Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

Л. В. Гадасина

ГРАНИЦА БЕРРИ—ЭССЕЕНА ДЛЯ U–СТАТИСТИК

1. Введение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные величины со значениями в измеримом пространстве $(\mathbf{X},\ \mathbf{B})$. Предположим, что $n \geq m \geq 2$ и рассмотрим U-статистику

$$U_n = U_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Phi_{i_1 \dots i_m}(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}),$$

где $\Phi_{i_1 \dots i_m} : \mathbf{X}^m \to \mathbf{R}$ – симметрические функции такие, что $E|\Phi_{i_1 \dots i_m}(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})| < \infty$ для всех $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$.

Обозначим $I_k^c = i_{k+1}, \dots, i_c$, $I_c = I_0^c$, $\check{I}_k^c = 1 \leq i_{k+1} < \dots < i_c \leq n$, $\check{I}_c = \check{I}_0^c$, $X_{I_c} = X_{i_1}, \dots, X_{i_c}$, аналогично $J_k^c = j_{k+1}, \dots, j_c$, $\check{J}_k^c = 1 \leq j_{k+1} < \dots < j_c \leq n$ и т. д.

Определим канонические функции

$$g_{I_c} = g_{I_c}(X_{I_c}) = \int\limits_X \cdots \int\limits_X U_n \prod_{s=1}^{c} (\delta_{X_{i_s}}(dy_{i_s}) - P_{i_s}(dy_{i_s})) \prod_{s \in I_m \setminus I_c} P_s(dy_s) =$$

$$= \sum_{d=1}^{c} \sum_{\check{J}_d, J_d \in I_c} (-1)^{c-d} (E[U_n | X_{J_d}] - EU_n),$$

где $1 \leq i_1 < \dots < i_c \leq n$, $c = 1, \dots, m$. Тогда в соответствии с представлением Гефдинга

$$U_n = \sum_{c=1}^{m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_c \leq n} g_{I_c} + EU_n = \sum_{c=1}^{m} U_n(g_{I_c}) + EU_n.$$

Положим $\sigma_n^2 = \sum_{j=1}^{n} Eg_j^2 > 0$, т.е. будем рассматривать только невырожденные U-статистики.

Работа поддержана грантом НШ 2258-2003-1.

Обозначим,

$$\Delta_n(x) = |P(\sigma_n^{-1}(U_n - EU_n) < x) - \Phi(x)|,$$

$$\Delta_n = \sup_x \Delta_n(x),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Центральная предельная теорема для невырожденных U-статистик в случае неодинаково распределенных случайных величин была доказана в 1948 г. в [10], далее условия выполнения этой теоремы ослаблялись (см., например, [12]).

Наша задача установить скорость сходимости при минимальных допустимых моментных условиях на канонические функции $g_{i_1,\dots,i_c}$, $c = 1,\dots,m$. Большинство имеющихся результатов касаются случая $m = 2$. Граница, зависящая от $\max_{i<j} E|\Phi(X_i, X_j)|^3$, была получена в 1982, [9]. В 1989 [8] была получена граница, зависящая от $\max_j E|g_j|^3$; $\max_{i<j} E|g_{ij}|^{5/3}$. В 1998, [1], была доказана следующая теорема:

$$\Delta_n \le 17(\sum_{j=1}^n E|g_j|^3 + \sqrt{\sum_{i<j} Eg_{ij}^2}\ ).$$

В [3] построен пример ядра Φ, такой что $E|g_1|^3 < \infty$ и $E|\Phi|^{5/3-\varepsilon} < \infty$ при $\varepsilon > 0$, и случайные величины $X_j = X_j^{(n)}$, $j = 1,\dots,n$, такие что выполнено $\Delta_n \ge c(\varepsilon) n^{-1/2+3\varepsilon/2}$ с константой $c(\varepsilon) > 0$.

2. Результаты

Рассмотрим усеченные случайные величины

$$g_{I_c}^n = g_{I_c} I(|g_{I_c}| \le \sigma_n), \quad 1 \le i_1 < \dots < i_c \le n,$$

где $I(A)$ – индикаторная функция множества $A \in \mathbf{B}$.

Теорема 1. *Если $\sigma_n^2 > 0$, тогда при всех $1 \le p < 2$ и $n \ge m$*

$$\Delta_n \le A_m(\,\sigma_n^{-2} \sum_{j=1}^n Eg_j^2 I(|g_j| > \sigma_n) + \sigma_n^{-3} \sum_{j=1}^n E|g_j|^3 I(|g_j| \le \sigma_n) +$$

$$+\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_c\le n} E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n)$$

$$+\sum_{c=2}^{m}\sigma_n^{-c-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_c\le n} E|g_{i_1}^n\cdot\ldots\cdot g_{i_c}^n g_{I_c}^n|+$$

$$+\frac{1}{(2-p)^3}\sigma_n^{-p}\sum_{c=2}^{m}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_c\le n} E|g_{I_c}|^p I(|g_{I_c}|\le\sigma_n)),$$

где A_m *зависит только от* m.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1*

$$\Delta_n\le A_m(\,\sigma_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}Eg_j^2I(|g_j|>\sigma_n)+\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{n}E|g_j|^3I(|g_j|\le\sigma_n)+$$

$$+\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_c\le n} E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n)+\sigma_n^{-3}\sum_{c=2}^{m}$$

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_c\le n} E|g_{i_1}^n|^{2/c}\cdot\ldots\cdot|g_{i_c}^n|^{2/c}|g_{I_c}^n|+$$

$$+\frac{1}{(2-p)^3}\sigma_n^{-p}\sum_{c=2}^{m}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_c\le n} E|g_{I_c}|^p I(|g_{I_c}|\le\sigma_n)).$$

Следствие. *Пусть* $\delta_c=\frac{2c+1}{2c-1}$, $c=1,\ldots,m$. *Тогда*

$$\Delta_n\le A_m\sum_{c=1}^{m}\sigma_n^{-\delta_c}\sum_{\check{I}_c}E|g_{I_c}|^{\delta_c},$$

где A_m *зависит только от* m.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Введем следующие обозначения

$$g_{I_cn}(X_{I_c})=\int\limits_X\cdots\int\limits_X U_n(g_{I_c}^n)\prod_{s=1}^{c}(\delta_{X_{i_s}}(dy_{i_s})-P_{i_s}(dy_{i_s})),$$

$$g_{I_cJ_dn}(X_{J_d}) = \int\limits_X \cdots \int\limits_X U_n(g^n_{I_c}) \prod_{s=1}^{d} (\delta_{X_{j_s}}(dy_{j_s}) - P_{j_s}(dy_{j_s}))$$

$$\prod_{s\in I_c\setminus J_d} P_s(dy_s) = -\int\limits_X \cdots \int\limits_X U_n(g_{I_c} I(|g_{I_c}| > \sigma_n))$$

$$\prod_{s=1}^{d} (\delta_{X_{j_s}}(dy_{j_s}) - P_{j_s}(dy_{j_s})) \prod_{s\in I_c\setminus J_d} P_s(dy_s)$$

$c > d$. Тогда по представлению Гефдинга

$$U_n(g^n_{I_c}) = \sum_{d=1}^{c} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_d\le n} g_{I_cJ_dn}(X_{J_d}) + EU_n(g^n_{I_c}).$$

Применив аналог леммы о срезках из [4] для случая неодинаково распределенных случайных величин, получаем

$$\Delta_n(x) \le |P(\sigma_n^{-1}(\theta_1 + \sum_{c=1}^{m} \sum_{d=1}^{c} \sum_{\check{J}_d} g_{I_cJ_dn}(X_{J_d})) < x) - \Phi(x)| +$$

$$+ \sum_{c=1}^{m} \sum_{1\le i_1<\ldots i_c\le n} P(|g_{I_c}| > \sigma_n),$$

где

$$\theta_1 = -\sum_{c=1}^{m} \sum_{\check{I}_c} E|g_{I_c}| I(|g_{I_c}| > \sigma_n).$$

