2+y^2}\right]\right\}^2 \leqslant \frac{4y^2\left[\nu_n^{(+)}\right]^2}{\pi^2} \left\{\frac{1}{b^2+y^2} - \frac{1}{(b+1)^2+y^2}\right\}^2,$$

интегрируя которую, приходим к неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left|\partial_y u_n^{(+)}(0,y;b)\right|^2 \mathrm{d}y \leqslant \frac{4\left[\nu_n^{(+)}(b)\right]^2}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{0} \left\{\frac{y}{b^2+y^2} - \frac{y}{(b+1)^2+y^2}\right\}^2 \mathrm{d}y = \frac{\left[\nu_n^{(+)}(b)\right]^2}{2\pi b\,(b+1)\,(b+1/2)}. \tag{4.19}$$

Нетрудно заметить, что справедливы соотношения

$$\int\limits_b^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+1)\,(t+1/2)} = 2\log\left(1+\frac{1}{4b(b+1)}\right) \leqslant \frac{1}{2b(b+1)}.$$

Поэтому из (4.17) и (4.19) вытекает требуемое неравенство. •

Приведенное доказательство Следствия 4.1 не проходит для собственных значений, соответствующих антисимметричным модам, так как для этих функций не выполняется равенство (4.1), которое позволяет корректировать подынтегральное выражение так, как это сделано в формуле (4.18).

## 5. Простота собственных значений задачи (1.2)–(1.6)

Теперь мы можем объединить результаты Теорем 3.2 и 4.2.

**Теорема 5.1.** *Собственные значения $\nu_n^{(\pm)}(b)$, $n = 1, 2, \ldots$, задачи* (1.2)–(1.6) *являются простыми для любых значений параметра* $b \geqslant 0$.

**Доказательство.** Достаточно показать, что графики собственных значений, соответствующих симметричным и антисимметричным модам, не пересекаются. Ввиду Леммы 4.2 из (3.23) следует, что $\nu_n^{(+)}(0) \in \big(n\pi, n\pi + \pi/2\big)$, $n = 1, 2, \ldots$. Принимая во внимание предельные при $b \to \infty$ свойства спектра, полученные в Теореме 4.3, имеем $\nu_n^{(+)}(\infty) \in \big(n\pi, (n+1)\pi\big)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда ввиду Теоремы 4.2 и монотонности кривых,

$$\nu_n^{(+)}(b) \in \big(n\pi, (n+1)\pi\big), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad b \geqslant 0.$$

Сравнивая с (3.24) замечаем, что значения функций $\nu_n^{(+)}(b)$ и $\nu_{n+1}^{(-)}(b)$ принадлежат одному интервалу, но при этом не могут иметь точек пересечения вследствие монотонности и поскольку имеют общий предел при $b \to \infty$. $\bullet$

## Литература


1. W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathematique.* — Ann. Sci. École Normale Sup. **19** (1902), 455–490.
2. C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications.* — Pitman, Boston *et al.*, (1980).
3. Г. В. Розенблюм, М. А. Шубин, М. З. Соломяк, *Спектральная теория дифференциальных операторов.* — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. **64** Дифференциальные уравнения с частными производными – 7. ВИНИТИ. Москва (1989).
4. N. Kuznetsov, O. Motygin, *Sloshing problem in a half-plane covered by a dock with two gaps: monotonicity and asymptotics of eigenvalues.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sèr. II **329(11)** (2001), 791–796.
5. D. W. Fox, J. R. Kuttler, *Sloshing frequencies.* — Z. angew. Math. Phys. **34** (1983), 668–696.
6. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* — М., Наука (1991).
7. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды.* М., Наука (1981).
8. L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions.* — North Holland, Amsterdam (1981).

9. B. A. Troesch, *Proof of a conjecture on sloshing frequencies.* — Z. angew. Math. Phys. **25** (1974), 655–657.
10. B. A. Troesch, H. R. Troesch, *A remark on the sloshing frequencies for a half-space.* — Z. angew. Math. Phys. **23** (1972), 703–711.
11. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики.* — М., Наука (1967).
12. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — Л., Изд. ЛГУ (1980).
13. A. M. J. Davis, *Waves in the presence of an infinite dock with gap.* — J. Inst. Maths Applics **6** (1970), 141–156.
14. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* — Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York (1980).
15. J. W. Miles, *On the eigenvalue problem for fluid sloshing in a half-space.* — Z. angew. Math. Phys. **23** (1972), 861–868.

Kuznetsov N. G., Motygin O. V. The Steklov problem in a half-plane: the dependence of eigenvalues on a piecewise-constant coefficient.

The Steklov problem considered in the paper describes free two-dimensional oscillations of an ideal, incompressible, heavy fluid in a half-plane covered by a rigid dock with two symmetric gaps. Equivalent reduction of the problem to two spectral problems for integral operators allows us to find limits for all eigenfrequencies as the spacing between gaps tends to both zero and infinity. For the fundamental eigenfrequency and the corresponding eigenfunction two terms are found in the asymptotic expansion as the spacing tends to infinity. It is proved that all eigenvalues are simple for any value of the spacing.

Институт проблем машиноведения РАН

Поступило 10 января 2003 г.

*E-mail*: nikuz@wave.ipme.ru; mov@snark.ipme.ru