Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

А. Н. Бородин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

1. Введение. В работе рассматриваются некоторые функционалы от броуновского локального времени и предлагаются методы вычисления распределений этих функционалов.

Локальным временем процесса броуновского движения $W(s)$ называется предел

$$\ell(t,y)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathbb{I}_{[y,y+\varepsilon)}(W(s))ds,$$

где $\mathbb{I}_E(\cdot)$ – индикатор борелевского множества E из $\mathbb{R}^1$. Процесс $\ell(t,y)$ при каждом y характеризует долю времени, которую процесс $W(s)$ проводит в точке y до момента t. Понятие броуновского локального времени ввел П. Леви [1]. Существует непрерывное по $(t,y)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^1$ локальное время.

Броуновское локальное время, в силу своего определения, можно рассматривать как интегральный функционал от броуновского движения, соответствующий дельта функции Дирака. Именно это обстоятельство позволяет разработать эффективные методы вычисления распределений различных функционалов от локального времени.

Первый класс функционалов от броуновского локального времени, которые рассматриваются в работе, составляют интегральные функционалы вида $\int_0^t g(\ell(s,r))ds$.

Интересным случайным моментом остановки является момент, обратный к локальному времени. При каждом фиксированном z

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ No. 02-01-00265, гранта НШ-2258.2003.1 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

обозначим через $\rho(t,z)=\min\{s:\ell(s,z)>t\}$, $t\geqslant 0$, процесс, обратный к локальному времени на уровне z.

Важной особенностью этого момента, которая предопределяет его свойства, является то, что процесс $\rho(t,z)$, $t\geqslant 0$, является процессом с независимыми приращениями.

Второй интересующий нас класс составляют следующие функционалы

$$\int_0^{\rho(t,z)} f(W(s))g^2(\ell(s,r))ds.$$

Момент, обратный к локальному времени, относится к хорошо изученному классу моментов остановки – моментам, обратным к возрастающим аддитивным функционалам. Значительно сложнее обстоит дело с моментами, обратными к невозрастающим аддитивным функционалам. Здесь удается рассмотреть только некоторые частные случаи невозрастающих аддитивных функционалов. Так в работе [2] изучены моменты, обратные к линейным комбинациям локальных времен на разных уровнях. В данной работе рассматривается еще один момент подобного типа. Определим

$$\zeta(t)=\min\{v:\int_0^v \mathbb{1}_{[r,\infty)}(W(s))ds-\alpha^{-1}\ell(v,r)>t\},$$

где $\alpha>0$. Будет изучаться вопрос о распределении интегральных функционалов, остановленных в момент времени $\zeta(t)$.

В дальнейшем будем обозначать $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу броуновского движения $W(s)$ при условии, что он начинается в точке x.

Задачу вычисления распределений функционалов для фиксированного t можно с помощью преобразования Лапласа по t свести к аналогичной задаче для момента τ, где τ – случайная величина, которая не зависит от процесса броуновского движения $W(s)$ и имеет экспоненциальное распределение $\mathbf{P}(\tau>t)=e^{-\lambda t}$ с параметром $\lambda>0$. Рассмотрение случайной величины τ обусловлено тем, что для τ решение, как правило, связано с дифференциальными задачами, содержащими обыкновенные дифференциальные уравнения вместо уравнений с частными производными. Вернуться к фиксированному моменту времени t можно посредством обратного преобразования Лапласа по параметру λ.

2. Интегральные функционалы от локального времени. Рассмотрим задачу о распределении функционала $\int_0^t g(\ell(s,r))ds$. Следующий результат позволяет вычислять распределение этого функционала для экспоненциально распределенного момента τ, а значит и для фиксированного t.

В дальнейшем под кусочно-непрерывными функциями подразумеваются функции, которые имеют лишь конечное число точек разрыва, и в точках разрыва существуют левосторонние и правосторонние пределы.