Теперь запишем

$$\sum_{c=1}^{m} \sum_{d=1}^{c} \sum_{\check{J}_d} g_{I_cJ_dn}(X_{J_d}) = \sum_{c=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{I_cjn}(X_j)$$

$$+ \sum_{c=2}^{m} \sum_{\check{I}_c} g_{I_cn}(X_{I_c}) + \sum_{d=2}^{m-1} \sum_{c=d+1}^{m} \sum_{\check{J}_d} g_{I_cJ_dn}(X_{J_d}).$$

и далее

$$\sum_{c=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{I_cjn}(X_j) = \sum_{j=1}^{n} g_{jn}(X_j) + \sum_{c=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{I_cjn}(X_j).$$

Определим

$$h_{cj}=g_{I_cjn},\qquad h_{cj}^n=h_{cj}I(|h_{cj}|\le\sigma_n),$$

$$h_{cjn}=h_{cj}^n-Eh_{cj}^n,\quad c=2,\dots,m,\quad j=1,\dots,n,$$

$$\bar\sigma_n^2=\sum_{j=1}^n E(g_{jn}+\sum_{c=2}^m h_{cjn})^2,$$

$$z_j=z_j(X_j)=\bar\sigma_n^{-1}(g_{jn}+\sum_{c=2}^m h_{cjn}),\quad s_n=\sum_{j=1}^n z_j,$$

$$\hat z_j=z_j+E(g_j^n+\sum_{c=2}^m h_{cj}^n).$$

Снова применим лемму о срезках для h_{cj}

$$\Delta_n(x)\le|P(\sigma_n^{-1}(\theta_1+\sum_{j=1}^n(g_{jn}+\sum_{c=2}^m h_{cjn})+\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^m\sum_{\check J_d} g_{I_cJ_dn}(X_{J_d})+$$

$$+\sum_{c=2}^m\sum_{\check I_c} g_{I_cn}(X_{I_c})+\sum_{j=1}^n\sum_{c=2}^m Eh_{cj}^n)<x)-\Phi(x)|+$$

$$+\sum_{c=1}^m\sum_{\check I_c}P(|g_{I_c}|>\sigma_n)+\sum_{c=2}^m\sum_{j=1}^n P(|g_{I_cjn}|>\sigma_n)=$$

$$=|P(\bar\sigma_n\sigma_n^{-1}(s_n+v_n+w_n)+a_n<x)-\Phi(x)|+d_n,$$

где

$$a_n=\bar\sigma_n^{-1}\theta_1+\bar\sigma_n^{-1}\sum_{j=1}^n\sum_{c=2}^m Eh_{cj}^n,$$

$$d_n=\sum_{c=1}^m\sum_{\check I_c}P(|g_{I_c}|>\sigma_n)+\sum_{c=2}^m\sum_{j=1}^n P(|g_{I_cjn}|>\sigma_n),$$

$$v_n=\bar\sigma_n^{-1}\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^m\sum_{\check J_d} g_{I_cJ_dn}(X_{J_d}),$$

$$w_n = \bar\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c} g_{I_c n}(X_{I_c}).$$

Тогда

$$\Delta_n \le \sup_x |P(s_n+v_n+w_n<x)-\Phi(x)|+$$

$$+\sup_x|\Phi(x+a_n)-\Phi(x)|+\sup_x|\Phi(\frac{\bar\sigma_n}{\sigma_n}x)-\Phi(x)|+d_n.$$

При этом по свойствам функции Φ

$$\sup_x|\Phi(x+a_n)-\Phi(x)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|a_n|, \tag{1}$$

$$\sup_x|\Phi(\frac{\bar\sigma_n}{\sigma_n}x)-\Phi(x)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}|\frac{\bar\sigma_n^2}{\sigma_n^2}-1|\frac{\sigma_n}{\bar\sigma_n}. \tag{2}$$

Оценивая a_n и d_n, получаем

$$|a_n|\le\bar\sigma_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}E|g_j|I(|g_j|>\sigma_n)+(2m+1)\bar\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n), \tag{3}$$

и

$$d_n\le\sigma_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}E|g_j|I(|g_j|>\sigma_n)+(2m+1)\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n). \tag{4}$$

Обозначим $h=(\sum_{j=1}^n E|z_j|^3)^{-1}$. Не уменьшая общности можно ситать, что $h>2^{m+3}$. Тогда по неравенству Эссеена

$$\sup_x|P(s_n+v_n+w_n<x)-\Phi(x)|\le\frac{2}{\pi}\int\limits_0^h|Ee^{it(s_n+v_n+w_n)}-e^{-t^2/2}|t^{-1}dt$$

$$+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}h^{-1}\le\le\frac{2}{\pi}\int\limits_0^h|Ee^{its_n}-e^{-t^2/2}|t^{-1}dt$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2^{m+3}}|Ee^{it(s_n+v_n+w_n)}-Ee^{its_n}|t^{-1}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{2^{m+3}}^{h}|Ee^{it(s_n+v_n+w_n)}-Ee^{its_n}|t^{-1}dt+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}h^{-1}=$$

$$=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}h^{-1}.$$

Для оценки ε_1 воспользуемся теоремой 2 главы XVI.5 [6], с $T=h^{-1}$ вместо $T=8h^{-1}/9$

$$\varepsilon_1\le\pi^{-1}\bar\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{n}E|g_{jn}+\sum_{c=2}^{m}h_{cjn}|^3\le\le 16\pi^{-1}\bar\sigma_n^{-3}\sum_{j=1}^{n}E|g_j^n|^3$$

$$+32\pi^{-1}(m-1)^2m\bar\sigma_n^{-3}\sigma_n^2\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n).$$

Слагаемое с h^{-1} оценивается аналогичным образом.

Утверждение 1. *Пусть $\gamma_1^{(k)},\dots,\gamma_n^{(k)}$, $k=1,\dots,c$ – серия последовательностей, состоящих из независимых одинаково распределенных величин, таких что $\gamma_{i_1}^{(1)},\dots,\gamma_{i_c}^{(c)}$ – независимы при $i_1\ne\dots\ne i_c$ и, кроме того, не зависят от $X_1,\dots,X_n$. Тогда*

$$E|\sum_{\check I_c}\gamma_{i_1}^{(1)}\dots\gamma_{i_c}^{(c)}g_{I_cn}|^p\le 2^{(2-p)c}\prod_{s=1}^{c}E|\gamma_1^{(s)}|^p\sum_{\check I_c}E|g_{I_cn}|^p,\ 1\le p\le 2.$$

В процессе доказательства нам понадобятся следующие неравенства:

Утверждение 2. *Для всех $x\in\mathbf{R}$*

1. $e^{ix}-1|\le|x|$.
2. $|e^{ix}-1|\le|x|^{p-1},\quad 1\le p\le 2.$
3. $|e^{ix}-1-ix|\le 2|x|^p,\quad 1\le p\le 2.$
4. $a\cdot b\le p^{-1}a^p+q^{-1}b^q,\quad a>0,\ b>0,\ p^{-1}+q^{-1}=1.$

Оценка ε_2. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для всех $0\le t\le h$ и $1\le i_1<\dots<i_c\le n$ при $c=1,\dots,m$*

$$\prod_{k=1,k\ne I_c}^{n}|E\exp(itz_k)|\le\exp(-t^2(1/3-c2^{-(2m+9)/3)})).$$

Доказательство. Разлагая $\exp(itz_k)$ в ряд Тейлора, получаем

$$|E\exp(itz_k)| \le 1 - \frac{1}{2}Ez_k^2t^2 + \frac{1}{6}|t|^3E|z_k|^3 \le 1$$

$$-\frac{1}{2}t^2(Ez_k^2 - \frac{1}{3}hE|z_k|^3) \le \exp\left(-\frac{1}{2}t^2(Ez_k^2 - \frac{1}{3}hE|z_k|^3)\right),$$

