Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

Л. А. Молотков

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ УПРУГО-ЖИДКИХ СРЕДАХ. I

В настоящее время наблюдается большой интерес к распространению волн в трещиноватых средах, насыщенных жидкостью, в твердых средах с жидкими включениями, в жидких средах с упругими включениями и в средах, состоящих из несмешивающихся жидкостей. Интерес к этим средам связан с исследованием природных резервуаров нефти и газа. Для изучения волновых процессов в указанных средах используются эффективные модели. Такими моделями, в частности, являются пористые среды Био, эффективные модели слоистых сред и в последние годы стали модели блочных сред [1, 2].

Предлагаемый цикл статей посвящен исследованию волн в двумерных блочных упруго-жидких средах. Эти среды являются периодическими в двух взаимно перпендикулярных направлениях и состоят из прямоугольных ячеек. Каждая ячейка содержит четыре блока, которые могут быть как упругими, так и жидкими. В волновых полях в указанных средах проводится осреднение, при котором размеры ячеек и блоков сокращаются до нулевых, число ячеек и блоков неограниченно возрастает, а размеры среды остаются фиксированными. Подобный подход был предложен в работе [3] в связи с осреднением слоистых сред. В случае блочных сред осреднение проводится по двум направлениям, при этом осреднение может осуществляться или сперва по одному направлению, а затем по другому направлению, или одновременно по обоим направлениям. Результаты во всех этих случаях оказываются одинаковыми.

В результате осреднений среды заменяются эффективными моделями, которые описываются осредненными уравнениями и могут содержать несколько фаз. Эти уравнения также состоят из уравнений закона Гука и уравнений сплошной среды. Из этих

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант No. 02-01-00260.

уравнений также выводятся уравнения Ламе, описывающие смещения в эффективных моделях. Решения этих уравнений позволяют в неявных видах представить характеристические функции, которые определяют фронты в эффективных моделях от точечных источников. В результате этих исследований удается из волновых полей выделить все объемные волны и записать выражения или уравнение для скоростей этих волн вдоль осей. Объемные волны в случае разных сред и соответствующих им эффективных моделей оказываются разными. На основании сравнения волновых картин в этих моделях удается указать специфические особенности каждой из рассматриваемых сред. Возможность использования эффективных моделей для описания распространения волн в упруго-жидких средах была экспериментально подтверждена в работе [4].

§1. Блочные среды и подходы к их осреднению

Пусть заданы двумерные периодические среды вдоль осей x и z блочные среды $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, в которых в направлениях осей x и z расположены соответственно n и $\widetilde{n}$ периодов с длинами h и $\widetilde{h}$ (рис. 1). Среды разделяются на $n\widetilde{n}$ одинаковых прямоугольных ячеек с размерами h и $\widetilde{h}$. Каждая ячейка состоит из четырех однородных и изотропных блоков $1, 2, 3, 4$. Размеры первого, второго, третьего и четвертого блоков выражаются равенствами

$$\begin{aligned} h_1 &= h\varepsilon_1, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1, \\ h_2 &= h\varepsilon_2, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1, \\ h_1 &= h\varepsilon_1, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2, \\ h_2 &= h\varepsilon_2, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

С таким строением рассматриваются 4 среды:

1) в первой среде блок 1-жидкий, а остальные три блока – упругие;
2) во второй среде блоки 1 и 4 – упругие, а блоки 2 и 3 заполнены жидкостями;
3) в третьей среде блок 1 – упругий, а остальные три блока – жидкие;
4) в четвертой среде все четыре блока заполнены четырьмя жидкостями.

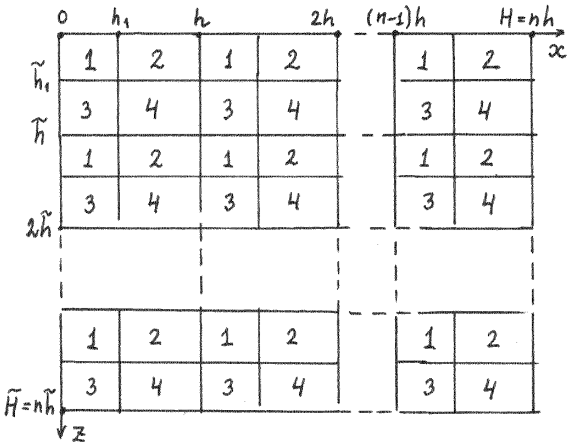

Рис. 1.

Упругая среда i описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
t_{xxi} &= (\lambda_i + 2\mu_i)\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial u_{zi}}{\partial z},\\
t_{zzi} &= \lambda_i \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + (\lambda_i + 2\mu_i)\frac{\partial u_{zi}}{\partial z},\\
t_{xzi} &= \mu_i \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial t_{xxi}}{\partial x} &+ \frac{\partial t_{xzi}}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2},\\
\frac{\partial t_{xzi}}{\partial x} &+ \frac{\partial t_{zzi}}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

в которых u_{xi}, u_{zi} – смещения, t_{xxi}, t_{zzi}, t_{xzi} – напряжения, λ_i, μ_i – коэффициенты Ламе и ρ_j – плотность. Жидкая среда i описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
-p_i &= \lambda_i \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z}\right),\\
-\frac{\partial p_i}{\partial x} &= \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где u_{xi}, u_{zi} – смещения, p_i – давление, ρ_i – плотность,

$$\lambda_i = \rho_i v_i^2 \tag{1.4}$$

и v_i – скорость распространения. Для простоты давление p_i в жидкостях будем заменять по формуле

$$-p_i = t_{xxi} = t_{zzi} \tag{1.5}$$

напряжениями в жидкой среде. На внутренних границах, параллельных оси x, выполняются условия

$$\begin{aligned} t_{zz1} &= t_{zz3}, \quad u_{z1} = u_{z3}, \\ t_{zz2} &= t_{zz4}, \quad u_{z2} = u_{z4}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Если контактирующая среда i является упругой, то к равенствам (1.6) добавляется условие

$$t_{xzi} = 0. \tag{1.7}$$

В случае границы двух упругих сред предполагается контакт с проскальзыванием и условие (1.7) выполняется на обеих сторонах границы. На внутренних границах, параллельных оси z, выполняется условие

$$\begin{aligned} t_{xx1} &= t_{xx2}, \quad u_{x1} = u_{x2}, \\ t_{xx3} &= t_{xx4}, \quad u_{x3} = u_{x4}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Также добавляется условие (1.7) для контактирующей среды и предполагается, что контакт между упругими средами является контактом с проскальзыванием. Как и в других задачах, относящихся к средам блочного строения [1, 2], несущественными оказываются линейные краевые условия на внешних границах, а также характер и расположение линейных источников, возбуждающих систему.

