Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

Л. А. Молотков

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ УПРУГО-ЖИДКИХ СРЕДАХ. II

Предлагаемая работа исследует распространение волн в блочной упруго-жидкой среде и является продолжением статьи [1]. Среды, рассматриваемые в обеих статьях, могут быть представлены на рис. 1 [1]. Их различие состоит только в разных количествах упругих и жидких блоков в ячейках. Для рассматриваемой в этой работе среды также строится эффективная модель и на основе этой модели проводится изучение волнового поля. Результаты исследования распространения волн в предлагаемой работе и в статье [1] сравниваются между собой. Это сравнение позволяет установить особенности волновых полей в каждой из сред.

Так как исследования в настоящей работе и в статье [1] проводятся по одинаковой методике, то они излагаются довольно кратко и с большим числом ссылок на работу [1]. Чтобы упростить эти ссылки, вводится единая нумерация параграфов и рисунков в работе [1] и в настоящей статье.

§8. Вывод уравнений эффективной модели среды 2

Пусть задана двумерная блочная упруго-жидкая среда $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, состоящая из $n\widetilde{n}$ одинаковых прямоугольных ячеек с размерами h и $\widetilde{h}$ (рис. 1). Каждая ячейка содержит 4 блока: блоки 1, 4 – упругие и блоки 2, 3 – жидкие (рис. 8). Размеры блоков выражаются формулами (1.1). Упругие и жидкие среды описываются уравнениями (1.2)–(1.5). Граничные условия задаются соотношениями (1.6)–(1.8).

Для построения эффективных моделей рассматриваемой среды в волновом поле совершается предельный переход при условиях (1.9) и выясняется, каким уравнениям удовлетворяют предельные волновые поля. Эти уравнения учитывают осреднение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант No. 02-05-65081.

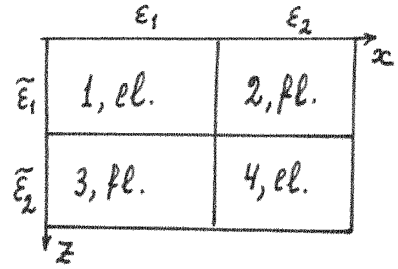

Рис. 8

среды и описывают эффективную модель сред. В результате предельного перехода при условиях (1.9) каждая ячейка и все ее четыре блока сужаются в одну точку. Вследствие этого эффективная модель оказывается четырехфазной. Из смещений и напряжений в каждом из блоков могут быть составлены четыре непрерывные вдоль оси x функции (1.10) и четыре непрерывные вдоль оси z функции (1.11). Для их производных по координатам записываются формулы осреднения (1.12). В эти формулы нужно подставить соотношения для производных смещений и напряжений в упругих и жидких блоках (1.13) и (1.14).

После указанной подстановки и почленного сложения равенств приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} = F_2 t_{xx}^{(1.2)} - B_{14} t_{xx}^{(3.4)},\ t_{xx}^{(1.2)} = t_{zz}^{(2.4)}, \\ &\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} = -B_{14} t_{xx}^{(1.2)} + F_3 t_{xx}^{(3.4)},\ t_{xx}^{(3.4)} = t_{zz}^{(1.3)}; \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial x} = \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial x} = \rho_{34} \frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial z} = \rho_{13} \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial z} = \rho_{24} \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

в которых использованы обозначения

$$A_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)}, \quad B_i = \frac{\lambda_i}{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)}, \quad (i = 1, 4),$$

$$A_{14} = s_1 A_1 + s_4 A_4, \quad B_{14} = s_1 B_1 + s_4 B_4,$$

$$s_1 = \varepsilon_1 \widetilde{\varepsilon}_1, \;\; s_2 = \varepsilon_2 \widetilde{\varepsilon}_1, \;\; s_3 = \varepsilon_1 \widetilde{\varepsilon}_2, \;\; s_4 = \varepsilon_2 \widetilde{\varepsilon}_2, \tag{8.3}$$

$$F_2 = A_{14} + \frac{s_2}{\lambda_2}, \quad F_3 = A_{14} + \frac{s_3}{\lambda_3}, \quad \lambda_2 = \rho_2 v_2^2, \quad \lambda_3 = \rho_3 v_3^2,$$

$$\rho_{12} = \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3 \varepsilon_1 + \rho_4 \varepsilon_2,$$

$$\rho_{13} = \rho_1 \widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_3 \widetilde{\varepsilon}_2, \quad \rho_{24} = \rho_2 \widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_4 \widetilde{\varepsilon}_2.$$