где последнее неравенство получено ввиду того, что $1 - x \le e^{-x}$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\prod_{k=1,\, k\neq I_c}^{n} |E\exp(itz_k)| \le \exp\left(-\frac{1}{2}t^2(\sum_{k\neq I_c} Ez_k^2 - \frac{1}{3}h\sum_{k\neq I_c} E|z_k|^3)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}t^2(\frac{2}{3} - Ez_{i_1}^2 - \cdots - Ez_{i_c}^2 + \frac{1}{3}hE|z_{i_1}|^3 + \cdots + \frac{1}{3}hE|z_{i_c}|^3)\right).$$

Кроме того, $E|z_i|^3 \ge 0$, $Ez_i^2 \le (E|z_i|^3)^{2/3} \le h^{-2/3} \le 2^{-2(m+3)/3}$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим подинтегральную функцию в ε_2

$$Ee^{it(s_n+v_n+w_n)} - Ee^{its_n} = Ee^{its_n}(e^{it(v_n+w_n)} - e^{itv_n} + e^{itv_n} - 1) =$$

$$= Ee^{it(s_n+v_n)}(e^{itw_n} - 1) + Ee^{its_n}(e^{itv_n} - 1) =$$

$$= Ee^{it(s_n+v_n)}(e^{itw_n} - 1 - itw_n) + itEe^{its_n}w_n +$$

$$+ itEe^{its_n}(e^{itv_n} - 1)w_n + Ee^{its_n}(e^{itv_n} - 1) =$$

$$= L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$

Для оценки L_1 воспользуемся третьим неравенством утверждения 2, а затем утверждением 1. Тогда

$$|L_1| \le 2|t|^pE|w_n|^p \le 2^{(2-p)m+1}(m-1)^{p-1}\bar{\sigma}_n^{-p}|t|^p\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c} E|g_{I_cn}|^p,$$

$$1 \le p \le 2.$$

Для оценки L_2 запишем

$$|L_2| \le \bar{\sigma}_n^{-1}|t|\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}|E\exp(it\sum_{k\neq I_c} z_k)e^{itz_{i_1}}\ldots e^{itz_{i_c}}g_{I_cn}| =$$

$$= \bar\sigma_n^{-1}|t|\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}|E\exp(it\sum_{k\neq I_c} z_k)|\cdot|E(e^{it\hat z_{i_1}}-1)\dots(e^{it\hat z_{i_c}}-1)g_{I_cn}|,$$

где последнее равенство мы можем записать благодаря вырожденности g_{I_cn}, и по лемме 1

$$|L_2|\le\bar\sigma_n^{-1}|t|^{m+1}\exp(-t^2(1/3-m2^{-(2m+9)/3}))\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|\hat z_{i_1}\dots\hat z_{i_c}g_{I_cn}|.$$

Перейдем к L_3. Воспользуемся неравенством Гельдера с $1\le p\le 2$, $q=p/(p-1)$

$$|L_3|\le|t|(E|e^{itv_n}-1|^q)^{1/q}(E|w_n|^p)^{1/p}$$

и по утверждениям 1 и 2

$$|L_3|\le 2^{1/q}|t|^{1+1/q}(E|v_n|)^{1/q}(E|w_n|^p)^{1/p}\le$$

$$\le\frac{2}{q}|t|E|v_n|+\frac{1}{p}|t|^pE|w_n|^p\le$$

$$\le\frac{2}{q}3^m|t|\bar\sigma_n^{-1}\sum_{c=3}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n)+$$

$$+\frac{1}{p}2^{(2-p)m}(m-1)^{p-1}|t|^p\bar\sigma_n^{-p}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_cn}|^p.$$

И, наконец,

$$|L_4|\le|t|E|v_n|\le\bar\sigma_n^{-1}|t|\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\sum_{\check J_d}E|g_{I_cJ_dn}|\le$$

$$\le 3^m\bar\sigma_n^{-1}|t|\sum_{c=3}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n).$$

Оценка ε_3. Разложим подинтегральное выражение

$$Ee^{it(s_n+v_n+w_n)}-Ee^{its_n}=$$

$$=(Ee^{it(s_n+w_n)}-Ee^{its_n})+(Ee^{it(s_n+v_n+w_n)}-Ee^{it(s_n+w_n)})=$$

$$= I_1 + I_2.$$

Используем метод рандомизации (см, например, [1],[2]). Зафиксируем $t \in [2^{m+3}, h]$, и рассмотрим последовательность независимых между собой и независящих от $X_1, \ldots, X_n$ случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, имеющих распределение Бернулли таких, что

$$P(\alpha_j = 1) = 1 - P(\alpha_j = 0) = f(t) = 9 \cdot 2^{m-1} t^{-2} \log(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что $f(t) \in [0,1]$ для всех t. Тогда случайные величины X_j, $j = 1, \ldots, n$, можно представить в следующем виде

$$X_j \stackrel{d}{=} \alpha_j \bar{X}_j + (1 - \alpha_j)\tilde{X}_j, \quad j = 1, \ldots .n,$$

где $\bar{X}_j, \tilde{X}_j$ – независимые копии X_j при всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$s_n \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{z}_j + \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j)\tilde{z}_j = s_n^{(1)}(\bar{X}) + s_n^{(2)}(\tilde{X}).$$

Воспользовавшись тем, что для $g_{I_c n}$ верны свойства аддитивности и однородности, получим

$$w_n \stackrel{d}{=} \bar{\sigma}_n^{-1} \sum_{c=2}^{m} \sum_{k=0}^{c} W_{ck} = \sum_{c=2}^{m} \sum_{k=0}^{c} \bar{W}_{ck},$$

где

$$\bar{W}_{ck} = \bar{\sigma}_n^{-1} \sum_{\check{L}_k} \sum_{\check{I}_k^c, I_k^c \neq L_k} \prod_{s=1}^{k} \alpha_{l_s} \prod_{s=k+1}^{c} (1 - \alpha_{i_s}) g_{I_c n}(\bar{X}_{L_k}, \tilde{X}_{I_c \setminus L_k}). \quad (6)$$

и

$$v_n \stackrel{d}{=} \sum_{d=2}^{m-1} \sum_{c=d+1}^{m} \sum_{k=0}^{d} \bar{V}_{cdk} = \bar{\sigma}_n^{-1} \sum_{d=2}^{m-1} \sum_{c=d+1}^{m} \sum_{k=0}^{d} V_{cdk},$$

где

$$\bar{V}_{cdk} = \bar{\sigma}_n^{-1} \sum_{\check{L}_k} \sum_{\check{J}_k^d, J_k^d \neq L_k} \prod_{s=1}^{k} \alpha_{l_s} \prod_{s=k+1}^{d} (1 - \alpha_{j_s}) g_{I_c J_d n}(\bar{X}_{L_k}, \tilde{X}_{J_d \setminus L_k}).$$

Заметим, что в W_{ck} $\binom{c}{k}$ слагаемых, а в V_{cdk} $\binom{d}{k}$ слагаемых.