Теорема 2.1. *Пусть $g(x)$, $x \in [0,\infty)$, – кусочно-непрерывная неотрицательная функция, непрерывная справа в нуле. Тогда*

$$\mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^\tau g(\ell(s,r))ds\Big) = \frac{\lambda}{\lambda+g(0)}\Big(1-e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda+2g(0)}}\Big)+$$

$$+e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda+2g(0)}}\int_0^\infty \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda+2g(v)}}\exp\Big(-\int_0^v \sqrt{2\lambda+2g(u)}du\Big)dv. \quad (2.1)$$

Доказательство. Предположим, что $g(x)$ – дифференцируемая функция. От этого ограничения несложно избавиться с помощью предельного перехода, при котором кусочно-непрерывные функции аппроксимируются гладкими.

Доказательство теорема 2.1 основывается на теореме 3 из [3]. Применительно к рассматриваемому функционалу из этой теоремы следует, что функция

$$U(x,y) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^\tau g(y+\ell(s,r))ds\Big)$$

при любом $y \in (0,\infty)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y) - (\lambda+g(y))U(x,y) = -\lambda, \qquad x \neq r, \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}U(r-0,y) - \frac{\partial}{\partial x}U(r+0,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}U(r,y). \qquad (2.3)$$

Непрерывное решение задачи (2.2), (2.3) ищем в виде

$$U(x,y) = \frac{\lambda}{\lambda+g(y)} + \Big(c(y) - \frac{\lambda}{\lambda+g(y)}\Big)\exp\big(-|x-r|\sqrt{2\lambda+2g(y)}\big),$$

где $c(y)$ – некоторая функция, которая в силу (2.3) должна удовлетворять уравнению

$$\Big(c(y) - \frac{\lambda}{\lambda + g(y)}\Big)\sqrt{2\lambda + 2g(y)} = c'(y).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$c(y) = \exp\Big(\int\limits_0^y \sqrt{2\lambda + 2g(v)}dv\Big)\Big(c_0 - \\ - \int\limits_0^y \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda + 2g(v)}} \exp\Big(-\int\limits_0^v \sqrt{2\lambda + 2g(u)}du\Big)dv\Big),$$

где c_0 – некоторая константа. В силу ограниченности функции $c(y)$ при $y \to \infty$ должно выполняться равенство

$$c_0 = \int\limits_0^\infty \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda + 2g(v)}} \exp\Big(-\int\limits_0^v \sqrt{2\lambda + 2g(u)}du\Big)dv,$$

и, следовательно,

$$c(y) = \int\limits_y^\infty \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda + 2g(v)}} \exp\Big(-\int\limits_y^v \sqrt{2\lambda + 2g(u)}du\Big)dv.$$

В результате для функции $U(x,y)$ имеем следующее представление

$$U(x,y) = \frac{\lambda}{\lambda + g(y)}\Big(1 - e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda+2g(y)}}\Big) + \\ + e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda+2g(y)}} \int\limits_y^\infty \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda + 2g(v)}} \exp\Big(-\int\limits_y^v \sqrt{2\lambda + 2g(u)}du\Big)dv. \quad (2.4)$$

Выбирая в равенстве $y = 0$, получаем утверждение теоремы.

Пример 2.1. Рассмотрим вопрос о распределении момента, равного минимуму из τ, и $\rho(q,r)$ – момента, обратного к локальному времени. Пусть $g(x) = \gamma \mathbb{1}_{(-\infty,q]}(x)$, $\gamma \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Тогда из (2.1) следует, что

$$\mathbf{E}_x \exp\big(-\gamma \min\{\tau, \rho(q,r)\}\big) = \frac{\lambda}{\lambda+\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda+\gamma} e^{-(q+|x-r|)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}.$$

Обращая преобразование Лапласа по λ и γ, получаем

$$\mathbf{P}_x\big(\min\{t,\rho(q,r)\}=t\big)=1-\operatorname{Erfc}\Big(\frac{q+|r-x|}{\sqrt{2t}}\Big), \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(\min\{t,\rho(q,r)\}<y\big)=\frac{q+|r-x|}{\sqrt{2\pi}y^{3/2}}e^{-(q+|r-x|)^2/2y}\,\mathbb{I}_{(0,t)}(y). \tag{2.6}$$