Уравнения (8.1) описывают закон Гука для эффективной модели. Чтобы записать закон Гука в обычной форме, решим уравнения (8.1) относительно $t_{xx}^{(1.2)}$ и $t_{xx}^{(3.4)}$ и получим соотношение

$$\begin{aligned}
t_{xx}^{(1.2)} = t_{zz}^{(2.4)} &= \frac{F_3}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{B_{14}}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right), \\
t_{xx}^{(3.4)} = t_{zz}^{(1.3)} &= \frac{B_{14}}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{F_2}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right),
\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\Delta = F_2 F_3 - B_{14}^2.$$

После подстановки первого и второго равенств (8.4) в (8.2) приходим к уравнениям Ламе

$$\begin{aligned}
&\frac{F_3}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x \partial z}\right) + \\
&+ \frac{B_{14}}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x \partial z}\right) = \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{F_3}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+\varepsilon_2\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}\right)+\\
&+\frac{B_{14}}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+\varepsilon_1\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}\right)=\rho_{24}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2},\\
&\frac{B_{14}}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2}+\varepsilon_2\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}\right)+\\
&+\frac{F_2}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2}+\varepsilon_1\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}\right)=\rho_{34}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2},\\
&\frac{B_{14}}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+\varepsilon_2\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}\right)+\\
&+\frac{F_2}{\Delta}\left(\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+\varepsilon_1\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}\right)=\rho_{13}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

для эффективной модели.

§9. Энергетические исследования

Помножим первое, второе, третье и четвертое уравнения (8.2) соответственно на $\widetilde{\varepsilon}_1\partial u_x^{(1.2)}/\partial t$, $\widetilde{\varepsilon}_2\partial u_x^{(3.4)}/\partial t$, $\varepsilon_1\partial u_z^{(1.3)}/\partial t$ и $\varepsilon_2\partial u_z^{(2.4)}/\partial t$, сложим почленно полученные уравнения и после стандартных преобразований получим уравнение энергетического баланса

$$
\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial W_k}{\partial t}+\frac{\partial W_p}{\partial t},
\tag{9.1}
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
p_x&=\widetilde{\varepsilon}_1 t_{xx}^{(1.2)}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}+\widetilde{\varepsilon}_2 t_{xx}^{(3.4)}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t},\\
p_z&=\varepsilon_1 t_{xx}^{(3.4)}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}+\varepsilon_2 t_{xx}^{(1.2)}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

– потоки энергий вдоль осей x и z

$$
\begin{aligned}
W_k=\frac{1}{2}\Bigg[&\widetilde{\varepsilon}_1\rho_{12}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2+\widetilde{\varepsilon}_2\rho_{34}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2+\\
&+\varepsilon_1\rho_{13}\left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2+\varepsilon_2\rho_{24}\left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2\Bigg]
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = t_{xx}^{(1.2)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right] + \\ + t_{xx}^{(3.4)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right]. \tag{9.4}$$

После подстановки формул (8.4) в соотношение (9.4) приходим к равенству

$$W_p = \frac{1}{2\Delta}\left[F_3\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right)^2 + \right. \\ + 2B_{14}\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right)\left(\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) + \\ \left. + F_2\left(\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right)^2\right] \tag{9.5}$$

для плотности потенциальной энергии. Так как выполняется неравенство

$$A_{14} > B_{14}, \tag{9.6}$$

то, согласно формуле (9.5), плотность потенциальной энергии является положительно определенной формой аргументов

$$\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} \tag{9.7}$$

и неотрицательно определенной формой производных смещений. Плотность кинетической энергии является положительно определенной формой.

Преобразуем теперь равенства (9.3) и (9.5) для плотностей кинетической и потенциальной энергий. Если в формулу (9.3) подставить выражения (8.3) для величин ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{24} и ρ_{34}, то придем к соотношению

$$
\begin{aligned}
W_k = \frac{\rho_1 s_1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2\right] + \\
+ \frac{\rho_2 s_2}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2\right] + \\
+ \frac{\rho_3 s_3}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2\right] + \\
+ \frac{\rho_4 s_4}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

В формуле (9.8) каждое слагаемое описывает вклад одного из блоков в плотность кинетической энергии. С учетом формулы (8.1) равенство (9.5) заменяется соотношением

$$
\begin{aligned}
W_p = \frac{1}{2}\left[\left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right) t_{xx}^{(1.2)} + \right. \\
\left. + \left(\widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) t_{xx}^{(3.4)}\right].
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

Переходя от величин ε_1, ε_2, $\widetilde{\varepsilon}_1$ и $\widetilde{\varepsilon}_2$ к относительным площадям блоков s_1, s_2, s_3 и s_4 и используя связь между напряжениями в жидких средах, получим другое представление для плотности потенциальной энергии

$$
\begin{aligned}
W_p = \frac{s_1}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} t_{xx}^{(1.2)} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} t_{zz}^{(1.3)}\right) + \\
+ \frac{s_2}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right) t_{xx}^{(1.2)} + \\
+ \frac{s_3}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right) t_{xx}^{(3.4)} + \\
+ \frac{s_4}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} t_{xx}^{(3.4)} + \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} t_{zz}^{(2.4)}\right).
\end{aligned}
\tag{9.10}
$$

Из этого представления следует, что каждое слагаемое (9.10) описывает вклад одного из блоков в плотность потенциальной энергии.