Лемма 2. *Обозначим последовательность* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *через* α. *Тогда*

$$E|E[e^{its_n^{(1)}}|\alpha]|^2\le t^{-3\cdot 2^{m-1}},\quad E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]|^2\le t^{3\cdot 2^{m-1}}e^{-t^2/3},$$

$$E|E[\exp(it\sum_{k\neq I_c}\alpha_k z_k)|\alpha]|^2\le t^{-3\cdot 2^{m/3-1}(2^{2m/3}-3c/4)},$$

$$E|E[\exp(it\sum_{k\neq I_c}(1-\alpha_k)z_k)|\alpha]|^2\le t^{3\cdot 2^{m/3-1}(2^{2m/3}-3c/4)}$$

$$\exp(-t^2(1/3-c2^{-2(m+3)/3})).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность случайных величин $\breve{X}_1,\ldots,\breve{X}_n$ такую, что $\breve{X}_j$ – независимые копии X_j при всех $j=1,\ldots,n$, тогда $\bar{z}_j,\tilde{z}_j$ и $z_j(\breve{X}_j)=\breve{z}_j$ – независимые одинаково распределенные при всех $j=1,\ldots,n$. Откуда получаем

$$E|E[\exp(it\sum_{j=1}^n\alpha_j\bar{z}_j)|\alpha]|^2=EE[\exp(it\sum_{j=1}^n\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j))|\alpha]=$$

$$=E(\exp(it\sum_{j=1}^n\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j)))=\prod_{j=1}^n E\exp(it\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j)).$$

Разложим $\exp(it\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j))$ в ряд Тейлора

$$|E\exp(it\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j))|\le 1-\frac{1}{2}t^2E(\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j))^2+\frac{1}{6}|t|^3E(\alpha_j|\bar{z}_j-\breve{z}_j|)^3.$$

Воспользовавшись неравенством $E|\bar{z}_j-\breve{z}_j|^3\le 4E|z_j|^3$, получаем

$$|E\exp(it\alpha_j(\bar{z}_j-\breve{z}_j))|\le 1-t^2f(t)(Ez_j^2-\frac{2}{3}hE|z_j|^3)\le$$

$$\le\exp(-t^2f(t)(Ez_j^2-\frac{2}{3}hE|z_j|^3)).$$

Тогда

$$E|E[e^{its_n^{(1)}}|\alpha]|^2\le\exp(-t^2f(t)(\sum_{j=1}^n Ez_j^2-\frac{2}{3}h\sum_{j=1}^n E|z_j|^3))=$$

$$=\exp(-3\cdot 2^{m-1}t^2t^{-2}\log(t))=t^{-3\cdot 2^{m-1}},$$

что дает первое неравенство леммы.

Для второго соотношения получаем аналогичным образом

$$E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]|^2 \leq \exp(-t^2(1-f(t))\frac{1}{3}) = t^{3\cdot 2^{m-1}}e^{-t^2/3}.$$

Два последних неравенства получаем по аналогии с леммой 1

$$E|E[\exp(it\sum_{k\neq I_c}\alpha_k z_k)|\alpha]|^2 \leq$$

$$\leq \exp(-t^2 f(t)(\frac{1}{3} - \sum_{s=1}^{c} Ez_{i_s}^2 + \frac{2}{3}h\sum_{s=1}^{c} E|z_{i_s}|^3)) \leq$$

$$\leq \exp(-t^2 f(t)(\frac{1}{3} - c2^{-2(m+3)/3})) = t^{-3\cdot 2^{m/3-1}(2^{2m/3}-3c/4)},$$

что завершает доказательство леммы.

Разложим I_1 следующим образом

$$I_1 = E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \sum_{c=2}^{m}\sum_{k=0}^{c}\bar{W}_{ck})) - E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)})) =$$

$$= E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc})) - E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}))+$$

$$+E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}(\bar{W}_{cc}+\bar{W}_{c0})))-E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc}))+$$

$$+E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \sum_{c=2}^{m}\sum_{k=0}^{c}\bar{W}_{ck})) - E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$$

$$+\sum_{c=2}^{m}(\bar{W}_{cc} + \bar{W}_{c0}))) = I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Для первого слагаемого запишем

$$I_{11} = E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}))(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc}) - 1 - it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc})+$$

$$+itE\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}))\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc} = I_{111} + I_{112}.$$

Воспользуемся тем, что при фиксированных α случайная величина $s_n^{(2)}$ не зависит от $s_n^{(1)}$ и W_{cc}, тогда по утверждению 2

$$|I_{111}| \leq 2|t|^p(m-1)^{p-1}\sum_{c=2}^{m} E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]\cdot E[|\bar{W}_{cc}|^p|\alpha]|.$$

По неравенству Гельдера, утверждению 1 и лемме 2

$$|I_{111}| \leq A_m\bar{\sigma}_n^{-p}|t|^p\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}(E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]|^2)^{1/2}(\prod_{s=1}^{c}E|\alpha_{i_s}|^{2p})^{1/2}E|g_{I_cn}|^p \leq$$

$$\leq A_m\bar{\sigma}_n^{-p}|t|^{p+3\cdot 2^{m-2}}e^{-t^2/6}f(t)\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|g_{I_cn}|^p, \quad 1\leq p\leq 2.$$

Перейдем к I_{112}

$$|I_{112}| \leq |t|\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]\cdot E[\exp(it\sum_{k\neq I_c}\alpha_k\bar{z}_k)|\alpha]$$

$$\prod_{s=1}^{c}\alpha_{i_s}E[\prod_{s=1}^{c}e^{it\alpha_{i_s}\bar{z}_{i_s}}g_{I_cn}|\alpha]|,$$

и аналогично L_2 запишем

$$|I_{112}| \leq |t|\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]\cdot E[\exp(it\sum_{k\neq I_c}\alpha_k\bar{z}_k)|\alpha]\prod_{s=1}^{c}\alpha_{i_s}\times$$

$$\times E[(e^{it\alpha_{i_1}\hat{z}_{i_1}}-1)\cdot\ldots\cdot(e^{it\alpha_{i_c}\hat{z}_{i_c}}-1)g_{I_cn}|\alpha]|.$$

По неравенству Гельдера, утверждению 2 и лемме 2

$$|I_{112}| \leq |t|^{m+1}\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}(E|E[e^{its_n^{(2)}}|\alpha]|^2)^{1/2}(E|E$$

$$[\exp(it\sum_{k\neq I_c}\alpha_k z_k)|\alpha]|^2)^{1/2}(\prod_{s=1}^{c}E\alpha_{i_s}^4)^{1/2}\times E|\hat{z}_{i_1}\cdot\ldots\cdot\hat{z}_{i_c}g_{I_cn}|\leq$$

$$\leq A_m\bar{\sigma}_n^{-1}|t|^{3m/4(1+3\cdot 2^{m/3-1})+1}e^{-t^2/6}\log^{m/2}(t)\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|\hat{z}_{i_1}\cdot\ldots\cdot\hat{z}_{i_c}g_{I_cn}|.$$

Рассмотрим I_{12}

$$I_{12} = E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}))(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc}) - 1)(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0}) - 1) +$$

$$+ E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}))(\exp(it(\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0})) - 1 - it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0}) +$$

$$+ itE\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}))\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0} = I_{121} + I_{122} + I_{123}.$$

По неравенству Гельдера с $1 \le p \le 2$, $q = p/(p-1)$ и утверждениям 1 и 2

$$|I_{121}| \le (E|\exp(it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{cc}) - 1|^p)^{1/p}(E|\exp(it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0}) - 1|^q)^{1/q} \le$$

$$\le 2^{1/q}|t|^{1+p/q}(m-1)^{p-1}(\sum_{c=2}^{m}E|\bar{W}_{cc}|^p)^{1/p}(\sum_{c=2}^{m}E|\bar{W}_{c0}|^p)^{1/q} \le$$

$$\le A_m|t|^p f(t)^{2/p}\bar{\sigma}_n^{-p}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|g_{I_c n}|^p, \quad 1 \le p < 2.$$

Поскольку при фиксированных α $s_n^{(1)}$ не зависит от W_{c0} и $s_n^{(2)}$, получаем аналогично I_{111}

$$|I_{122}| \le A_m\bar{\sigma}_n^{-p}|t|^{p-3\cdot 2^{m-2}}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|g_{I_c n}|^p, \quad 1 \le p \le 2.$$

I_{123} оценивается аналогично I_{112}

$$I_{123} \le |t|\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|E[e^{its_n^{(1)}}|\alpha]\cdot E[\exp(it\sum_{k\ne I_c}(1-\alpha_k)z_k|\alpha]$$

$$\prod_{s=1}^{c}(1-\alpha_{i_s}) \times E[(e^{it(1-\alpha_{i_1})\hat{z}_{i_1}} - 1)\cdot\ldots\cdot(e^{it(1-\alpha_{i_c})\hat{z}_{i_c}} - 1)g_{I_c n}|\alpha]| \le$$

$$\le |t|^{1-9m2^{m/3-4}}e^{-t^2(1/6-m2^{-2m/3-3})}\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check{I}_c}E|\hat{z}_{i_1}\cdot\ldots\cdot\hat{z}_{i_c}g_{I_c n}|.$$

Для I_{13} запишем следующее представление

$$I_{13} = E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \sum_{c=2}^{m} \bar{W}_{c0}))(\exp(it\sum_{c=2}^{m} \bar{W}_{cc}) - 1)$$

$$(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1} \bar{W}_{ck}) - 1) + E\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)} + \sum_{c=2}^{m} \bar{W}_{c0}))$$

$$(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1} \bar{W}_{ck}) - 1 - it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1} \bar{W}_{ck}) + itE\exp(it(s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$$

$$+\sum_{c=2}^{m} \bar{W}_{c0}))\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1} \bar{W}_{ck} = I_{131} + I_{132} + I_{133},$$

где I_{131} и I_{132} оцениваются по аналогии с предидущим.