3. Интегральные функционалы, остановленные в момент, обратный к локальному времени. Рассмотрим задачу о распределении функционала

$$\int\limits_0^{\rho(t,r)} f(W(s))g^2(\ell(s,r))ds.$$

Теорема 3.1. *Пусть $f(x)$, $g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, – кусочно-непрерывные неотрицательные функции, и $g(x)$ непрерывна справа в нуле. Тогда*

$$\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int\limits_0^{\rho(t,r)} f(W(s))g^2(\ell(s,r))ds\Big)=$$

$$=\exp\Big(-\frac{\Delta}{2}\int\limits_0^t\frac{g(v)}{\varphi(g(v)r)\psi(g(v)r)}dv\Big)\begin{cases}\dfrac{\psi(g(0)x)}{\psi(g(0)r)}, & \text{при } x\leqslant r,\\[2mm] \dfrac{\varphi(g(0)x)}{\varphi(g(0)r)}, & \text{при } r\leqslant x,\end{cases} \tag{3.1}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, соответственно, убывающее и возрастающее фундаментальные решения уравнения

$$\frac{1}{2}\phi''(x)-f(x)\phi(x)=0, \tag{3.2}$$

и $\Delta=\psi'(x)\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)$ – вронскиан.

Замечание 3.1. Для кусочно-непрерывной функции f уравнение (3.2) должно трактоваться следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функции f, а в точках разрыва функции f его решение непрерывно вместе с первой производной.

Доказательство. Предположим, что $g(x)$ – дифференцируемая функция. От этого ограничения несложно избавиться с помощью предельного перехода.

Воспользуемся очевидным соотношением

$$\mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^{\rho(t,r)} f(W(s))g^2(\ell(s,r))ds\Big) = U(x,0),$$

где

$$U(x,y) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^{\infty} f(W(s))g^2(y+\ell(s,r))\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(y+\ell(s,r))ds\Big).$$

Применим теорему 4.2 из [4]. В результате получим, что функция $U(x,y)$ при любом $y\in(0,\infty)$ непрерывна по $x\in\mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y) - f(x)g^2(y)\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(y)U(x,y) = 0, \quad x\neq r, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}U(r-0,y) - \frac{\partial}{\partial x}U(r+0,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}U(r,y). \tag{3.4}$$

Решение задачи (3.3), (3.4) ищем в виде

$$U(x,y) = \begin{cases} c(y)\dfrac{\psi(g(y)x)}{\psi(g(y)r)}, & \text{при } x\leqslant r,\\ c(y)\dfrac{\varphi(g(y)x)}{\varphi(g(y)r)}, & \text{при } r\leqslant x,\end{cases}$$

где $c(y)$ – некоторая функция, которая в силу (3.4) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{g(y)c(y)}{2}\Big(\frac{\varphi'(g(y)r)}{\varphi(g(y)r)} - \frac{\psi'(g(y)r)}{\psi(g(y)r)}\Big) = c'(y).$$

Поскольку вронскиан для данного уравнения является постоянной величиной, то

$$c(y) = c_0\exp\Big(\frac{\Delta}{2}\int_0^y \frac{g(v)}{\varphi(g(v)r)\psi(g(v)r)}dv\Big).$$

Из определения функции $U(x,y)$ следует, что $U(r,t)=1$, поэтому

$$c_0 = \exp\Big(-\frac{\Delta}{2}\int_0^t \frac{g(v)}{\varphi(g(v)r)\psi(g(v)r)}dv\Big).$$

В результате при $y \leqslant t$ имеем

$$U(x,y) = \exp\Big(-\frac{\Delta}{2}\int\limits_y^t \frac{g(v)}{\varphi(g(v)r)\psi(g(v)r)}dv\Big)\begin{cases} \dfrac{\psi(g(y)x)}{\psi(g(y)r)}, & \text{при } x \leqslant r, \\ \dfrac{\varphi(g(y)x)}{\varphi(g(y)r)}, & \text{при } r \leqslant x. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Пример 3.1. Рассмотрим вопрос о распределении величины площади под графиком локального времени до момента выхода локального времени на уровень t. Пусть $g(v) = \sqrt{v}$. Тогда из (3.2) следует, что

$$\mathbf{E}_x \exp\Big(-\gamma\int\limits_0^{\rho(t,r)} \ell(s,r)ds\Big) = \exp\big(-2t^{3/2}\sqrt{2\gamma}/3\big).$$