Переход от уравнений эффективной модели (8.3) и (8.4) к выражениям для плотностей кинетической и потенциальной энергий может быть осуществлен также и в обратном направлении и таким путем могут быть выведены уравнения (8.1) и (8.2). Плотности кинетической и потенциальной энергий с учетом условия $t_{xz} = 0$ после предельного перехода представляются в одной точке формулами

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \rho_i \, s_i \left[\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial t} \right)^2 \right], \tag{9.11}$$

$$\begin{aligned} W_p = {} & \frac{s_1}{2} \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} t_{xx1} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} t_{zz1} \right) - \\ & - \frac{s_2}{2} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} \right) p_2 - \frac{s_3}{2} \left(\frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z3}}{\partial z} \right) p_3 + \\ & + \frac{s_4}{2} \left(\frac{\partial u_{x4}}{\partial x} t_{xx4} + \frac{\partial u_{z4}}{\partial z} t_{zz4} \right). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Так как в этой же точке выполняются граничные условия (1.6), (1.8), и (1.10) и (1.11), то плотность кинетической энергии выразим формулой (9.3), а плотность потенциальной энергии – соотношением

$$\begin{aligned} W_p = {} & \frac{\widetilde{\varepsilon}_1}{2} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} \right) t_{xx}^{(1.2)} + \\ & + \frac{\varepsilon_2}{2} \left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{z4}}{\partial z} \right) t_{zz}^{(2.4)} + \\ & + \frac{\widetilde{\varepsilon}_2}{2} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x4}}{\partial x} \right) t_{xx}^{(3.4)} + \\ & + \frac{\varepsilon_1}{2} \left(\widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{z3}}{\partial z} \right) t_{zz}^{(1.3)}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

В соответствии с определением производной, а также с условиями инвариантности выражения для плотности потенциальной энергии, естественно предположить выполнение первых четырех формул (1.12). На основании этих формул следует закон Гука (8.1) для эффективной модели. Уравнения сплошной среды для эффективной модели (8.2) выводятся вариационными методами с использованием равенства (9.3).

§10. Характеристические функции и волновые фронты

Для решения уравнений (8.5) используются интегральные преобразования (Фурье и Лапласа), а волновое поле представляется в виде наложения плоских волн. Подынтегральные функции в случае смещений $u_x^{(1.2)}$, $u_x^{(3.4)}$, $u_z^{(1.3)}$, $u_z^{(2.4)}$ имеют выражения

$$\begin{aligned} &U_x^{(1.2)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \quad U_x^{(3.4)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \\ &U_z^{(1.3)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \quad U_z^{(2.4)}\, e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \end{aligned} \tag{10.1}$$

в которых k и τ – переменные интегрирования. Величины τ и α связаны равенствами

$$\tau = v_{ph}/\sin\varphi, \quad \alpha = \operatorname{ctg}\varphi \tag{10.2}$$

с фазовой функцией v_{ph} и углом φ между нормалью к фронту и осью z. Многозначная характеристическая функция $\tau(\alpha)$ позволяет вычислять фронты от точечного источника, расположенного в начале координат, с помощью параметрических формул

$$\begin{aligned} x &= t\big[\tau - \alpha\tau'(\alpha)\big], \\ z &= t\tau'(\alpha), \end{aligned} \tag{10.3}$$

которые определены при положительных τ и вещественных α. Равенства (10.3) соответствуют особенностям интегральных смещений [3].