Для оценки I_{133} нам понадобится серия рандомизаций. Пусть $\eta_1^{(s)}, \ldots, \eta_n^{(s)}$ $s = 1, \ldots, m-1$ – серия независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от α и $X_1, \ldots, X_n$ и имеющих распределение Бернулли

$$P(\eta_j^{(s)} = 1) = 1 - P(\eta_j^{(s)} = 0) = 1/2, \quad j = 1, \ldots, n,\ s = 1, \ldots, m-1.$$

Обозначим эту серию через η. Тогда $\bar{X}_j$ можно представить следующим образом

$$\bar{X}_j \stackrel{d}{=} \eta_j^{(1)} Y_j^{(1)} + (1 - \eta_j^{(1)})\bar{Y}_j^{(1)},$$

где $Y_j^{(1)}, \bar{Y}_j^{(1)}$ – независимые копии $\bar{X}_j$ при всех $j = 1, \ldots, n$, и далее

$$Y_j^{(1)} \stackrel{d}{=} \eta_j^{(2)} Y_j^{(2)} + (1 - \eta_j^{(2)})\bar{Y}_j^{(2)},$$

$$\ldots$$

$$Y_j^{(m-1)} \stackrel{d}{=} \eta_j^{(m)} Y_j^{(m)} + (1 - \eta_j^{(m)})\bar{Y}_j^{(m)},$$

где $Y_j^{(s+1)}, \bar{Y}_j^{(s+1)}$ – независимые копии $Y_j^{(s)}$ при $s = 2, \ldots, m-1$. Тогда

$$s_n^{(1)}(\bar{X}) \stackrel{d}{=} s_{n1}^{(1)}(Y^{(1)}) + s_{n1}^{(2)}(\bar{Y}^{(1)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(1)} \alpha_j z_j(Y_j^{(1)}) + \sum_{j=1}^{n} (1 - \eta_j^{(1)}) \alpha_j z_j(\bar{Y}_j^{(1)}).$$

И при $s = 1, \ldots, m-1$

$$s_{ns}^{(1)} = s_{ns+1}^{(1)} + s_{ns+1}^{(2)} = s_{ns+1}^{(1)}(Y^{(s+1)}) + s_{ns+1}^{(2)}(\bar{Y}^{(s+1)}).$$

Кроме того, положим

$$s_{n0}^{(1)} := s_{n}^{(1)}, \qquad s_{n0}^{(2)} := s_{n}^{(2)}.$$

Таким образом,

$$s_{n0}^{(1)} + s_{n0}^{(2)} \stackrel{d}{=} \sum_{r=0}^{k} s_{nr}^{(2)} + s_{nk}^{(1)} \stackrel{d}{=} \sum_{r=0}^{s} s_{nr}^{(2)} + s_{nk}^{(1)} \quad s = 1, \ldots, k,$$

где

$$s_{nk}^{(1)}(\bar{Y}^{(k)}) = \sum_{l=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} \eta_l^{(s)} \alpha_l z_l(Y_l^{(k)}),$$

$$s_{nr}^{(2)}(\bar{Y}^{(r)}) = \sum_{l=1}^{n} \prod_{s=1}^{r-1} \eta_l^{(s)} (1-\eta_l^{(r)}) \alpha_l z_l(\bar{Y}_l^{(r)}).$$

И следовательно,

$$\bar{W}_{ck} \stackrel{d}{=} \sum_{b_1=0}^{k} \sum_{\check{I}_c} \sum_{\check{L}_k, L_k \in I_c} \prod_{s=k+1}^{c} (1-\alpha_{i_s}) \sum_{\check{R}_{b_1}, R_{b_1} \in L_k} \prod_{s=1}^{k} \alpha_{l_s} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{b_1} \eta_{r_s}^{(1)} \prod_{s=b_1+1}^{k} (1-\eta_{l_s}^{(1)}) g_{I_c n R_{b_1}}(Y_{R_{b_1}}^{(1)}, \bar{Y}_{L_k \setminus R_{b_1}}^{(1)}, \tilde{X}_{I_c \setminus L_k}) \stackrel{d}{=}$$

$$\stackrel{d}{=} \sum_{b_1=0}^{k} \sum_{\check{R}_{b_1}} \sum_{\check{L}_{b_1}^k, L_{b_1}^k \neq R_{b_1}} \sum_{\check{I}_k^c, I_k^c \neq L_{b_1}^k \bigcup R_{b_1}} \prod_{s=k+1}^{c} (1-\alpha_{i_s}) \prod_{s=1}^{k} \alpha_{l_s} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{b_1} \eta_{r_s}^{(1)} \prod_{s=b_1+1}^{k} (1-\eta_{l_s}^{(1)}) g_{I_c n R_{b_1}}(Y_{R_{b_1}}^{(1)}, \bar{Y}_{L_k \setminus R_{b_1}}^{(1)}, \tilde{X}_{I_c \setminus L_k}).$$

Тогда разложим $\bar{W}_{ck}$ на три типа слагаемых

$$\bar{W}_{ck} \stackrel{d}{=} \sum_{b_1=0}^{k} \bar{W}_{ckb_1} = \bar{W}_{ck0}(\bar{Y}_{L_k}^{(1)}, \tilde{X}_{I_c \setminus L_k}) + \bar{W}_{ckk}(Y_{L_k}^{(1)}, \tilde{X}_{I_c \setminus L_k}) +$$

$$+\sum_{b_1=1}^{k-1}\bar W_{ckb_1}(Y^{(1)}_{R_{b_1}},\bar Y^{(1)}_{L_k\setminus R_{b_1}},\tilde X_{I_c\setminus L_k}),$$

и далее

$$\sum_{b_1=1}^{k-1}\bar W_{ckb_1}\overset{d}{=}\sum_{b_1=1}^{k-1}\sum_{b_2=0}^{b_1}\bar W_{ckB_1b_2}(Y^{(2)}_{R_{b_2}},\bar Y^{(2)}_{R_{b_1}\setminus R_{b_2}},\bar Y^{(1)}_{L_k\setminus R_{b_1}},\tilde X_{I_c\setminus L_k})\overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=}\sum_{b_1=1}^{k-1}(\bar W_{ckB_1b_1}+\bar W_{ckB_10})+\sum_{b_1=1}^{k-1}\sum_{b_2=1}^{b_1-1}(\bar W_{ckB_2b_2}+\bar W_{ckB_20})+\cdots+$$

$$+\sum_{b_1=1}^{k-1}\sum_{b_2=1}^{b_1-1}\cdots\sum_{b_{k-1}=1}^{b_{k-2}}(\bar W_{ckB_{k-1}b_{k-1}}+\bar W_{ckB_{k-1}0})=$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{1\le b_j<\cdots<b_1\le k-1}(\bar W_{ckB_jb_j}+\bar W_{ckB_j0}),$$