Для построения эффективных моделей заданных систем в волновых полях совершим предельный переход при условиях

$$\begin{aligned} &n \to \infty, \quad \widetilde{n} \to \infty, \quad h_1 \to 0, \quad \widetilde{h}_1 \to 0, \quad h_2 \to 0, \quad \widetilde{h}_2 \to 0, \\ &H = \mathrm{const}, \quad \widetilde{H} = \mathrm{const}, \quad \varepsilon_1 = \mathrm{const}, \\ &\varepsilon_2 = \mathrm{const}, \quad \widetilde{\varepsilon}_1 = \mathrm{const}, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{1.9}$$

и выясним, каким уравнениям удовлетворяют предельные волновые поля. Эти уравнения будут описывать эффективные модели, учитывающие осреднение заданных блочных систем. Осреднение может быть проведено сперва вдоль одной координаты, а затем вдоль другой или одновременно по обеим координатам. Так как результаты осреднения во всех трех случаях оказываются одинаковыми, то выполним осреднение последним способом.

В результате предельного перехода при условиях (1.9) каждая ячейка и все ее четыре блока сужаются в одну точку. В этой точке определены смещения и напряжения от каждого из четырех блоков. Вследствие этого эффективная модель оказывается четырехфазной. Смещения и напряжения в одной точке удовлетворяют граничным условиям (1.6)–(1.8), а также условию в жидкой среде (1.5). Все эти условия после предельного перехода выполняются во всей эффективной модели. Поэтому можно составить четыре непрерывные вдоль оси x функции

$$\begin{aligned} u_x^{(1.2)} &= \begin{cases} u_{x1} \\ u_{x2} \end{cases}, \qquad u_x^{(3.4)} = \begin{cases} u_{x3} \\ u_{x4} \end{cases}, \\ t_{xx}^{(1.2)} &= \begin{cases} t_{xx1} \\ t_{xx2} \end{cases}, \qquad t_{xx}^{(3.4)} = \begin{cases} t_{xx3} \\ t_{xx4} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.10}$$

и четыре непрерывные вдоль оси z функции

$$\begin{aligned} u_z^{(1.3)} &= \begin{cases} u_{z1} \\ u_{z3} \end{cases}, \qquad u_x^{(2.4)} = \begin{cases} u_{z2} \\ u_{z4} \end{cases}, \\ t_{zz}^{(1.3)} &= \begin{cases} t_{zz1} \\ t_{zz3} \end{cases}, \qquad t_{zz}^{(2.4)} = \begin{cases} t_{zz2} \\ t_{zz4}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Так как смещение u_x вдоль оси z и смещение u_z вдоль оси x являются разрывными функциями на границах и эта разрывность сохраняется и после предельного перехода, то третье уравнение (1.2) теряет смысл и должно быть отброшено.

Для вывода уравнений, определяющих функции (1.10) и (1.11), выразим производные этих функций по формулам

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x2}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x4}}{\partial x}, \\ &\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} = \widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{z3}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} = \widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{z4}}{\partial z}, \\ &\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial t_{xx2}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial t_{xx3}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial t_{xx4}}{\partial x}, \\ &\frac{\partial t_{zz}^{(1.3)}}{\partial z} = \widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{zz1}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial t_{zz3}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial t_{zz}^{(2.4)}}{\partial z} = \widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{zz2}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial t_{zz4}}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.12}$$

через производные смещений и напряжений внутри блоков. Последние производные выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} = A_i t_{xxi} - B_i t_{zzi}, \qquad \frac{\partial t_{xxi}}{\partial x} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial u_{zi}}{\partial z} = -B_i t_{xxi} + A_i t_{zzi}, \qquad \frac{\partial t_{zzi}}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2}, \\ &A_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\mu_i(\lambda_i+\mu_i)}, \quad B_i = \frac{\lambda_i}{4\mu_i(\lambda_i+\mu_i)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

в случае упругой среды и равенствами

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} = -\frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \frac{p_i}{\lambda_i}, \qquad -\frac{\partial p_i}{\partial x} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial u_{zi}}{\partial z} = -\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} - \frac{p_i}{\lambda_i}, \qquad -\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

в случае жидкой среды. Соотношения (1.13) и (1.14) записаны на основании уравнений (1.2) и (1.3). Дальнейший вывод уравнений эффективных моделей проводится для каждой среды по-разному.

§2. Вывод уравнений эффективной модели среды 1

После предельного перехода при условиях (1.9) в каждой точке среды 1 определены 7 независимых функций

$$u_x^{(1.2)},\ u_x^{(3.4)},\ u_z^{(1.3)},\ u_z^{(2.4)},\ t_{xx}^{(1.2)} = t_{zz}^{(1.3)} = -p_1,\ t_{xx}^{(3.4)},\ t_{zz}^{(2.4)}. \tag{2.1}$$

Для определения этих функций в равенства (1.12) подставляются выражения (1.13) и (1.14) и после ряда преобразований приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} = \Big(\frac{s_1}{\lambda_1} + A_{23}\Big) t_{xx}^{(1.2)} - s_2 B_2 t_{zz}^{(2.4)} - s_3 B_3 t_{xx}^{(3.4)}, \\ &\varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} = -s_2 B_2 t_{xx}^{(1.2)} + A_{24} t_{zz}^{(2.4)} - s_4 B_4 t_{xx}^{(3.4)}, \\ &\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} = -s_3 B_3 t_{xx}^{(1.2)} - s_4 B_4 t_{zz}^{(2.4)} + A_{34} t_{xx}^{(3.4)}; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial x} = \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial x} = \rho_{34} \frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial z} = \rho_{13} \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial t_{zz}^{(2.4)}}{\partial z} = \rho_{24} \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