Для нахождения характеристической функции $\tau(\alpha)$ подставим выражения (10.1) в (8.5) и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &F_3\big(\widetilde{\varepsilon}_1 U_x^{(1.2)} + \varepsilon_2\alpha U_z^{(2.4)}\big) + B_{14}\big(\widetilde{\varepsilon}_2 U_x^{(3.4)} + \varepsilon_1\alpha U_z^{(1.3)}\big) = \rho_{12}\tau^2\Delta U_x^{(1.2)}, \\ &F_3\alpha\big(\widetilde{\varepsilon}_1 U_x^{(1.2)} + \varepsilon_2\alpha U_z^{(2.4)}\big) + B_{14}\alpha\big(\widetilde{\varepsilon}_2 U_x^{(3.4)} + \varepsilon_1\alpha U_z^{(1.3)}\big) = \rho_{24}\tau^2\Delta U_z^{(2.4)}, \\ &B_{14}\big(\widetilde{\varepsilon}_1 U_x^{(1.2)} + \varepsilon_2\alpha U_z^{(2.4)}\big) + F_2\big(\widetilde{\varepsilon}_2 U_x^{(3.4)} + \varepsilon_1\alpha U_z^{(1.3)}\big) = \rho_{34}\tau^2\Delta U_x^{(3.4)}, \\ &B_{14}\alpha\big(\widetilde{\varepsilon}_1 U_x^{(1.2)} + \varepsilon_2\alpha U_z^{(2.4)}\big) + F_2\alpha\big(\widetilde{\varepsilon}_2 U_x^{(3.4)} + \varepsilon_1\alpha U_z^{(1.3)}\big) = \rho_{13}\tau^2\Delta U_z^{(1.3)}, \end{aligned} \tag{10.4}$$

которая имеет ненулевое решение при условии

$$\begin{vmatrix} F_3 - \rho_{12}\tau^2\Delta\tilde{\varepsilon}_1^{-1} & F_3\alpha & B_{14} & B_{14}\alpha \\ F_3\alpha & F_3\alpha^2 - \rho_{24}\tau^2\Delta\varepsilon_2^{-1} & B_{14}\alpha & B_{14}\alpha^2 \\ B_{14} & B_{14}\alpha & F_2 - \rho_{34}\tau^2\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{-1} & F_2\alpha \\ B_{14}\alpha & B_{14}\alpha^2 & F_2\alpha & F_2\alpha^2 - \rho_{13}\tau^2\Delta\varepsilon_1^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= 0. \tag{10.5}$$

Равенство (10.5) определяет неявно функцию $\tau(\alpha)$.

Как и в §4, величины τ^2 могут рассматриваться как характеристические числа при одновременном приведении к диагональной форме двух матриц

$$\begin{pmatrix} F_3 & F_3\alpha & B_{14}\alpha & B_{14} \\ F_3\alpha & F_3\alpha^2 & B_{14}\alpha^2 & B_{14}\alpha \\ B_{14}\alpha & B_{14}\alpha^2 & F_2\alpha^2 & F_2\alpha \\ B_{14} & B_{14}\alpha & F_2\alpha & F_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta\begin{pmatrix} \rho_{12}\tilde{\varepsilon}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{24}\varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{34}\tilde{\varepsilon}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{13}\varepsilon_2^{-1} \end{pmatrix}. \tag{10.6}$$

Обе матрицы являются симметричными при всех вещественных α, при этом первая из них – неотрицательно определенная, а вторая – положительно определенная. Согласно теореме, приведенной в книге Ф. Р. Гантмахера [4], и обобщению этой теоремы, все решения уравнения (10.5) τ^2 при любых вещественных α оказываются неотрицательными. Отсюда следует, что уравнение (10.5) определяет вещественные функции $\tau_i(\alpha)$ при всех вещественных α.

После ряда преобразований определителя в формуле (10.5) и выделения множителя τ^4 равенство (10.5) переходит в соотношение

$$\begin{vmatrix} F_3\tilde{\varepsilon}_1 - \rho_{12}\tau^2\Delta & F_2\varepsilon_2 & B_{14}\tilde{\varepsilon}_2 & B_{14}\varepsilon_1 \\ \rho_{12}\alpha^2 & -\rho_{24} & 0 & 0 \\ B_{14}\tilde{\varepsilon}_1 & B_{14}\varepsilon_2 & F_2\tilde{\varepsilon}_2 - \rho_{34}\tau^2\Delta & F_2\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \rho_{34}\alpha^2 & -\rho_{13} \end{vmatrix} = 0. \tag{10.7}$$

В результате вычисления определителя формула (10.7) заменяется биквадратным уравнением

$$\begin{gathered} \Delta\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34}\tau^4 - \rho_{12}\rho_{34}\big(\rho_{13}F_3\varepsilon_2 + \rho_{24}F_2\varepsilon_1\big)\alpha^2\tau^2 - \\ -\rho_{13}\rho_{24}\big(\rho_{34}F_3\tilde{\varepsilon}_1 + \rho_{12}F_2\tilde{\varepsilon}_2\big)\tau^2 + \rho_{12}\rho_{34}\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^4 + \\ +(\rho_{12}\rho_{13}s_4 + \rho_{24}\rho_{34}s_1)\alpha^2 + \rho_{13}\rho_{24}\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2 = 0 \end{gathered} \tag{10.8}$$