Обращая преобразование Лапласа по γ, получаем

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}_x\Big(\int\limits_0^{\rho(t,r)} \ell(s,r)ds < v\Big) = \frac{2t^{3/2}}{3\sqrt{2\pi}v^{3/2}}e^{-2t^3/9v}. \tag{3.5}$$

4. Момент, обратный к аддитивному невозрастающему функционалу специального вида. В данном параграфе речь пойдет о моменте

$$\zeta(t) = \min\{v : \int\limits_0^v 1\!\!\mathrm{I}_{[r,\infty)}(W(s))ds - \alpha^{-1}\ell(v,r) > t\}.$$

Очевидно, что $\zeta(t) \geqslant t$. Как уже отмечалось, задачу вычисления распределений функционалов для момента $\zeta(t)$ для фиксированного t можно с помощью преобразования Лапласа по t свести к аналогичной задаче для момента $\zeta(\tau)$, где τ – случайная величина, которая не зависит от процесса $W(s)$ и имеет экспоненциальное распределение $\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ с параметром $\lambda > 0$.

Теорема 4.1. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – кусочно-непрерывная неотрицательная функция, $\lambda \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $z \neq r$. Тогда функция*

$$M(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_0^{\zeta(\tau)} f(W(s))ds - \beta\ell(\zeta(\tau),z)\Big) \tag{4.1}$$

является непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}M''(x) - (f(x) + \lambda \mathbb{I}_{[r,\infty)}(x))M(x) = -\lambda \mathbb{I}_{[r,\infty)}(x), \quad x \neq r, z, \tag{4.2}$$

$$M'(z+0) - M'(z-0) = 2\beta M(z), \tag{4.3}$$

$$M'(r+0) - M'(r-0) = -2\lambda\alpha^{-1}M(r) + 2\lambda\alpha^{-1}M_0(r), \tag{4.4}$$

где

$$M_0(r) = \mathbf{E}_r \exp\Big(-\int\limits_0^{\zeta(0)} f(W(s))ds - \beta\ell(\zeta(0), z)\Big). \tag{4.5}$$

Замечание 4.1. Если $z = r$, то условия (4.3), (4.4) нужно объединить в одно следующее условие

$$M'(r+0) - M'(r-0) = (2\beta - 2\lambda\alpha^{-1})M(r) + 2\lambda\alpha^{-1}M_0(r).$$

Замечание 4.2. В задачу (4.2)–(4.5) входит неизвестная постоянная $M_0(r)$, которая делает эту задачу необычной. Вычисление этой постоянной может быть основано на том факте, что решение должно быть преобразованием Лапласа по t убывающей функции времени.

Для вычисления константы $M_0(r)$ в рамках сделанного замечания, нужно уметь вычислять обратное преобразование Лапласа по λ от функции $M(x)$. Сделать это удается только для некоторых конкретных функций $f(x)$, для которых задача (4.2)–(4.4) решается в явном виде.

Рассмотрим три примера решения задачи (4.2)–(4.5).

В первом примере предположим, что $f(x) = \gamma$, а $\beta = 0$. Таким образом, $M(x) = \mathbf{E}_x e^{-\gamma\zeta(\tau)}$, и нас интересует распределение самого момента $\zeta(t)$.

Непрерывное ограниченное решение задачи (4.2), (4.4) можно представить в виде

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda+\gamma} - \Big(\dfrac{\lambda}{\lambda+\gamma} - A\Big)e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}, & r \leqslant x, \\ Ae^{-(r-x)\sqrt{2\gamma}}, & x \leqslant r, \end{cases}$$

где A – неизвестная постоянная. Теперь, обозначив для краткости $p = M_0(r)$, из условия (4.4), получим

$$A = \frac{\lambda(p\sqrt{\lambda+\gamma} - \alpha/\sqrt{2})}{\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma} - \sqrt{\gamma} - \alpha/\sqrt{2})(\sqrt{\lambda+\gamma}+\sqrt{\gamma})}.$$

Для того, чтобы найти распределение величины $\zeta(t)$ вычислим обратное преобразование Лапласа по λ от функции $\frac{1}{\lambda}M(x)$. Воспользуемся хорошо известной формулой (см., например, [5], приложение 3)