в которых

$$
\begin{aligned}
&A_{23} = A_2 s_2 + A_3 s_3, \quad A_{24} = A_2 s_2 + A_4 s_4, \quad A_{34} = A_3 s_3 + A_4 s_4,\\
&\rho_{12} = \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3 \varepsilon_1 + \rho_4 \varepsilon_2, \quad \rho_{13} = \rho_1 \widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_3 \widetilde{\varepsilon}_2,\\
&\rho_{24} = \rho_2 \widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_4 \widetilde{\varepsilon}_2, \ s_1 = \varepsilon_1 \widetilde{\varepsilon}_1, \ s_2 = \varepsilon_2 \widetilde{\varepsilon}_1, \ s_3 = \varepsilon_1 \widetilde{\varepsilon}_2, \ s_4 = \varepsilon_2 \widetilde{\varepsilon}_2.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Уравнения (2.2) описывают закон Гука для эффективной модели 1. Чтобы записать этот закон в обычной форме, решим уравнения (2.2) относительно напряжений $t_{xx}^{(1.2)}$, $t_{zz}^{(2.4)}$, $t_{xx}^{(3.4)}$ и получим соотношения

$$
\begin{aligned}
t_{xx}^{(1.2)} &= \frac{1}{\Delta}\left[a_{11}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + \right.\\
&\left. + a_{12}\varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + a_{13}\,\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right],\\
t_{zz}^{(2.4)} &= \frac{1}{\Delta}\left[a_{12}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + \right.\\
&\left. + a_{22}\varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + a_{23}\,\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right],\\
t_{xx}^{(3.4)} &= \frac{1}{\Delta}\left[a_{13}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + \right.\\
&\left. + a_{23}\varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + a_{33}\,\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right],
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Delta = \widetilde{A}_{23} A_{24} A_{34} - 2\widetilde{B}_2 \widetilde{B}_3 \widetilde{B}_4 - \widetilde{A}_{23}\widetilde{B}_4^2 - A_{24}\widetilde{B}_3^2 - A_{34}\widetilde{B}_2^2,\\
&a_{11} = A_{24}A_{34} - \widetilde{B}_4^2, \ a_{12} = A_{34}\widetilde{B}_2 + \widetilde{B}_3 \widetilde{B}_4, \ a_{13} = A_{24}\widetilde{B}_3 + \widetilde{B}_2 \widetilde{B}_4,\\
&a_{22} = \widetilde{A}_{23}A_{34} - \widetilde{B}_3^2, \ a_{23} = \widetilde{A}_{23}\widetilde{B}_4 + \widetilde{B}_2 \widetilde{B}_3, \ a_{33} = \widetilde{A}_{23}A_{24} - \widetilde{B}_2^2,\\
&\widetilde{A}_{23} = A_{23} + \frac{s_1}{\lambda_1}, \quad \widetilde{B}_2 = B_2 s_2, \quad \widetilde{B}_3 = B_3 s_3, \quad \widetilde{B}_4 = B_4 s_4.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

После подстановки равенств (2.5) в соотношения (2.3) приходим к уравнениям Ламе

$$
\begin{aligned}
&\left(\widetilde{\varepsilon}_1 a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{12}\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x^{(1.2)}+\varepsilon_1 a_{11}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}+\\
&+\varepsilon_2 a_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2 a_{13}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2}=0,\\
&\widetilde{\varepsilon}_1 a_{11}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+\left(\varepsilon_1 a_{11}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{13}\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z^{(1.3)}+\\
&+\varepsilon_2 a_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}+\widetilde{\varepsilon}_2 a_{13}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}=0,\\
&\widetilde{\varepsilon}_1 a_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+\varepsilon_1 a_{12}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}+\\
&+\left(\varepsilon_2 a_{22}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{24}\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z^{(2.4)}+\widetilde{\varepsilon}_2 a_{23}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}=0,\\
&\widetilde{\varepsilon}_1 a_{13}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2}+\varepsilon_1 a_{13}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}+\varepsilon_2 a_{23}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}+\\
&+\left(\widetilde{\varepsilon}_2 a_{33}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{34}\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x^{(3.4)}=0
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

для эффективной модели 1.

§3. Энергетические исследования эффективной модели 1

Помножим первое, второе, третье и четвертое уравнения (2.3) соответственно на $\widetilde{\varepsilon}_1\partial u_x^{(1.2)}/\partial t$, $\widetilde{\varepsilon}_2\partial u_x^{(3.4)}/\partial t$, $\varepsilon_1\partial u_z^{(1.3)}/\partial t$ и $\varepsilon_2\partial u_z^{(2.4)}/\partial t$, сложим почленно полученные уравнения и после стандартных преобразований получим уравнение энергетического баланса

$$
\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial W_k}{\partial t}+\frac{\partial W_p}{\partial t},
\tag{3.1}
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
p_x&=t_{xx}^{(1.2)}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}+t_{xx}^{(3.4)}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t},\\
p_z&=t_{zz}^{(1.3)}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}+t_{zz}^{(2.4)}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

– потоки энергий вдоль осей x и z

$$W_k = \frac{1}{2}\Bigg[\rho_{12}\widetilde{\varepsilon}_1\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \rho_{34}\widetilde{\varepsilon}_2\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\ + \rho_{13}\varepsilon_1\left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2 + \rho_{24}\varepsilon_2\left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2\Bigg] \tag{3.3}$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = t_{xx}^{(1.2)}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t\partial z}\right) + \\ + \varepsilon_2 t_{zz}^{(2.4)}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 t_{xx}^{(3.4)}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t\partial x}. \tag{3.4}$$

После подстановки формул (2.5) в соотношение (3.4) приходим к равенству

$$W_p = \frac{1}{2\Delta}\Bigg[a_{11}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right)^2 + \\ + 2a_{12}\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + \\ + 2a_{13}\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + a_{22}\varepsilon_2^2\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right)^2 + \\ + 2a_{23}\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\ \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + a_{33}\varepsilon_2^2\left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right)^2\Bigg] \tag{3.5}$$

для плотности потенциальной энергии. Так как выполняется неравенство

$$A_{14} > B_{14},$$

то, согласно формуле (3.5), плотность потенциальной энергии является положительно определенной формой аргументов

$$\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} \tag{3.7}$$

и неотрицательно определенной формой производных смещений. Плотность кинетической энергии также положительная.