относительно τ. Решение уравнения (10.8) представляется формулой

$$\tau_{1,2}^2 = \Big[\rho_{12}\rho_{34}\big(\rho_{13}F_3\varepsilon_2 + \rho_{24}F_2\varepsilon_1\big)\alpha^2 + \\ +\rho_{13}\rho_{24}\big(\rho_{34}F_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_{12}F_2\widetilde{\varepsilon}_2\big) \pm \sqrt{D}\Big] \Big/ \big(2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34}\Delta\big), \qquad (10.9)$$

$$D = \Big[\rho_{12}\rho_{34}\big(\rho_{13}F_3\varepsilon_2 + \rho_{24}F_2\varepsilon_1\big)\alpha^2 + \rho_{13}\rho_{24}\big(\rho_{34}F_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_{12}F_2\widetilde{\varepsilon}_2\big)\Big]^2 - \\ -4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34}\Delta\Big[\rho_{12}\rho_{34}\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^4 + \big(\rho_{12}\rho_{13}s_4 + \\ +\rho_{24}\rho_{34}s_1\big)\alpha^2 + \rho_{13}\rho_{24}\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2\Big]. \qquad (10.10)$$

Так как $\tau^2(\alpha)$ при вещественных α являются неотрицательными величинами, то среди функций $\tau(\alpha)$ можно выделить неотрицательные функции $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$.

Для построения фронтов от точечного источника по формулам (10.3) рассмотрим функции $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$ и построим примерные графики этих функций. При $\alpha = 0$ уравнение (10.8) заменяется уравнением

$$\Delta\rho_{12}\rho_{34}\tau^4 - \big(\rho_{34}F_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_{12}F_2\widetilde{\varepsilon}_2\big)\tau^2 + \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2 = 0, \qquad (10.11)$$

корни которого $\tau_1^2(0) = v_1^2$ и $\tau_2^2(0) = v_2^2$ представляются равенствами

$$v_{1,2}^2 = \qquad (10.12)$$
$$= \frac{\rho_{34}F_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_{12}F_2\widetilde{\varepsilon}_2 \pm \sqrt{\big(\rho_{34}F_3\widetilde{\varepsilon}_1 - \rho_{12}F_2\widetilde{\varepsilon}_2\big)^2 + 4\rho_{12}\rho_{34}B_{14}^2\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2}}{2\rho_{12}\,\rho_{34}\Delta}.$$

Другие концы графиков $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ определяются, как правило, уравнением

$$\Delta\rho_{13}\rho_{24}\tau^4 - \big(\rho_{12}F_2\varepsilon_1 + \rho_{13}F_3\varepsilon_2\big)\alpha^2\tau^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^4 = 0. \qquad (10.13)$$

Его корни v_4 и v_5 определяют асимптоты

$$\tau_1 = v_4\alpha, \quad \tau_2 = v_5\alpha, \qquad (10.14)$$

к которым приближаются графики функций $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ при больших α и τ (рис. 9). Коэффициенты v_4 и v_5 выражаются равенствами

$$v_{4,5}^2 = \tag{10.15}$$
$$= \frac{\rho_{24}F_2\varepsilon_1 + \rho_{13}F_3\varepsilon_2 \pm \sqrt{\left(\rho_{24}F_2\varepsilon_1 + \rho_{13}F_3\varepsilon_2\right)^2 - 4\rho_{13}\rho_{24}\Delta\varepsilon_1\varepsilon_2}}{2\rho_{13}\,\rho_{24}\Delta}$$

или

$$v_{4,5}^2 = \tag{10.16}$$
$$= \frac{\rho_{24}F_2\varepsilon_1 + \rho_{13}F_3\varepsilon_2 \pm \sqrt{\left(\rho_{24}F_2\varepsilon_1 - \rho_{13}F_3\varepsilon_2\right)^2 + 4\rho_{13}\rho_{24}B_{14}^2\varepsilon_1\varepsilon_2}}{2\rho_{13}\,\rho_{24}\Delta}.$$

Формулы (10.12), (10.14)–(10.16) определяют концы графиков $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ при условии

$$\varepsilon_1 \neq 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 \neq 0. \tag{10.17}$$

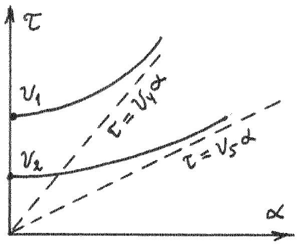

Рис. 9

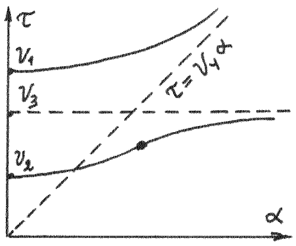

Рис. 10.