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}+\eta)}e^{-\mu\sqrt{\lambda}}\Big) = e^{\mu\eta+\eta^2 t}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{\mu}{2\sqrt{t}}+\eta\sqrt{t}\Big), \qquad \mu \geqslant 0. \quad (4.6)$$

где символ $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ обозначает оператор обратного преобразования Лапласа по λ, а $\operatorname{Erfc}(x) = 1-\operatorname{Erf}(x) = 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-v^2}dv$, $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, при $x = r$

$$\mathbf{E}_r e^{-\gamma\zeta(t)} = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{(p\sqrt{\lambda+\gamma}-\alpha/\sqrt{2})}{\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}-\sqrt{\gamma}-\alpha/\sqrt{2})(\sqrt{\lambda+\gamma}+\sqrt{\gamma})}\Big) =$$

$$= e^{-\gamma t}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{(p\sqrt{\lambda}-\alpha/\sqrt{2})}{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\gamma}-\alpha/\sqrt{2})(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\gamma})}\Big). \quad (4.7)$$

Левая часть этого соотношения является убывающей функцией по t. В связи с этим анализ структуры правой части приводит к следующему заключению. Правая часть (4.6) при отрицательных η возрастает по t. В частности, величина

$$e^{-\gamma t}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\gamma}-\alpha/\sqrt{2})}\Big) = e^{(\alpha\sqrt{2\gamma}+\alpha^2/2)t}\operatorname{Erfc}\big(-\sqrt{\gamma t}-\alpha\sqrt{t/2}\big)$$

при $t \to +\infty$ стремится к бесконечности. Из формулы (4.7) и условия ограниченности несложно заключить, что $\frac{\alpha}{p\sqrt{2}} = \sqrt{\gamma}+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, т. е. что

$$\mathbf{E}_r e^{-\gamma\zeta(0)} = p = \frac{\alpha}{\alpha+\sqrt{2\gamma}}.$$

Обращая преобразование Лапласа по γ, получаем

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}_r(\zeta(0) < v) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi v}} - \frac{\alpha^2}{2}e^{\alpha^2 v/2}\operatorname{Erfc}(\alpha\sqrt{v/2}).$$

Кроме того из формулы для p следует, что $\mathbf{P}_r(\zeta(0) = 0) = 0$. Это означает, что начинаясь в точке r процесс

$$\eta(v) = \int_0^v \mathbb{I}_{[r,\infty)}(W(s))ds - \alpha^{-1}\ell(v,r)$$

с вероятностью единица сначала идет обязательно вниз.

Поскольку вычислена постоянная $p = M_0(r)$, то для функции $M(x)$ имеем следующее выражение

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x e^{-\gamma\zeta(\tau)} = \tag{4.8}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda+\gamma}\big(1 - e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}\big) + \dfrac{\alpha e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}}{(\alpha+\sqrt{2\gamma})\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}+\sqrt{\gamma})}, & r \leqslant x, \\ \dfrac{\alpha e^{-(r-x)\sqrt{2\gamma}}}{(\alpha+\sqrt{2\gamma})\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}+\sqrt{\gamma})}, & x \leqslant r. \end{cases}$$

Обращая преобразование Лапласа по λ, получаем

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma\zeta(t)} = \begin{cases} e^{-\gamma t}\,\mathrm{Erf}\,\big(\frac{x-r}{\sqrt{2t}}\big) + \dfrac{\alpha e^{(x-r)\sqrt{2\gamma}}}{\alpha+\sqrt{2\gamma}}\,\mathrm{Erfc}\big(\frac{x-r}{\sqrt{2t}} + \sqrt{\gamma t}\big), & r \leqslant x, \\ \dfrac{\alpha e^{-(r-x)\sqrt{2\gamma}}}{\alpha+\sqrt{2\gamma}}\,\mathrm{Erfc}\big(\sqrt{\gamma t}\big), & x \leqslant r. \end{cases}$$

Обращая теперь преобразование Лапласа по γ, получаем

$$\mathbf{P}_x(\zeta(t) = t) = \mathrm{Erf}\,\big(\frac{x-r}{\sqrt{2t}}\big), \tag{4.9}$$