где при $j>0$

$$W_{ckB_jb_j}=\sum_{\check R_{b_j}}\sum_{\check R^{b_{j-1}}_{b_j},R^{b_{j-1}}_{b_j}\neq R_{b_j}}\cdots\sum_{\check R^{b_1}_{b_2},R^{b_1}_{b_2}\neq(\bigcup R^{b_{s-1}}_{b_s})}\sum_{\check L^k_{b_1}}\sum_{\check I^c_k}\prod_{s=1}^{b_j}(\prod_{i=1}^{j+1}\eta^{(i)}_{r_s})\times$$

$$\times\prod_{s=b_j+1}^{b_{j-1}}(\prod_{i=1}^{j-1}\eta^{(i)}_{r_s}(1-\eta^{(j)}_{r_s}))\cdots\prod_{s=b_1+1}^{k}(1-\eta^{(1)}_{l_s})\prod_{s=1}^{k}\alpha_{l_s}\prod_{s=k+1}^{c}(1-\alpha_{i_s})\times$$

$$\times g_{I_cnR_{b_j}}(Y^{(j+1)}_{R_{b_j}},\bar Y^{(j)}_{R_{b_{j-1}}\setminus R_{b_j}},\ldots,\bar Y^{(1)}_{L_k\setminus R_{b_1}},\tilde X_{I_c\setminus L_k}).$$

Таким образом, можем записать

$$I_{133}=it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\le b_j<\cdots<b_1\le k-1}E[\exp(it(\sum_{r=0}^{j+1}s^{(2)}_{nr}$$

$$+s^{(1)}_{nj+1}+\sum_{d=2}^{m}W_{d0}))(\bar W_{ckB_jb_j}+\bar W_{ckB_j0})]=J_1+J_2,$$

где при $j=0$ сумма $\bar W_{ckB_jb_j}+\bar W_{ckB_j0}$ означает $\bar W_{ck0}+\bar W_{ckk}$. Заметим, что $W_{ckB_jb_j}$ не зависит от $s^{(2)}_{nj+1}(\bar Y^{(j+1)})$, а W_{ckB_j0} не зависит от $s^{(1)}_{nj+1}(Y^{(j+1)})$ при фиксированных α, η.

Поскольку J_1 анд J_2 оцениваются одинаково, рассмотрим только J_1

$$J_1 = it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\le b_j<\dots<b_1\le k-1} E[\exp(it(\sum_{r=0}^{j+1} s_{nr}^{(2)} + s_{nj+1}^{(1)}))$$

$$(\exp(it\sum_{d=2}^{m}\bar W_{d0}) - 1)\bar W_{ckB_jb_j}] + it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\le b_j<\dots<b_1\le k-1}$$

$$E[\exp(it(\sum_{r=0}^{j+1} s_{nr}^{(2)} + s_{nj+1}^{(1)}))\bar W_{ckB_jb_j}] = J_{11} + J_{12}.$$

Для оценки J_{11} выделим независимую часть и воспользуемся вырожденностью $g_{I_cnR_{b_j}}$

$$|J_{11}| \le |t|\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\le b_j<\dots<b_1\le k-1}\sum_{\check R_{b_j}}\cdots\sum_{\check L_{b_1}^k} E|\prod_{s=1}^{b_j}$$

$$(\prod_{i=1}^{j+1}\eta_{r_s}^{(i)})\cdots\prod_{s=1}^{k}\alpha_{l_s} \times E[e^{its_{nj+1}^{(2)}}|\alpha,\eta]E[\exp(it\sum_{a\ne\bigcup R_{b_s}^{b_s-1}}$$

$$\prod_{s=1}^{j+1}\eta_a^{(s)}\alpha_a z_a(Y^{(j+1)}))|\alpha,\eta]\times E[\prod_{a=\bigcup R_{b_s}^{b_s-1}}(\exp(it\prod_{s=1}^{j+1}\eta_a^{(s)}\alpha_a z_a(Y^{(j+1)}))-1)$$

$$(\exp(it\sum_{d=2}^{m}\bar W_{d0}) - 1)\sum_{\check I_k^c}\prod_{s=k+1}^{c}(1-\alpha_{i_s})g_{I_cnR_{b_j}}|\alpha,\eta]|.$$

По неравенству Гельдера с $1\le p\le 2$, $q = p/(p-1)$ и утверждениям 1 и 2 последнее математическое ожидание не превосходит

$$(\prod_{a=\bigcup R_{b_s}^{b_s-1}} E[|\exp(it\prod_{s=1}^{j+1}\eta_a^{(s)}\alpha_a z_a)$$

$$-1|^q|\alpha,\eta]\cdot E[|\exp(it\sum_{d=2}^{m}\bar W_{d0}) - 1|^q|\alpha,\eta])^{1/q}\times$$

$$\times(2^{(2-p)(c-k)}\sum_{\check I_k^c}\prod_{s=k+1}^{c}(1-\alpha_{i_s})^pE[|g_{I_cnR_{b_j}}|^p|\alpha,\eta])^{1/p}$$

$$\leq A_m|t|^{k+p-1}\bar\sigma_n^{-1}(\prod_{a=\bigcup R_{b_s}^{b_s-1}}\alpha_a^q\prod_{s=1}^{j+1}(\eta_a^{(s)})^qE|z_a|^q)^{1/q}$$

$$\times(\sum_{c=2}^{m}2^{(2-p)c}\sum_{\check I_c}E|g_{I_cn}(\tilde X_{I_c})|^p)^{1/q}(2^{(2-p)(c-k)}\sum_{\check I_k^c}E|g_{I_cnR_{b_j}}|^p)^{1/p}.$$

Поскольку $q\geq 2$, имеем $E|z_a|^q=Ez_a^2|z_a|^{q-2}\leq m^{q-2}2^{q-3}(\sigma_n/\bar\sigma_n)^{q-2}$ Ez_a^2. Следовательно, по неравенству Гельдера для сумм

$$|J_{11}|\leq A_m(\sigma_n/\bar\sigma_n)^{(q-2)/q}\bar\sigma_n^{-p}\times$$

$$\times\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}|t|^{k+p}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\leq b_j<\cdots<b_1\leq k-1}\sum_{\check R_{b_j}}\cdots\sum_{\check L_{b_1}^k}E|\prod_{s=1}^{b_j}(\prod_{i=1}^{j+1}\eta_{r_s}^{(i)})^2\cdots\prod_{s=1}^{k}$$

$$\alpha_{l_s}^2\times E[e^{its_{nj+1}^{(2)}}|\alpha,\eta]E[\exp(it\sum_{a\neq\bigcup R_{b_s}^{b_s-1}}\prod_{s=1}^{j+1}\eta_a^{(s)}\alpha_az_a(Y^{(j+1)}))|\alpha,\eta]$$

$$\times(\prod_{a=\bigcup R_{b_s}^{b_s-1}}Ez_a^2\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_cn}|^p)^{1/q}(\sum_{\check I_k^c}E|g_{I_cnR_{b_j}}|^p)^{1/p}\leq$$

$$\leq A_m|t|^{p-1.06}\log^{(m-1)/2}(t)(\sigma_n/\bar\sigma_n)^{1/p-1}\bar\sigma_n^{-p}\times$$

$$\times(\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\leq b_j<\cdots<b_1\leq k-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|g_{I_cn}|^p)^{1/q}\times$$

$$\times(\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{c}{k}^j\sum_{1\leq b_j<\cdots<b_1\leq k-1}\sum_{\check I_c}E|g_{I_cn}|^p)^{1/p},$$

где мы использовали

$$\sum_{1\leq i_1\neq\cdots\neq i_c\leq n}\prod_{s=1}^{c}Ez_{i_s}^2\leq(\sum_{i=1}^{n}Ez_i^2)^c=1.$$

Откуда получаем

$$|J_{11}| \le A_m (\sigma_n/\bar\sigma_n)^{1/p-1}\bar\sigma_n^{-p}|t|^{p-1.06}\log^{(m-1)/2}(t)\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c} E|g_{I_c n}|^p.$$