При выполнении условия

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = 0. \tag{10.18}$$

$v_5 = 0$ и уравнение (10.8) имеет особенность, которая состоит в том, что это уравнение из квадратного уравнения относительно α^2 становится линейным. В случае $\varepsilon_1 = 0$ соотношение (10.8) заменяется уравнением

$$\Delta\rho_2\rho_4\rho_{24}\tau^4 - \rho_2\rho_4F_3\alpha^2\tau^2 - \rho_{24}(\rho_4F_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_2F_2\widetilde{\varepsilon}_2)\tau^2 +$$

$$+\rho_2\widetilde{\varepsilon}_2\alpha^2 + \rho_{24}\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2 = 0, \tag{10.19}$$

а среда из блочной превращается в слоистую среду, в которой чередуются жидкие слои 2 и упругие слои 4. Эта среда исследовалась в работах [3, 5]. Характеристическая функция

$$\alpha^2 = \frac{\rho_{24}}{\rho_2}\,\frac{\Delta\rho_2\rho_4\tau^4 - (\rho_4 F_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_2 F_2\widetilde{\varepsilon}_2)\tau^2 + \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2}{\rho_{24}F_3\tau^2 - \widetilde{\varepsilon}_2} \tag{10.20}$$

для этой среды определяется из уравнения (10.19). Выражение (10.20) соответствует соотношению (39.4) монографии [6]. Из равенств (10.19) и (10.20) следует, что при $\alpha \to \infty$ левая часть уравнения (10.19) остается конечной, если

$$\tau^2 = v_3^2 = \frac{4\mu_4(\lambda_4+\mu_4)}{(\lambda_4+2\mu_4)\rho_4}. \tag{10.21}$$

К аналогичному результату

$$\tau^2 = v_3^2 = \frac{4\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}{(\lambda_1+2\mu_1)\rho_1}. \tag{10.22}$$

приходим в случае $\varepsilon_2 = 0$. В обоих случаях v_3 является скоростью пластинчатой волны, распространяющейся вдоль тонких упругих слоев, и удовлетворяет неравенствам

$$v_1 < v_3 \leqslant v_2. \tag{10.23}$$

Соединим плавными кривыми точки графиков при $\alpha = 0$ и при $\alpha = \infty$ и получим примерные ветви характеристических функций в случаях (10.17) и (10.18) (рис. 9 и 10). Остановимся теперь на возможных особенностях графиков. График функции $\tau_2(\alpha)$ в случае (10.17) может иметь точки перегиба, экстремумы и точки, в которых касательная совпадает с направлением радиуса-вектора. Чтобы сформулировать ограничения возможностей этих особенностей, следует построить графики обеих функций $\tau(\alpha)$ при $-\infty < \alpha < \infty$ и $-\infty < \tau < \infty$ и использовать симметрию графиков относительно координатных осей. Любая прямая на плоскости α, τ не может пересечь эти графики более четырех раз, при этом указанное число определяется порядком уравнения (10.8). Из этого правила следует, что график $\tau_1(\alpha)$ в случае (10.17) не имеет особенностей.

Графики $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\alpha)$ в случае (10.18) исследовались в §39 [6]. На основании этих исследований были сделаны выводы: график

$\tau_1(\alpha)$ не имеет особенностей, а ветвь $\tau_2(\alpha)$ имеет единственную особенность в виде точки перегиба, которая показана на рис. 10 жирной точкой.

Используя графики, удается построить по формулам (10.3) в случаях (10.17) и (10.18) фронты от источника, расположенного в начале координат (рис. 11 и 12). Передние фронты в обоих

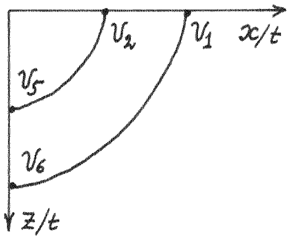

Рис. 11

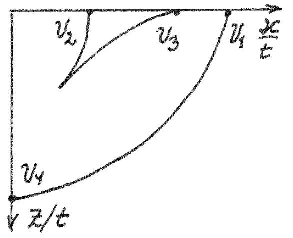

Рис. 12.

случаях не имеют особенностей. Второй фронт в случае (10.17) показан на рис. 11 без особенностей, но этот фронт может иметь петли, выступы в соседние квадранты и дополнительные пересечения с координатными осями. Например, при $\varepsilon_1 \ll 1$ (или $\varepsilon_2 \ll 1$) второй фронт имеет петлю, которая при $\varepsilon_1 \to 0$ (или $\varepsilon_2 \to 0$) образует треугольный фронт. В случае (10.18) треугольный фронт имеет единственную особенность в виде угловой точки, разделяющей фронт на выпуклую и вогнутую части.