при $r \leqslant x$ и $t < v$

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}_x(\zeta(t) < v) = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-(x-r+y)^2/2t}}{\sqrt{\pi t}}\Big(\frac{e^{-y^2/2(v-t)}}{\sqrt{\pi(v-t)}} -$$

$$- \frac{\alpha e^{\alpha y + \alpha^2(v-t)/2}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Erfc}\,\big(\frac{y}{\sqrt{2(v-t)}} + \frac{\alpha\sqrt{v-t}}{\sqrt{2}}\big)\Big)dy, \tag{4.10}$$

при $x \leqslant r$ и $t < v$

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}_x(\zeta(t) < v) = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-y^2/2t}}{\sqrt{\pi t}}\Big(\frac{e^{-(r-x+y)^2/2(v-t)}}{\sqrt{\pi(v-t)}} -$$

$$- \frac{\alpha e^{\alpha(r-x+y) + \alpha^2(v-t)/2}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Erfc}\,\big(\frac{r-x+y}{\sqrt{2(v-t)}} + \frac{\alpha\sqrt{v-t}}{\sqrt{2}}\big)\Big)dy. \tag{4.11}$$

Рассмотрим второй пример. Предположим, что $f(x) = 0$. Следовательно речь пойдет о распределении локального времени $\ell(\zeta(\tau), z)$, остановленного в момент времени ζ. Рассмотрим функцию

$$M(x) = \mathbf{E}_x e^{-\beta\ell(\zeta(\tau),z)}. \tag{4.12}$$

При $z > r$ не удается вычислить постоянную $M_0(r)$ с помощью подхода, который предлагается ниже для случая $z < r$, поэтому этот случай мы опускаем. Пусть $z \leqslant r$. Тогда непрерывное ограниченное решение задачи (4.2)–(4.5) ищем в виде

$$M(x) = \begin{cases} 1 - (1-D)e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & r \leqslant x, \\ C\dfrac{r-x}{r-z} + D, & z \leqslant x \leqslant r, \\ C + D, & x \leqslant z, \end{cases}$$

где C и D – неизвестные постоянные. Используя условие (4.3), получим $C = -\frac{2\beta(r-z)D}{1+2\beta(r-z)}$. Обозначим для краткости $p = M_0(r)$. Теперь, принимая во внимание условие (4.4), найдем, что

$$D = \frac{\lambda p - \alpha\sqrt{\lambda/2}}{\lambda - \alpha\sqrt{\lambda/2} - \dfrac{\alpha\beta}{1+2\beta(r-z)}} = \frac{\lambda p - \alpha\sqrt{\lambda/2}}{(\sqrt{\lambda} - q_+)(\sqrt{\lambda} - q_-)},$$

где

$$q_\pm = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha\beta}{1+2\beta(r-z)}}.$$

Очевидно, что $q_- < 0 < q_+$. В результате при $x \leqslant z$ имеем

$$M(x) = \frac{\lambda p - \alpha\sqrt{\lambda/2}}{(1+2\beta(r-z))(\sqrt{\lambda} - q_+)(\sqrt{\lambda} - q_-)}. \qquad (4.13)$$

Для того, чтобы найти распределение величины $\ell(\zeta(t), z)$ вычислим обратное преобразование Лапласа по λ от функции $\frac{1}{\lambda}M(x)$. Используя доводы аналогичные приведенным в первом примере, получим, что $\alpha/p\sqrt{2} = q_+$, т. е., что

$$\mathbf{E}_r \exp\Big(-\beta\ell(\zeta(0), z)\Big) = p = \frac{\alpha}{q_+\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{\alpha(1+2\beta(r-z))}}\right)^{-1}.$$

Тем самым вычислена постоянная $p = M_0(r)$. В результате для функции $M(x)$ при $z \leqslant r$ имеем следующее выражение

$$\frac{1}{\lambda}M(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} - \left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{\alpha}{q_+\sqrt{2\lambda}(\sqrt{\lambda} - q_-)}\right)e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & r \leqslant x, \\ \dfrac{\alpha(1+2\beta(x-z))}{(1+2\beta(r-z))q_+\sqrt{2\lambda}(\sqrt{\lambda} - q_-)}, & z \leqslant x \leqslant r, \\ \dfrac{\alpha}{(1+2\beta(r-z))q_+\sqrt{2\lambda}(\sqrt{\lambda} - q_-)}, & x \leqslant z. \end{cases}$$