Преобразуем теперь равенства (3.3) и (3.5) для плотностей кинетической и потенциальной энергий. Если в формулу (2.2) подставить выражения (2.4) для величин ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{24} и ρ_{34}, то придем к соотношению

$$\begin{aligned} W_k = {}& \frac{\rho_1 s_1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2\right] + \\ &+ \frac{\rho_2 s_2}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2\right] + \\ &+ \frac{\rho_3 s_3}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2\right] + \\ &+ \frac{\rho_4 s_4}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Каждое слагаемое в формуле (2.8) описывает вклад одного из блоков в плотность кинетической энергии. С учетом (2.2) равенство (2.5) переходит в соотношение

$$\begin{aligned} W_p = {}& \frac{1}{2}\left[\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) t_{xx}^{(1.2)} + \right. \\ &\left. + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} t_{xx}^{(3.4)} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} t_{zz}^{(2.4)}\right]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Заменяя величины ε_1, ε_2, $\widetilde{\varepsilon}_1$ и $\widetilde{\varepsilon}_2$ на относительные площади блоков s_1, s_2, s_3 и s_4 и используя равенство (1.5), получим другое представление для плотности потенциальной энергии

$$\begin{aligned} W_p = {}& \frac{s_1}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) t_{xx}^{(1.2)} + \\ &+ \frac{s_2}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} t_{xx}^{(1.2)} + \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} t_{zz}^{(2.4)}\right) + \\ &+ \frac{s_3}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} t_{xx}^{(3.4)} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} t_{zz}^{(1.3)}\right) + \\ &+ \frac{s_4}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} t_{xx}^{(3.4)} + \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} t_{zz}^{(2.4)}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Из этого представления видно, что плотность потенциальной энергии в эффективной модели является суммой произведений плотностей потенциальной энергии в блоках и соответствующих относительных площадей блоков.

Переход от уравнений эффективной модели (2.3) и (2.5) к выражениям для плотностей кинетической и потенциальной энергий может быть осуществлен также и в обратном направлении и таким путем могут быть выведены уравнения (2.2) и (2.3). Плотности кинетической и потенциальной энергий с учетом условия (1.7) в каждой точке модели представляются формулами

$$W_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\rho_i s_i\left[\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{z1}}{\partial t}\right)^2\right], \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} W_p = {} & \frac{s_1}{2}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right)t_{xx1} + \\ & + \frac{s_2}{2}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}t_{xx2} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}t_{zz2}\right) + \\ & + \frac{s_3}{2}\left(\frac{\partial u_{x3}}{\partial x}t_{xx3} + \frac{\partial u_{z3}}{\partial z}t_{zz3}\right) + \\ & + \frac{s_4}{2}\left(\frac{\partial u_{x4}}{\partial x}t_{xx4} + \frac{\partial u_{z4}}{\partial z}t_{zz4}\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как в этой же точке выполняются граничные условия (1.6)–(1.8), а также равенства (1.10) и (1.11), то плотность кинетической энергии выражается формулой (3.3), а плотность потенциальной энергии – соотношением

$$\begin{aligned} W_p = {} & \frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)t_{xx}^{(1.2)} + \\ & + \frac{\varepsilon_2}{2}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z4}}{\partial z}\right)t_{zz}^{(2.4)} + \\ & + \frac{\widetilde{\varepsilon}_2}{2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial u_{x4}}{\partial x}\right)t_{xx}^{(3.4)} + \\ & + \frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{2}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z3}}{\partial z}\right)t_{xx}^{(1.2)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

В соответствии с определением производной, а также с условием инвариантности выражения для плотности потенциальной энергии, естественно предположить выполнение первых четырех формул (1.12). На основании этих формул и соотношений (1.13) и (1.14), приходим к уравнениям закона Гука (2.2) для эффективной модели. Уравнения сплошной среды для эффективной модели (2.3) выводятся вариационными методами с использованием равенств (3.3) и (3.13).

§4. Характеристическая функция $\tau(\alpha)$ модели 1

Решения уравнений (2.7) могут быть выражены двукратными интегралами, которые представляют собой суперпозицию плоских волн. Подынтегральные функции в выражениях для смещений $u_x^{(1.2)}$, $u_x^{(3.4)}$, $u_z^{(1.3)}$, $u_z^{(2.4)}$ имеют соответствующие выражения

$$\begin{aligned} &u_x^{(1.2)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \quad && u_x^{(3.4)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \\ &u_z^{(1.3)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \quad && u_z^{(2.4)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

при этом

$$\tau = v_{ph}/\sin\varphi, \quad \alpha = \operatorname{ctg}\varphi, \tag{4.2}$$

v_{ph} – фазовая скорость, φ – угол между нормалью к фронту и осью z и k – составляющая волнового вектора вдоль оси x. Фронты волн как особенности интегральных представлений волнового поля определяются функцией $\tau(\alpha)$. В случае точечного источника, расположенного в начале координат, фронты, согласно работе [5], выражаются параметрическими формулами

$$\begin{aligned} x &= t\big[\tau - \alpha\tau'(\alpha)\big], \\ z &= t\tau'(\alpha), \end{aligned} \tag{4.3}$$

которые определены при положительных τ и вещественных α. Для определения характеристической функции $\tau(\alpha)$ подставим выражения (4.1) в (2.7) и получим систему однородных уравнений. Эта система имеет ненулевое решение только в случае равенства ее определителя нулю, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho_{12}\Delta\tilde{\varepsilon}_1^{-1}\tau^2 & a_{11}\alpha & a_{12}\alpha & a_{13} \\ a_{11}\alpha & a_{11}\alpha^2 - \rho_{13}\Delta\varepsilon_1^{-1}\tau^2 & a_{12}\alpha^2 & a_{13}\alpha \\ a_{12} & a_{12}\alpha^2 & a_{22}\alpha^2 - \rho_{24}\Delta\varepsilon_2^{-1}\tau^2 & a_{23}\alpha \\ a_{13} & a_{13}\alpha & a_{23}\alpha & a_{33} - \rho_{34}\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{-1}\tau^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) определяет неявно многозначную характеристическую функцию $\tau(\alpha)$. Величины τ^2 в уравнении (4.4) могут рассматриваться как характеристические числа при одновременном приведении к диагональной форме двух матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}\alpha & a_{12}\alpha & a_{13} \\ a_{11}\alpha & a_{11}\alpha^2 & a_{12}\alpha^2 & a_{13}\alpha \\ a_{12}\alpha & a_{12}\alpha^2 & a_{22}\alpha^2 & a_{23}\alpha \\ a_{13} & a_{13}\alpha & a_{23}\alpha & a_{33} \end{pmatrix},$$
$$\Delta \begin{pmatrix} \rho_{12}\tilde{\varepsilon}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{13}\varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{24}\varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{34}\tilde{\varepsilon}_2^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Обе матрицы (4.5) являются симметричными при вещественных α, при этом первая из них является неотрицательно определенной, а вторая положительно определенной. Согласно теореме, приведенной в монографии Ф. Р. Гантмахера [6] и обобщению этой теоремы, все решения уравнения (4.4) τ^2 при вещественных α оказываются неотрицательными. Таким образом, уравнение (4.4) определяет вещественные функции $\tau_i(\alpha)$ при всех вещественных α.