§11. Частные случаи модели 2

1. Пусть в рассматриваемой среде обе упругие среды 1 и 4 одинаковые

$$\lambda_1 = \lambda_4, \quad \mu_1 = \mu_4, \quad \rho_1 = \rho_4, \tag{11.1}$$

обе жидкие среды 2 и 3 также одинаковые

$$\lambda_2 = \lambda_3, \quad \rho_2 = \rho_3 \tag{11.2}$$

и одинаковыми оказываются относительные размера блока 1

$$\varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1. \tag{11.3}$$

Из равенств (11.1)–(11.3) следуют соотношения

$$A_1 = A_4, \quad B_1 = B_4, \quad F_2 = F_3, \quad \rho_{12} = \rho_{13}, \quad \rho_{24} = \rho_{34}. \tag{11.4}$$

При предположениях (11.1)–(11.4) формулы (10.9) и (10.10) заменяются равенствами

$$\tau_{1,2}^2 = \frac{F_2(\alpha^2+1)(\rho_{24}\varepsilon_1 + \rho_{12}\varepsilon_2) \pm \sqrt{D}}{2\rho_{12}\rho_{24}(F_2^2 - B_{14}^2)}, \tag{11.5}$$

$$D = F_2^2(\alpha^2+1)^2(\rho_{24}\varepsilon_1 + \rho_{12}\varepsilon_2)^2 -$$

$$-4(F_2^2 - B_{14}^2)(\alpha^2\rho_{24}\varepsilon_1 + \rho_{12}\varepsilon_2)(\alpha^2\rho_{12}\varepsilon_2 + \rho_{24}\varepsilon_1), \tag{11.6}$$

а скорости каждой волны вдоль осей становятся равными и представляются равенствами

$$v_{1,2}^2 = v_{4,5}^2 = \tag{11.7}$$
$$\frac{F_2(\rho_{24}\varepsilon_1 + \rho_{12}\varepsilon_2) \pm \sqrt{F_2^2(\rho_{24}\varepsilon_1 - \rho_{13}\varepsilon_2)^2 + 4\rho_{12}\rho_{24}B_{14}^2\varepsilon_1\varepsilon_2}}{2\rho_{12}\rho_{24}(F_2^2 - B_{14}^2)}.$$

Фронты обеих волн, изображенные на рис. 11, становятся симметричными относительно биссектрисы первого квадранта.

Если, кроме предположений (11.1)–(11.4), делается дополнительное предположение

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5, \tag{11.8}$$

то выполняются дополнительные равенства

$$\rho_{12} = \rho_{24} = \overline{\rho}. \tag{11.9}$$

В этом случае выражения (11.5) и (11.6) заменяются соотношениями

$$\tau_1^2 = \frac{\alpha^2+1}{2\overline{\rho}(F_2 - B_{14})}, \quad \tau_2^2 = \frac{\alpha^2+1}{2\overline{\rho}(F_2 + B_{14})}, \tag{11.10}$$

а скорости волн представляются равенствами

$$v_{1,4}^2 = \frac{2(\lambda_1 + \mu_1)\lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2)\overline{\rho}}, \quad v_{2,5}^2 = \frac{2\mu_1\lambda_2}{\overline{\rho}(\mu_1 + \lambda_2)}. \tag{11.11}$$

Эффективная модель 2 при предположениях (11.1)–(11.4), (11.8) и (11.9) становится изотропной и фронты волн оказываются дугами окружностей (рис. 11). При указанных условиях эффективная модель описывается уравнениями закона Гука

$$
\begin{aligned}
&t_{xx}^{(1.2)} = t_{zz}^{(2.4)} = \frac{F_2}{2\Delta}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{B_{14}}{2\Delta}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right), \\
&t_{xx}^{(3.4)} = t_{zz}^{(1.3)} = \frac{B_{14}}{2\Delta}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{F_2}{2\Delta}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{11.12}
$$

сплошной среды

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial x} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial x} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial t_{xx}^{(3.4)}}{\partial z} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial t_{xx}^{(1.2)}}{\partial z} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{11.13}
$$

и уравнениями Ламе

$$
\begin{aligned}
&\frac{F_2}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x \partial z}\right) + \frac{B_{14}}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x \partial z}\right) = \\
&= \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \\
&\frac{F_2}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}\right) + \frac{B_{14}}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}\right) = \\
&= \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}, \\
&\frac{B_{14}}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x \partial z}\right) + \frac{F_2}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x \partial z}\right) = \\
&= \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{11.14}
$$

$$\frac{B_{14}}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}\right) + \frac{F_2}{2\Delta}\left(\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}\right) =$$
$$= \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}.$$

Среда, описываемая уравнениями (11.2)–(11.14), может формально рассматриваться как частный случай пороакустической модели Био [7] и в этой среде также могут быть выделены две фазы. Отличие этой среды от модели Био состоит в том, что выделенные фазы, как и в §6, не соответствуют упругим и жидким средам. Уравнения (11.12)–(11.14) описывают эффективную модель среды, в которой "перемешены" упругие и жидкие частицы, при этом объем упругих частиц равен объему жидких частиц.