Наконец, обращая преобразование Лапласа по λ, получаем

$$\mathbf{E}_x e^{-\beta\ell(\zeta(t),z)} = \tag{4.14}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Erf}\big(\frac{x-r}{\sqrt{2t}}\big) + \frac{\alpha}{q_+\sqrt{2}} e^{-q_-(r-x)+q_-^2 t} \operatorname{Erfc}\big(\frac{x-r}{\sqrt{2t}} - q_-\sqrt{t}\big), & r \leqslant x, \\ \frac{\alpha(1+2\beta(x-z))}{(1+2\beta(r-z))q_+\sqrt{2}} e^{q_-^2 t} \operatorname{Erfc}\big(-q_-\sqrt{t}\big), & z \leqslant x \leqslant r, \\ \frac{\alpha}{(1+2\beta(r-z))q_+\sqrt{2}} e^{q_-^2 t} \operatorname{Erfc}\big(-q_-\sqrt{t}\big), & x \leqslant z. \end{cases}$$

В третьем примере полагаем $z = r$, т. е., что локальные времена в определении момента времени и в функционале берутся на одном уровне (см. замечание 4.1), а также полагаем, что $f(x) = \gamma \mathbb{I}_{[u,\infty)}(x)$. Таким образом, рассматривается линейная комбинация времени пребывания броуновского движения выше уровня u до случайного момента ζ и локального времени на уровне r. Рассмотрим функцию

$$M(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big(-\gamma \int_0^{\zeta(\tau)} \mathbb{I}_{[u,\infty)}(W(s))ds - \beta\ell(\zeta(\tau),r)\Big), \tag{4.15}$$

которая согласно теореме 4.1 удовлетворяет задаче

$$\frac{1}{2}M''(x) - (\gamma\mathbb{I}_{[u,\infty)}(x) + \lambda\mathbb{I}_{[r,\infty)}(x))M(x) = -\lambda\mathbb{I}_{[r,\infty)}(x), \ x \neq r, \tag{4.16}$$

$$M'(r+0) - M'(r-0) = (2\beta - 2\lambda\alpha^{-1})M(r) + 2\lambda\alpha^{-1}M_0(r). \tag{4.17}$$

Как и в предыдущем примере удается исследовать лишь случай $u \leqslant r$. В этом случае непрерывное ограниченное решение задачи (4.16), (4.17) ищем в виде

$$M(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda+\gamma} - \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma} - A\Big) e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}, & r \leqslant x, \\ \frac{A \operatorname{ch}((x-u)\sqrt{2\gamma})}{\operatorname{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})}, & u \leqslant x \leqslant r, \\ \frac{A}{\operatorname{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})}, & x \leqslant u, \end{cases}$$

где A – неизвестная постоянная. В этом представлении мы учли непрерывность функции $M(x)$ и ее производной в точке u, а также непрерывность в точке r. Теперь, обозначив для краткости $p = M_0(r)$, из условия (4.17) получим

$$A = \frac{\lambda p - \alpha\lambda/\sqrt{2\lambda+2\gamma}}{\lambda - \alpha\beta - \alpha\sqrt{(\lambda+\gamma)/2} - \alpha\sqrt{\gamma/2}\operatorname{th}((r-u)\sqrt{2\gamma})} =$$

$$= \frac{\lambda(p\sqrt{\lambda+\gamma}-\alpha/\sqrt{2})}{\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}-q_+)(\sqrt{\lambda+\gamma}-q_-)},$$

где

$$q_\pm = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{8}+\gamma+\alpha\beta+\alpha\sqrt{\gamma/2}\,\mathrm{th}((r-u)\sqrt{2\gamma})}.$$

Выражение под корнем равно

$$\Big(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}-\sqrt{\gamma}\Big)^2+\alpha\beta+\frac{\alpha\sqrt{\gamma}e^{(r-u)\sqrt{2\gamma}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})},$$