Для исследования этих функций преобразуем уравнение (4.4), используя свойства определителей. После выделения множителя τ^2 получим уравнение

$$\begin{vmatrix} \widetilde{\varepsilon}_1 a_{11} - \rho_{12}\Delta\tau^2 & \varepsilon_1 a_{11} & \varepsilon_2 a_{12} & \widetilde{\varepsilon}_2 a_{13} \\ \rho_{12}\alpha^2 & -\rho_{13} & 0 & 0 \\ \widetilde{\varepsilon}_1 a_{12}\alpha^2 & \varepsilon_1 a_{12}\alpha^2 & \varepsilon_2 a_{22}\alpha^2 - \rho_{24}\Delta\tau^2 & \widetilde{\varepsilon}_2 a_{23}\alpha^2 \\ \widetilde{\varepsilon}_1 a_{13} & \varepsilon_1 a_{13} & \varepsilon_2 a_{23} & \widetilde{\varepsilon}_2 a_{33} - \rho_{34}\Delta\tau^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) является биквадратным относительно α и бикубическим относительно τ. После вычисления определителя уравнение (4.6) может быть заменено уравнением

$$c_1\tau^6 + \left(c_2\alpha^2 + c_3\right)\tau^4 + \left(c_4\alpha^4 + c_5\alpha^2 + c_6\right)\tau^2 + \left(c_7\alpha^2 + c_8\right)\alpha^2 = 0, \tag{4.7}$$

в котором выражения для коэффициентов c_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ не содержат τ и α. Для расчета функций $\tau_i(\alpha)$ полезно использовать обратные функции $\alpha_i(\tau)$, которые являются решениями биквадратного уравнения (4.7). Однако при аналитических исследованиях удобнее использовать уравнение (4.6).

При $\alpha = 0$ уравнение (4.6) принимает вид

$$\tau^2 \begin{vmatrix} \widetilde{\varepsilon}_1 a_{11} - \rho_{12}\Delta\tau^2 & \widetilde{\varepsilon}_2 a_{13} \\ \widetilde{\varepsilon}_1 a_{13} & \widetilde{\varepsilon}_2 a_{33} - \rho_{34}\Delta\tau^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

После вычисления определителя и учета равенства

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = \Delta A_{24} \tag{4.9}$$

соотношение (4.8) заменяется уравнением

$$\tau\Big[\rho_{12}\rho_{34}\Delta\tau^2 - \big(\rho_{12}\widetilde{\varepsilon}_2 a_{33} + \rho_{34}\widetilde{\varepsilon}_1 a_{11}\big)\tau^2 + \widetilde{\varepsilon}_1\,\widetilde{\varepsilon}_2 A_{24}\Big] = 0. \tag{4.10}$$

Последнее имеет корни

$$\tau_{1,2}^2(0) = v_{1,2}^2 = \tag{4.11}$$

$$= \frac{\rho_{12}\widetilde{\varepsilon}_2 a_{33} + \rho_{34}\widetilde{\varepsilon}_1 a_{11} \pm \sqrt{(\rho_{12}\widetilde{\varepsilon}_2 a_{33} + \rho_{34}\widetilde{\varepsilon}_1 a_{11})^2 - 4\widetilde{\varepsilon}_1\,\widetilde{\varepsilon}_2\rho_{12}\rho_{34}\Delta A_{24}}}{2\rho_{12}\rho_{34}\Delta},$$

$\tau_3(0) = 0$.

Таким образом, распространение волн в эффективной модели определяется тремя характеристическими функциями $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$.

При малых α и τ функция $\tau_3(\alpha)$ выражается приближенным равенством

$$\tau_3(\alpha) = v_6\alpha, \tag{4.12}$$

в котором

$$v_6^2 = \frac{\varepsilon_2}{\rho_{24}\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

С учетом соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta^2 \tag{4.14}$$

и формулы (4.9) равенство (4.13) заменяется на

$$v_6^2 = \frac{\varepsilon_2}{\rho_{24}A_{24}}. \tag{4.15}$$

При больших α и конечных $\tau = v_3$ уравнение (4.6) выполняется при условии

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\widetilde{\varepsilon}_2 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\widetilde{\varepsilon}_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\widetilde{\varepsilon}_2 - \rho_{34}v_3^2\Delta \end{vmatrix} = 0, \tag{4.16}$$

которое определяет равенство

$$v_3^2 = \frac{\widetilde{\varepsilon}_2}{\rho_{34}\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4.17}$$

Так как выполняются соотношения (4.14) и

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Delta A_{34}, \tag{4.18}$$

то

$$v_3^2 = \frac{\widetilde{\varepsilon}_2}{\rho_{34}A_{34}}. \tag{4.19}$$

Рассмотрим теперь случай, когда α и τ велики и связь между ними является линейной. В этом случае полезно использовать уравнение (4.4), а во входящем в него определителе могут быть исключены первые и четвертые строки и столбцы. После этих исключений приходим к уравнению

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\big(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\big)\alpha^4 - \\ -\big(a_{22}\rho_{13}\varepsilon_2 + a_{11}\rho_{24}\varepsilon_1\big)\Delta\alpha^2\tau^2 + \rho_{13}\rho_{24}\Delta^2\tau^4 = 0, \tag{4.20}$$

решения которого даются равенствами

$$\tau(\alpha) = v_{4,5}\alpha. \tag{4.21}$$

Коэффициенты $v_{4,5}$, с учетом (4.18), представляются формулами

$$v_{4,5}^2 = \tag{4.22}$$

$$= \frac{\rho_{13}\varepsilon_2 a_{22} + \rho_{24}\varepsilon_1 a_{11} \pm \sqrt{(\rho_{13}\varepsilon_2 a_{22} + \rho_{24}\varepsilon_1 a_{11})^2 - 4\varepsilon_1\,\varepsilon_2\rho_{13}\rho_{24}\Delta A_{34}}}{2\rho_{13}\rho_{24}\Delta}.$$

Найденные величины $v_1, v_2, \dots, v_6$ определяют начальные и конечные точки графиков функций $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$. Так как графики этих функций не могут пересекаться, то приходим к выводу, что графики функций $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ начинаются соответственно в точках $(0, v_1)$, $(0, v_2)$ и приближаются при больших α к прямым (4.21). Кривая $\tau_3(\alpha)$ выходит из начала координат, имея в этой точке касательную (4.12), и приближается при $\alpha \gg 1$ к асимптоте $\tau = v_3$. Начальные точки и конечные положения графиков соединим плавными кривыми без точек перегиба (рис. 2).