Перейдем к J_{12} (обозначим $b_0 := k$). Снова воспользуемся вырожденностью $g_{I_c n R_{b_j}}$,

$$|J_{12}| \le |t|\bar\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{1\le b_j<\dots<b_1\le k-1}\sum_{\check R_{b_j}}\dots\sum_{\check I_k^c}$$

$$E|\prod_{s=1}^{b_j}(\prod_{i=1}^{j+1}\eta_{r_s}^{(i)})\cdots\prod_{s=1}^{k}\alpha_{l_s}\times\prod_{s=k+1}^{c}(1-\alpha_{i_s})E[e^{its^{(2)}_{nj+1}}|\alpha,\eta]$$

$$\prod_{d=1}^{j}E[\exp(it\sum_{a\ne R_{b_d}^{b_{d-1}}}\prod_{s=1}^{d-1}\eta_a^{(s)}(1-\eta_a^{(d)})\alpha_a z_a)|\alpha,\eta]$$

$$\times E[\exp(it\sum_{a\ne I_k^c}(1-\alpha_a)z_a)|\alpha,\eta]\times E[\exp(it\sum_{a=1}^{n}\prod_{s=1}^{j+1}\eta_a^{(s)}\alpha_a z_a)|\alpha,\eta]\prod_{d=1}^{j}$$

$$\prod_{s=b_d+1}^{b_{d-1}}(\exp(it\prod_{a=1}^{d-1}\eta_{r_s}^{(a)}(1-\eta_{r_s}^{(d)})\alpha_{r_s}\hat z_{r_s})-1)\times\prod_{s=1}^{b_j}(\exp(it\prod_{a=1}^{j+1}\eta_{r_s}^{(a)}\alpha_{r_s}\hat z_{r_s})-1)$$

$$\prod_{s=k+1}^{c}(\exp(it(1-\alpha_{i_s})\hat z_{i_s})-1)g_{I_c n R_{b_j}}|.$$

Используя те же приемы, что и ранее, получим

$$|J_{12}| \le A_m|t|^{m+3\cdot 2^{m-2}-9\cdot 2^{m/3-4}-3/2}\exp(-t^2(1/6$$

$$-(m-1)2^{-2m/3-3}))\log^{1/2}(t)\times\bar\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^{m}\sum_{\check I_c}E|\hat z_{i_1}\dots\hat z_{i_c}g_{I_c n}|.$$

Остается оценить I_2. Запишем представление

$$I_2 = E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=0}^{c}\bar W_{ck}+\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\sum_{k=0}^{d}\bar V_{cdk}))$$

$$-E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=0}^{c}\bar{W}_{ck}))=E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0}))$$

$$(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c}\bar{W}_{ck})-1-it\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c}\bar{W}_{ck})\times(\exp(it\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\bar{V}_{cd0})-1)+$$

$$+itE\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0}))(\exp(it\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\bar{V}_{cd0})$$

$$-1)\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c}\bar{W}_{ck}+E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}))(\exp(it\sum_{c=2}^{m}\bar{W}_{c0})$$

$$-1)(\exp(it\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\bar{V}_{cd0})$$

$$-1)+E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}))(\exp(it\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\bar{V}_{cd0})-1)+E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}$$

$$+\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=0}^{c}\bar{W}_{ck}+\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\bar{V}_{cd0}))-E\exp(it(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=0}^{c}\bar{W}_{ck})).$$

и используем те же приемы, что и выше. В частности, второе слагаемое не превосходит

$$A_m(\sigma_n/\bar{\sigma}_n)^{(q-2)/2}|t|^{2+1/q}\sum_{c=2}^{m}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\check{L}_k}(E|E$$

$$[\exp(it\sum_{j\neq L_k}\alpha_j z_j)|\alpha]|^2)^{1/2}f(t)^k\times(\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\sum_{\check{J}_d}E|g_{I_cJ_dn}|$$

$$\prod_{s=1}^{k}Ez_{l_s}^2)^{1/q}(\bar{\sigma}_n^{-p}\sum_{\check{I}_k^c,I_k^c\neq L_k}E|g_{I_cn}|^p)^{1/p}$$

$$\leq A_m(\sigma_n/\bar{\sigma}_n)^{2/p-1}|t|^{1+9m\cdot 2^{m/3-4}-1/p-3\cdot 2^{m-2}}$$

$$\log(t)\times\bar{\sigma}_n^{-1}\sum_{d=2}^{m-1}\sum_{c=d+1}^{m}\sum_{\check{J}_d}E|g_{I_cJ_dn}|)^{1/q}(\bar{\sigma}_n^{-p}\sum_{\check{I}_c}E|g_{I_cn}|^p)^{1/p},$$

$$1\leq p\leq 2,\ q=p/(p-1).$$

Для завершения доказательства теоремы нам понадобятся следующие две леммы

Лемма 3.
$$\left|\frac{\bar\sigma_n^2}{\sigma_n^2}-1\right| \le 2\sigma_n^{-2}\sum_{j=1}^n Eg_j^2 I(|g_j|>\sigma_n)$$
$$+2m(m+4)\sigma_n^{-1}\sum_{c=2}^m\sum_{\check I_c} E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n),$$
анд $\bar\sigma_n^2 \ge 0.5\cdot\sigma_n^2$.

Доказательство. По определению
$$\bar\sigma_n^2=\sum_{j=1}^n E(g_{jn}+\sum_{c=2}^m h_{cjn})^2=$$
$$=\sum_{j=1}^n Eg_{jn}^2+\sum_{j=1}^n E(\sum_{c=2}^m h_{cjn})^2+2\sum_{j=1}^n E(g_{jn}\sum_{c=2}^m h_{cjn}),$$
где
$$\sum_{j=1}^n E(\sum_{c=2}^m h_{cjn})^2=\sum_{j=1}^n\sum_{c=2}^m Eh_{cjn}^2+\sum_{j=1}^n\sum_{2\le c_1\ne c_2\le m} Eh_{c_1jn}h_{c_2jn}\le$$
$$\le 2\sigma_n m\sum_{j=1}^n\sum_{c=2}^m\sum_{\check I_{c-1},I_{c-1}\ne j} E|g_{I_{c-1},j}|I(|g_{I_{c-1},j}|>\sigma_n)\le$$
$$\le 2\sigma_n m^2\sum_{c=2}^m\sum_{\check I_c} E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n),$$
$$\sum_{j=1}^n E(g_{jn}\sum_{c=2}^m h_{cjn})\le 2\sigma_n\sum_{j=1}^n\sum_{c=2}^m Eh_{cjn}$$
$$\le 4\sigma_n m\sum_{c=2}^m\sum_{\check I_c} E|g_{I_c}|I(|g_{I_c}|>\sigma_n),$$
$$\sum_{j=1}^n Eg_{jn}^2=\sum_{j=1}^n E(g_j^n)^2-\sum_{j=1}^n(Eg_j^n)^2=\sigma_n^2$$
$$-\sum_{j=1}^n Eg_j^2I(|g_j|>\sigma_n)-\sum_{j=1}^n(Eg_jI(|g_j|>\sigma_n))^2.$$

Следовательно,

$$\bar{\sigma}_n^2 \geq \sigma_n^2 - \sum_{j=1}^{n} Eg_j^2 I(|g_j| > \sigma_n) - \sum_{j=1}^{n} (Eg_j I(|g_j| > \sigma_n))^2$$

$$-2m(m+4)\sigma_n \sum_{c=2}^{m} \sum_{\check{I}_c} E|g_{I_c}| I(|g_{I_c}| > \sigma_n),$$

$$\bar{\sigma}_n^2 \leq \sigma_n^2 - \sum_{j=1}^{n} Eg_j^2 I(|g_j| > \sigma_n) - \sum_{j=1}^{n} (Eg_j I(|g_j| > \sigma_n))^2$$

$$+2m(m+4)\sigma_n \sum_{c=2}^{m} \sum_{\check{I}_c} E|g_{I_c}| I(|g_{I_c}| > \sigma_n).$$

Что дает первое неравенство леммы. Можем считать, что правая часть первого неравенства меньше 0.5, поскольку $\Delta_n \leq 1$, тогда $\bar{\sigma}_n^2 \geq 0.5 \cdot \sigma_n^2$.