поэтому $q_- < \sqrt{\gamma} < q_+$. Теперь, используя доводы аналогичные приведенным в первом примере, получим, что

$$p = \frac{\alpha}{q_+\sqrt{2}} = \Big(\frac{1}{2}+\Big(\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2\gamma}}{\alpha}\Big)^2+\frac{2\beta}{\alpha^2}+\frac{\sqrt{2\gamma}e^{(r-u)\sqrt{2\gamma}}}{\alpha\,\mathrm{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})}\Big)^{1/2}\Big)^{-1}.$$

Тем самым вычислена постоянная $p = M_0(r)$, и в результате для функции $M(x)$ при $u \leqslant r$ имеем следующее выражение

$$\frac{1}{\lambda}M(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda+\gamma}-\Big(\dfrac{1}{\lambda+\gamma}- \\ -\dfrac{\alpha}{q_+\sqrt{2\lambda+2\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}-q_-)}\Big)e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}, & r \leqslant x, \\ \dfrac{\alpha\,\mathrm{ch}((x-u)\sqrt{2\gamma})}{\mathrm{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})q_+\sqrt{2\lambda+2\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}-q_-)}, & u \leqslant x \leqslant r, \\ \dfrac{\alpha}{\mathrm{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})q_+\sqrt{2\lambda+2\gamma}(\sqrt{\lambda+\gamma}-q_-)}, & x \leqslant u. \end{cases}$$

Наконец, обращая преобразование Лапласа по λ, получаем

$$e^{\gamma t}\mathbf{E}_x \exp\Big(-\gamma\int_0^{\zeta(t)} \mathrm{I\!I}_{[u,\infty)}(W(s))ds-\beta\ell(\zeta(t),r)\Big) = \qquad (4.18)$$

$$= \begin{cases} \mathrm{Erf}\,\Big(\dfrac{x-r}{\sqrt{2t}}\Big)+\dfrac{\alpha}{q_+\sqrt{2}}e^{-q_-(r-x)+q_-^2t}\,\mathrm{Erfc}\Big(\dfrac{x-r}{\sqrt{2t}}-q_-\sqrt{t}\Big), & r \leqslant x, \\ \dfrac{\alpha\,\mathrm{ch}((x-u)\sqrt{2\gamma})}{\mathrm{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})q_+\sqrt{2}}e^{q_-^2t}\,\mathrm{Erfc}\big(-q_-\sqrt{t}\big), & u \leqslant x \leqslant r, \\ \dfrac{\alpha}{\mathrm{ch}((r-u)\sqrt{2\gamma})q_+\sqrt{2}}e^{q_-^2t}\,\mathrm{Erfc}\big(-q_-\sqrt{t}\big), & x \leqslant u. \end{cases}$$

Отметим один вырожденный случай этого равенства. Пусть $u = r$ и $\beta = -\gamma\alpha^{-1}$, тогда левая часть равенства равна единице, поскольку в этом случае момент ζ является обратным к рассматриваемому функционалу, т. е. значение величины под знаком экспоненты равно $-\gamma t$. В правой же части имеем $q_+ = \alpha/\sqrt{2}$, $q_- = 0$, что тоже приводит к единице.

Отметим также, что формула (4.8) является частным случаем вышеприведенной формулы при $u \to -\infty$ и $\beta = 0$. Действительно, при этих условиях $q_+ = \sqrt{\gamma} + \alpha/\sqrt{2}$ и $q_- = -\sqrt{\gamma}$.

Литература

1. P. Lévy, *Sur certains processus stochastiques homogènes.* — Compositio Math. **7** (1939), 283–339.
2. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к линейной комбинации локальных времен.* — Записки научных семинаров ПОМИ, **294** (2002), 43–54.
3. А. Н. Бородин, *О распределении супремума приращений броуновского локального времени.* — Записки научных семинаров ПОМИ, **142** (1985), 6–24.
4. А. Н. Бородин, *Распределение интегральных функционалов от процесса броуновского движения.* — Записки научных семинаров ПОМИ, **119** (1982), 19–38.
5. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae, Second Edition.* Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 2002.

Borodin A. N. On distributions of some functionals of Brownian local time.

Some functionals of Brownian local time are considered. For these functionals we propose the methods of the calculation of the distributions of the functionals.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 ноября 2002 г.