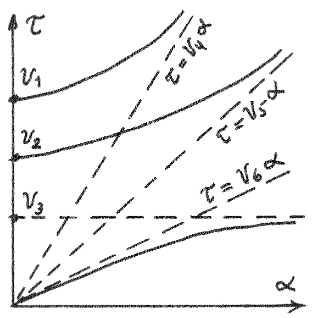

Рис. 2

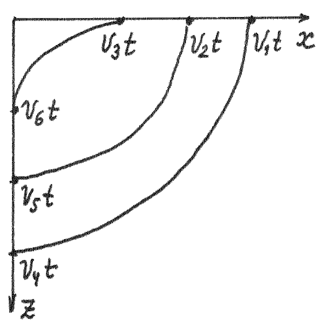

Рис. 3.

§5. Фронты от точечного источника в эффективной модели 1

Построим теперь фронты волн, возбужденных точечным источником, расположенным в начале координат. При построении фронтов используются соотношения (4.3), второе равенство (4.2) и формула

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{t\tau''(\alpha)}, \tag{5.1}$$

полученная на основании соотношений (4.2) и (4.3). Соотношение (5.1) устанавливает связь между кривизной фронта и кривизной графика. Точкам $(0, v_1)$ и $(0, v_2)$ графиков соответствуют точки фронта $(v_1t, 0)$ и $(v_2t, 0)$, в которых фронт перпендикулярен оси x. Точке $(0, v_3)$ отвечает точка на фронте $(v_3t, 0)$, где фронт касается оси x. Участкам графиков, приближающимся к асимптотам (4.21), соответствуют точки $(v_4t, 0)$ и $(v_5t, 0)$, в которых фронт перпендикулярен оси z. Малым α и τ, удовлетворяющим условию (4.12), отвечают точки фронта $(v_6t, 0)$, где фронт касается оси z.

Соединим найденные точки фронтов на осях x и z плавными кривыми без точек перегиба, при этом передний фронт, проходящий через точки $(v_1 t, 0)$ и $(0, v_4 t)$, не должен пересекаться и касаться с другими фронтами. Остальные два фронта, описываемые функциями $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_3(\alpha)$, могут пересекаться, так как $v_2 \gtrless v_3$ и $v_5 \gtrless v_6$. Построенные фронты в случае отсутствия на них точек перегиба изображены на рис. 3. Величины v_1, v_2 и v_3 являются скоростями волн, распространяющихся вдоль оси x, а v_4, v_5 и v_6 – скорости волн вдоль оси z. Волну со скоростями v_1 и v_4 назовем первой (быстрой) продольной волной, а волну со скоростями v_2 и v_5 – второй (медленной) продольной волной и волну со скоростями v_3 и v_6 – волной с вогнутым фронтом. Такой же фронт имеет вторая волна в эффективной модели однородной упругой среды, перерезанной параллельными плоскостями, на которых имеет место контакт с проскальзыванием [7].

Рассмотрим теперь случаи, когда ветви графика $\tau(\alpha)$ имеют особенности. Такими особенностями являются точки внутри интервала $(0, \infty)$, где

$$\tau''(\alpha) = 0, \tag{5.2}$$

$$\tau'(\alpha) = 0, \tag{5.3}$$

$$\tau - \alpha\tau'(\alpha) = 0. \tag{5.4}$$

Условие (5.2) определяет точки перегиба графика. Этим точкам соответствуют угловые точки на фронте (начала и концы петель). Отметим, что внутри петли кривизна имеет другой знак по сравнению с кривизной вне петли. Петли могут быть расположены внутри прямого угла, ограниченного осями x и z, или в окрестностях этих осей. В последних случаях имеют место дополнительные точки пересечения с осями. Эти дополнительные точки пересечения с осями x и z определяются соответственно условиями (5.3) и (5.4). Особенности второго и третьего фронтов аналогичны особенностям фронтов, описываемых функциями $\tau_2(\alpha)$ и $\tau_4(\alpha)$ в работе [8], в которой приведены графики и фронты с петлями. В указанной работе строится и исследуется эффективная модель среды, в которой чередуются два пористых слоя Био с контактами проскальзывания на границах.

Количество особенностей фронтов в виде петель и дополнительных пересечений с осями ограничено. Чтобы сформулировать эти ограничения построим в интервале $-\infty < \alpha < \infty$

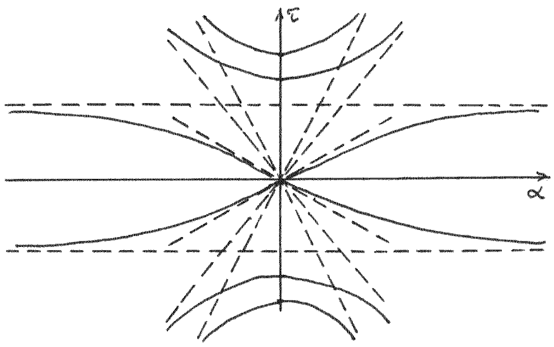

Рис. 4.

график многозначной функции $\tau(\alpha)$. Этот график оказывается симметричным относительно осей α и τ. Произвольная прямая $\tau = a\alpha + b$ не может пересечь указанный график более 6 раз, и это количественное ограничение определяется порядком уравнения (4.7) относительно τ. Другое ограничение состоит в том, что прямая, параллельная оси α, может пересечь график многозначной функции $\tau(\alpha)$ не больше 4 раз. Указанные петли на втором и третьем фронтах могут существовать при определенных условиях. Однако более сложные графики и фронты не удовлетворяют условиям ограничения.