Лемма 4.

$$\sigma_n^{-1} \sum_{c=2}^{m} \sum_{\check{I}_c} E|\hat{z}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \hat{z}_{i_c} g_{I_c n}| \leq A_m (\sum_{c=2}^{m} \sigma_n^{-c-1} \sum_{\check{I}_c} E|g_{i_1}^n \cdot \ldots \cdot g_{i_c}^n g_{I_c}^n| +$$

$$+\sigma_n^{-2} \sum_{c=2}^{m} \sum_{\check{I}_c} Eg_{I_c}^2 I(|g_{I_c}| \leq \sigma_n) + \sum_{c=1}^{m} (\sigma_n^{-1} \sum_{r=2}^{m} \sum_{\check{I}_r} E|g_{I_r}| I(|g_{I_r}| > \sigma_n))^c).$$

Доказательство. По определению

$$E|\hat{z}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \hat{z}_{i_c} g_{I_c n}| = \bar{\sigma}_n^{-c} E|\prod_{s=1}^{c} (g_{i_s}^n + \sum_{r=2}^{m} h_{r i_s}^n) g_{I_c}^n| \leq$$

$$\leq \bar{\sigma}_n^{-c} E|g_{i_1}^n \cdot \ldots \cdot g_{i_c}^n g_{I_c}^n| +$$

$$+\bar{\sigma}_n^{-c} \sum_{d=1}^{c} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq c} E|\prod_{s=1}^{d} (\sum_{r=2}^{m} h_{r i_{j_s}}^n) \prod_{s=1}^{c-d} g_{i_{k_s}}^n g_{I_c}^n|,$$

где индексы $k_s \in \{1,\dots,c\}\backslash\{J_d\}$. Применив неравенство Гельдера и оценив $E(\sum_{r=2}^m h^n_{ri_{j_s}})^2$ как в лемме 3, получим, что второе слагаемое не превосходит

$$\bar{\sigma}_n^{-c}\sqrt{2(m-1)}\sum_{d=1}^{c}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_d\le c}(\prod_{s=1}^{d}\sigma_n\sum_{r=2}^{m}\sum_{L_{r-1}\neq i_{j_s}}$$

$$E|g_{L_{r-1}i_{j_s}}|I(|g_{L_{r-1}i_{j_s}}|>\sigma_n)\times\prod_{s=1}^{c-d}E(g^n_{i_{k_s}})^2)^{1/2}(E(g^n_{I_c})^2)^{1/2}.$$

Далее применим неравенство Гельдера для сумм и заметив, что

$$\sum_{1\le i_{k_1}<\cdots<i_{k_{c-d}}\le n}\prod_{s=1}^{c-d}E(g^n_{i_{k_s}})^2\le\sigma_n^{2(c-d)},$$

получим утверждение леммы.

Объединяя формулы (1)–(4), оценки ε_1, ε_2, ε_3 и соотношения

$$\sigma_n^{-1}Eg^2_{I_c}I(|g_{I_c}|\le\sigma_n)=\sigma_n^{-p}E|g_{I_c}|^pI(|g_{I_c}|\le\sigma_n),$$

$$\sigma_n^{-1}E|g_j|I(|g_j|>\sigma_n)=\sigma_n^{-2}Eg_j^2I(|g_j|>\sigma_n),$$

получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим $\sigma_n^{-c-1}\sum_{\check{I}_c}E|g^n_{i_1}\cdot\ldots\cdot g^n_{i_c}g^n_{I_c}|$. Поскольку

$$\prod_{s=1}^{c}|g^n_{i_s}|^{1-2/c}\le\sigma_n^{c-2},$$

получаем

$$\sigma_n^{-c-1}\sum_{\check{I}_c}E|g^n_{i_1}\cdot\ldots\cdot g^n_{i_c}g^n_{I_c}|\le\sigma_n^{-3}\sum_{\check{I}_c}E(\prod_{s=1}^{c}|g^n_{i_s}|^{2/c}\cdot|g^n_{I_c}|),$$

что дает теорему 2.

Доказательство следствия. Используя четвертое неравенство утверждения 2 с $p=\delta_c=\frac{2c+1}{2c-1}$ и $q=\frac{2c+1}{2}$ получаем

$$\sigma_n^{-3}\sum_{\check{I}_c}E|\prod_{s=1}^{c}|g^n_{i_s}|^{2/c}\cdot|g^n_{I_c}|\le\frac{2c-1}{2c+1}\sigma_n^{-\delta_c}\sum_{\check{I}_c}E|g^n_{I_c}|^{\delta_c}$$

$$+\frac{2}{2c+1}\,\sigma_n^{-2c-1}\sum_{\check{I}_c}\prod_{s=1}^{c}E|g_{i_s}^n|^{\frac{2c+1}{c}}.$$

Далее для второго слагаемого имеем

$$\frac{2}{2c+1}\,(\sigma_n^{-\frac{2c+1}{2}}\sum_{i=1}^{n}E\{|g_i^n|^{3/c}|g_i^n|^{2(c-1)/c}\})^c\le$$

$$\le\frac{2}{2c+1}\,(\sigma_n^{-\frac{2c+1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}E(g_i^n)^2)^{\frac{c-1}{c}}(\sum_{i=1}^{n}E|g_i^n|^3)^{\frac{1}{c}})^c\le$$

$$\le\frac{2}{2c+1}\,\sigma_n^{-3}\sum_{i=1}^{n}E|g_i^n|^3,$$

что дает следствие.

Литература

1. I. B. Alberink, *A Berry-Esseen bound for U-statistics in non-i.i.d. case.* — Preprint 98-057 SBF 343, Universität Bielefeld (1998), 1–12.
2. V. Bentkus, M. Bloznelis, F. Götze, *A Berry-Esseen Bound for Student's Statistics in Non-I.I.D. Case.* — Journal of Theoretical Probability, **9**, (1996), 765–796.
3. V. Bentkus, F. Götze, R. Zitikis, *Lower estimates of the convergence rate for U-statistics.* — Ann. Probab. **22**, 4 1707–1714 (1994), 1707–1714.
4. Ю. В. Боровских, *О нормальной аппроксимации U-статистик.* — Теор. вер. и ее прим., **45**, 3 (2000), 469–488.
5. Ю. В. Боровских, В. С. Королюк, *Теория U-статистик.* — Киев, Наукова думка (1989).
6. Yu. V. Borovskikh, V. S. Korolyuk, *Martingale Approximation.* — VSP. Utreht, The Netherlands (1997), 196–230.
7. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* — Т. 2, пер. с англ. М.: Мир (1984).
8. K. O. Friedrich, *A Berry-Esseen bound for functions of independent random variables.* — Ann. Statist. **17**, 1 (1989), 170–183.
9. M. Ghosh, R. Dasgupta, *Berry-Esseen theorem for U-statistics in the non i.i.d. case.* — Colloguia mathematica socieatatis János Bolyai, 32. Nonparametric statistical inference.– Amsterdam: North Holland publishing company, 1 (1982), 293–313.
10. W. Hoeffding, *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* Ann. Math. Statist. **19**, 3 (1948), 293–325.
11. Ш. А. Хашимов, Г. Р. Абдурахманов, *Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для обобщенных U-статистик.* — Теор. вер. и ее прим., **43**, 1 (1998), 69–81.

12. Т. Л. Малевич, Г. Р. Абдурахманов, *Центральная предельная теорема для обобщенных (неоднородных) U-статистик от различно распределенных случайных величин.* — Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, **2** (1986), 28–33.

Gadasina L.V. A Berry-Esseen bound for U-statistics.

The rate of convergence in the central limit theorem for non-degenerate U-statistics of n independent random variables is investigated under minimal sufficient moment conditions on canonical functions of Hoeffding representation.

Санкт-Петербургский государственный университет Путей Сообщения, кафедра прикладной математики

Поступило 18 ноября 2003 г.