2. Рассмотрим случай, когда упругий блок 4 занимает всю ячейку и

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \widetilde{\varepsilon_1} = 0. \tag{11.15}$$

При выполнении одного первого условия (11.15) рассматриваемая блочная среда переходит в слоистую среду, в которой чередуются жидкий слой 2 и упругий слой 4 и которая описывается характеристической функцией (10.20). После учета второго условия (11.15) выражение (10.20) заменяется на соотношение

$$\alpha^2 = \rho_4 \tau^2 \frac{\tau^2 - (\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_4}{(\lambda_4 + 2\mu_4)[\tau^2 - 4\mu_4(\lambda_4 + \mu_4)/(\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4]}, \tag{11.16}$$

равносильное формуле (7.8). График характеристической функции $\tau(\alpha)$, согласно равенству (11.16), показан на рис. 13, при этом

$$v_1^2 = v_4^2 = \frac{\lambda_4 + 2\mu_4}{\rho_4} \quad v_3^2 = v_6^2 = \frac{4\mu_4(\lambda_4 + \mu_4)}{(\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4}. \tag{11.17}$$

Фронты при выполнении условий (11.15) изображены на рис. 14. Переход от случая выполнения одного первого условия (11.15) к случаю, когда удовлетворяются оба условия (11.15) связан с выходом на ось z угловой точки фронта и с обращением в нуль скорости второй (медленной) волны v_2. Для сравнения отметим, что после сокращения жидкого блока в эффективной модели 1 скорость медленной волны остается конечной и определяется только упругими параметрами. Полученная после удовлетворения условий (11.15) эффективная модель является упругой средой, пересеченной двумя системами параллельных плоскостей, на которых выполняются условия контакта с проскальзыванием, и эта среда исследовалалсь в [3] и в §42 [6].

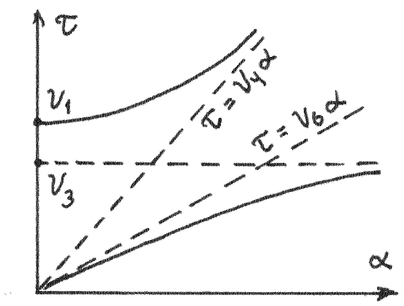

Рис. 13

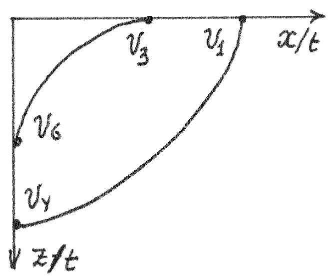

Рис. 14.

3. Рассмотрим случай, когда жидкий блок 2 занимает всю ячейку и

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 = 0. \tag{11.18}$$

Исследование этого случая также полезно начать с анализа характеристической функции (10.20) и в этом выражении совершим предельный переход при $\widetilde{\varepsilon}_2 \to 0$. В результате предельного перехода приходим к соотношению

$$\alpha^2 = \frac{\rho_2 \tau^2}{\lambda_2} - 1, \tag{11.19}$$

равносильному формуле (7.11). Из равенства (11.19) следует, что эффективная модель является однородной изотропной жидкой средой, в которой распространяется волна со скоростью $\sqrt{\lambda_2/\rho_2}$. Фронт этой волны изображен сплошной линией на рис. 7. При выполнении указанного предельного перехода угловая точка на фронте (рис. 12) выходит на ось z, $v_1 \to v_3$ и происходит “сокращение фронтов” со скоростями v_3. Эти фронты показаны на рис. 7 штриховыми линиями. Переход к изотропной жидкой среде также рассматривался в п. 3 §7.

Литература

1. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (2003).
2. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели упругой блочной среды с проскальзыванием на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 96–117.
3. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–122.
4. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. М. (1967).
5. M. Schoenberg, *Wave propagating in alternating fluid and solid layers.* — Wave Motion **6** (1984), 303–320.
6. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* Наука, СПб (2001).
7. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **33, No. 4** (1962), 1482–1498.

Molotkov L. A. About propagation of seismic waves in block elastic-fluid media. II.

The two-dimensional medium consisting of alternating elastic and fluid blocks along the x and z axes is considered. For this block medium, the effective model described by a system of equations is constructed by the method of matrix averaging. The investigation of these equations of this model permits to separate two body waves from the wave field, to draw their fronts, and to write the expressions of their velocities along the axes. The effective model is considered in the cases, when the block medium turns into a layered elastic-fluid medium, when all blocks are of the same size, and when elastic or fluid medium occupies whole volume.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 января 2003 г.