§6. Сравнение эффективной модели с пористой средой Био

Сравним рассматриваемую эффективную модель с трансверсально-изотропной средой Био, в которой ось анизотропии параллельна оси z. Эта среда в плоском случае описывается уравнениями [9]

$$\sigma_{xx} = P'\frac{\partial u_x}{\partial x} + F\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q'\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right),$$
$$\sigma_{zz} = F\frac{\partial u_x}{\partial x} + P''\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q''\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right),$$
$$\sigma = Q'\frac{\partial u_x}{\partial x} + Q''\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xz} = L\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho'_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho'_{12}\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho''_{11}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho''_{12}\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho'_{12}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho'_{22}\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \rho''_{12}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho''_{22}\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

в которых σ_{xx}, σ_{zz}, σ_{xz} – напряжения в упругой фазе, σ – напряжение в жидкой фазе, u_x, u_z – смещения в упругой фазе и U_x, U_z – смещения в жидкой фазе. Указанное сравнение проведем в случае, когда

$$
L = 0, \quad \rho'_{12} = \rho''_{12} = 0. \tag{6.2}
$$

В этом случае уравнения (6.1) представятся равенствами

$$
\begin{aligned}
&\sigma = R\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + Q''\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q'\frac{\partial u_x}{\partial x},\\
&\sigma_{zz} = Q''\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + P''\frac{\partial u_z}{\partial z} + F\frac{\partial u_x}{\partial x},\\
&\sigma_{xx} = Q'\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + F\frac{\partial u_z}{\partial z} + P'\frac{\partial u_x}{\partial x},\\
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho'_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho''_{11}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho'_{22}\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \rho''_{22}\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Сравнение уравнений (2.5) и (2.3) с уравнениями (6.3) приводит к равенствам

$$
\begin{aligned}
&t_{xx}^{(1.2)} = t_{zz}^{(1.3)} = \sigma, \quad t_{zz}^{(2.4)} = \sigma_{zz}, \quad t_{xx}^{(3.4)} = \sigma_{xx},\\
&\widetilde{\varepsilon}_1 u_x^{(1.2)} = U_x, \quad \varepsilon_1 u_z^{(1.3)} = U_z, \quad \varepsilon_2 u_z^{(2.4)} = u_z, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 u_x^{(3.4)} = u_x,\\
&a_{11}/\Delta = R, \quad a_{12}/\Delta = Q'', \quad a_{13}/\Delta = Q',\\
&a_{22}/\Delta = P'', \quad a_{23}/\Delta = F, \quad a_{33}/\Delta = P',\\
&\rho_{12}/\widetilde{\varepsilon}_1 = \rho'_{22}, \quad \rho_{34}/\widetilde{\varepsilon}_2 = \rho'_{11}, \quad \rho_{13}/\varepsilon_1 = \rho''_{22}, \quad \rho_{24}/\varepsilon_2 = \rho''_{11}
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

и показывает полное совпадение уравнений при условиях (6.2) и (6.4).

Однако такое совпадение оказывается формальным, так как напряжения в эффективной модели и в среде Био имеют разные смыслы. Чтобы исследовать различие между эффективной моделью и средой Био, будем рассматривать эту эффективную модель, как и среду Био, двухфазной и состоящей из фазы 1 и фазы 4. Фаза 1 описывается смещениями $\widetilde{\varepsilon}_1 u_x^{(1.2)}$, $\varepsilon_1 u_z^{(1.3)}$ и напряжением $t_{xx}^{(1.2)} = t_{zz}^{(1.3)}$. Эти величины определяют полностью волновое поле в блоке 1, а также смещения и напряжения вдоль оси x в блоке 2 и вдоль оси z в блоке 3. Фаза 4 описывается смещениями $\widetilde{\varepsilon}_2 u_x^{(3.4)}$, $\varepsilon_2 u_z^{(2.4)}$ и напряжениями $t_{xx}^{(3.4)}$, $t_{zz}^{(2.4)}$. Эти величины определяют полностью поле в блоке 4, а также смещения и напряжения вдоль оси x в блоке 3 и вдоль оси z в блоке 2. Фаза 1 соответствует жидкой фазе в среде Био, а фаза 4 – упругой фазе. Как видно, фаза 1 в эффективной модели описывает не только жидкую среду, но и частично упругие среды в блоках 2 и 3. Фаза 4 определяет упругие среды полностью в блоке 4 и частично в блоках 2 и 3. Эффективная модель отличается от среды Био еще и тем, что смещения в эффективной модели, согласно равенствам (6.4), содержат дополнительные множители типа ε_i и $\widetilde{\varepsilon}_i$, соответствующие относительным объемам областей, где действуют эти смещения. Несмотря на это количественное различие характеристические функции, фронты и скорости для эффективной модели и среды Био совпадают.

§7. Частные случаи эффективной модели 1

1. Пусть выполняются соотношения

$$\varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1,\ \varepsilon_2 = \widetilde{\varepsilon}_2,\ A_2 = A_3 = A_4,\ B_2 = B_3 = B_4,\ \rho_2 = \rho_3 = \rho_4, \quad (7.1)$$

соответствующие случаю, когда блоки 1 и 4 являются квадратными, а упругие среды 2, 3, 4 оказываются одинаковыми. Граница между указанными блоками остаются границами с проскальзыванием. В этом случае уравнения эффективной модели (2.5) и (2.3) переходят в уравнения

$$t_{xx}^{(1.2)} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{11}\varepsilon_1\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + a_{12}\varepsilon_2\left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right)\right],$$

$$t_{zz}^{(2.4)} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{12}\varepsilon_1\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + a_{22}\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + a_{23}\,\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right],$$
$$t_{xx}^{(3.4)} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{13}\varepsilon_1\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + a_{23}\varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} + a_{33}\varepsilon_2\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\right],$$
$$\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial x} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial z} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz}^{(2.4)}}{\partial z} = \rho_2\frac{\partial^2 u_z^{(3.4)}}{\partial t^2}, \tag{7.2}$$

где

$$\begin{gathered}
a_{11} = A_{24}^2 - \widetilde{B}_4^2, \quad a_{12} = (A_{24} + \widetilde{B}_4)\widetilde{B}_2, \quad a_{22} = \widetilde{A}_{23}A_{24} - \widetilde{B}_2^2, \\
a_{23} = \widetilde{A}_{23}\widetilde{B}_4 + \widetilde{B}_2^2, \quad \Delta = \widetilde{A}_{23}a_{11} - 2\widetilde{B}_2 a_{12}, \quad \widetilde{A}_{23} = A_{23} + \frac{\varepsilon_1^2}{\lambda_1}, \\
A_{23} = 2A_2\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad A_{24} = A_2\varepsilon_2, \\
\widetilde{B}_2 = B_2\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \widetilde{B}_4 = B_2\varepsilon_2^2, \quad \rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2.
\end{gathered} \tag{7.4}$$

В рассматриваемой эффективной модели также распространяются три объемных волны. В случае точечного источника, расположенного в начале координат, волновые фронты оказываются симметричными относительно биссектрисы прямого угла, образованного осями x и z. Скорости волн вдоль осей даются равенствами

$$v_{1,2}^2 = v_{4,5}^2 =$$
$$= \frac{\rho_{12}\varepsilon_2 a_{22} + \rho_2\varepsilon_1 a_{11} \pm \sqrt{(\rho_{12}\varepsilon_2 a_{22} - \rho_2\varepsilon_1 a_{11})^2 + 4\varepsilon_1\,\varepsilon_2\rho_1\rho_{12}a_{12}^2}}{2\rho_2\rho_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}\,\varepsilon_2 A_2,$$
$$v_3^2 = v_6^2 = \frac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{(\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2}. \tag{7.5}$$

2. Рассмотрим случай, когда в исходной среде выполняются условия (7.1) и квадрат 1, заполненный жидкостью, сжимается в точку, квадрат 4 занимает всю ячейку и

$$\varepsilon_1 \to 0, \quad \varepsilon_2 \to 1. \tag{7.6}$$

После предельного перехода при условии (7.6) на основании формул (7.5) приходим к равенствам

$$v_1^2 = v_4^2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}, \quad v_2^2 = v_5^2 = \frac{2\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}{\rho_2(\lambda_2+2\mu_2)},$$
$$v_3^2 = v_6^2 = \frac{4\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}{\rho_2(\lambda_2+2\mu_2)} \tag{7.7}$$

для скоростей распространения вдоль осей. Исследование волнового поля в эффективной модели при условиях (7.1) и (7.6) полезно провести также и на основе уравнений эффективной модели. С этой целью исключим первое и третье уравнения (2.3) и первое уравнение (2.5) как потерявшие смысл соотношения. Оставшиеся уравнения (2.5) и (2.3) описывают однородную упругую среду, в которой $t_{xz} = 0$ (см. [5, 10]). Характеристическая функция в этом случае имеет выражение

$$\alpha^2 = \rho_2\tau^2\left[1 - \frac{\rho_2\tau^2}{\lambda_2+2\mu_2}\right] \Big/ \left[\frac{4\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_2+2\mu_2} - \rho_2\tau^2\right]. \tag{7.8}$$

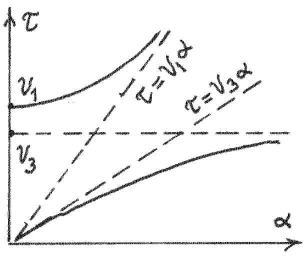

Рис. 5

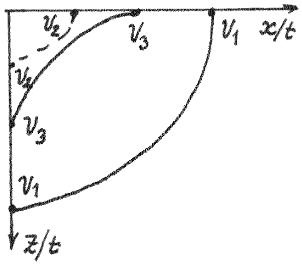

Рис. 6.

График характеристической функции содержит две ветви (рис. 5). Этим ветвям соответствуют два фронта: передний выпуклый фронт и задний вогнутый фронт (рис. 6). Скорости распространения волн вдоль осей даются первым и третьим равенствами (7.7). Вторая продольная волна, распространяющаяся со скоростью v_2 вдоль осей, отсутствует в предельной эффективной модели, но при малых ε_1 эта волна существует. Ее скорость приближенно выражается второй формулой (7.7). Отметим, что эта формула не содержит параметров жидкой среды и поэтому не связана с жидкой средой. При $\varepsilon = 0$ эта волна имеет нулевую интенсивность. Фронт этой волны показан на рис. 6 штриховой линией.

3. В частном случае, когда

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 0 \tag{7.9}$$

и жидкий квадрат 1 заполняет всю ячейку, скорости объемных волн, согласно формулам (7.5), выражаются равенствами

$$v_2^2 = \frac{\lambda_1}{\rho_1}, \quad v_1^2 = v_3^2 = \frac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{\rho_2(\lambda_2 + 2\mu_2)}. \tag{7.10}$$

В этом случае также полезно исследовать эффективную модель, используя первое уравнение (2.5), а также первое и третье уравнения (2.3). Остальные уравнения (2.3) и (2.5) теряют смысл, если выполняются условия (7.9). Используемые уравнения (2.3) и (2.5) определяют однородную изотропную жидкую среду. Характеристическая функция для этой среды выражается равенством

$$\tau^2 = \frac{\lambda_1}{\rho_1}(\alpha^2 + 1) \tag{7.11}$$

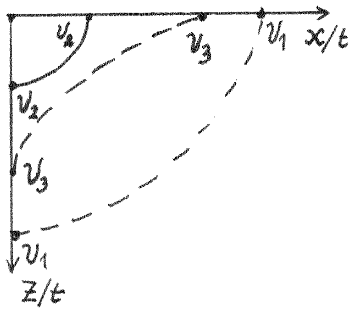

Рис. 7.

и определяет единственную волну, распространяющуюся со скоростью $v_2 = \sqrt{\lambda_1/\rho_1}$ (рис. 7). Волны со скоростями v_1 и v_3 существуют при условии $\varepsilon_2 \ll 1$ и отсутствуют в случае $\varepsilon_2 = 0$. На рис. 7 фронты этих волн показаны штриховыми линиями.

Сравнивая частные случаи 2 и 3, приходим к выводу, что по мере убывания величины ε_1 от 1 до 0 эффективная модель теряет свойства жидкости и при $\varepsilon_1 \to 0$ становится упругой средой, в которой $t_{xz} = 0$.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели упругой блочной среды с проскальзыванием на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 96–117.
2. Л. А. Молотков, *Эффективная модель блочной пористой среды с контактами проскальзыванием на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (1994), 140–164.
3. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
4. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves in alternating fluid/solid layers.* — J. Acoust. Soc. Am. **81, No. 5** (1987), 1227–1234.
5. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–122.
6. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М. (1967).
7. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактами проскальзывания на границах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **210** (1994), 192–212.
8. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели пористой слоистой среды со скользящим контактом между слоями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 184–206.
9. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28, No. 2** (1956), 168–178.
10. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* СПб (2001).

Molotkov L. A. About propagation of seismic waves in block elastic-fluid media. I.

In the paper the approach of averaging block elastic-fluid media is proposed and the effective model for block medium in which every cell consists of three elastic blocks and one fluid block is constructed. The investigation of the model equations is shown that in this model two longitudinal waves and one wave with a concave front propagate. The limited cases when the fluid block is narrowed down to a point or when the fluid block occupies the whole cell are considered in the paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 января 2003 г.