Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

А. Ю. Зайцев

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВЫБОРКИ ПУАССОНОВСКИМ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССОМ

Цель настоящей работы – показать, что полученные ранее результаты об аппроксимации распределений сумм независимых слагаемых сопровождающими безгранично делимыми законами можно интерпретировать как содержательные количественные оценки близости выборки, составленной из независимых наблюдений, и пуассоновского точечного процесса, получаемого при пуассонизации исходной выборки.

Пуассоновский точечный процесс $\mathbf{Y}$ на некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{S})$ с мерой интенсивности λF, где $\mathcal{S}$ – σ-алгебра подмножеств множества $\mathfrak{X}$, $\lambda > 0$, а F – некоторая вероятностная мера, можно определить следующим образом (см. [25]). Пусть $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$ – последовательность независимых случайных элементов пространства $(\mathfrak{X}, \mathcal{S})$ с распределениями F, а η – не зависящая от этой последовательности случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ. Положим $\mathbf{Y} = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(\eta)}\}$ при $\eta > 0$ и $\mathbf{Y} = \varnothing$ при $\eta = 0$. Точки $Y^{(j)}$, составляющие точечный процесс $\mathbf{Y}$, рассматриваются с учетом кратности: если k из случайных элементов $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(\eta)}$ принимают одно и то же значение x, то считается, что в точке x оказалось k точек процесса $\mathbf{Y}$. Для любого измеримого множества $A \in \mathcal{S}$ определим точечный процесс $\mathbf{Y}_A = \{Y^{(j)} \in A : j = 1, \dots, \eta\}$. Обозначим $\mathbf{Y}(A)$ количество точек процесса $\mathbf{Y}$, попавших в множество A. Тогда мы имеем $\mathbf{P}\{\mathbf{Y}(A) = 0\} = e^{-\lambda F\{A\}}$ и

$$\mathbf{P}\{\mathbf{Y}(A) = k\} = (\lambda F\{A\})^k \, e^{-\lambda F\{A\}}/k!, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

то есть случайная величина $\mathbf{Y}(A)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda F\{A\}$. Фундаментальным свойством пуас-

---

Работа поддержана грантами РФФИ 02-01-00265 и НШ-2258.2003.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

соновского точечного процесса является пространственная независимость: для любых попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{S}$ случайные величины $\mathbf{Y}(A_1), \mathbf{Y}(A_2), \ldots, \mathbf{Y}(A_m)$ независимы в совокупности. Заметим также, что $\mathbf{Y}_A$ можно рассматривать как пуассоновский точечный процесс на пространстве $(A, \mathcal{S}_A)$ с мерой интенсивности λF_A, где $\mathcal{S}_A$ и F_A обозначают сужения σ-алгебры $\mathcal{S}$ и меры F на множество $A \in \mathcal{S}$.

Пусть X_i – независимые случайные элементы измеримого пространства $(\mathfrak{X}, \mathcal{S})$ с распределениями $F_i = \mathcal{L}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Мы рассмотрим задачу об аппроксимации выборки $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ пуассоновским точечным процессом $\mathbf{Y} = \big\{Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(\eta)}\big\}$ с мерой интенсивности $\sum_{i=1}^n F_i = nF$, где $F = n^{-1}\sum_{i=1}^n F_i$. Заметим, что для процесса $\mathbf{Y}$ случайная величина η имеет распределение Пуассона с параметром n. Именно замена $\mathbf{X}$ на $\mathbf{Y}$ и обратно производится при пуассонизации и депуассонизации эмпирических процессов (см., например, работы [39, доказательство Леммы 2.2] [11], [21] и библиографию в них). При этом существенно используется пространственная независимость пуассонизированной выборки $\mathbf{Y}$.

Рассмотрим независимые пуассоновские точечные процессы $\mathbf{Y}_i$ с мерами интенсивности $F_i = \mathcal{L}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим $Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}, \ldots, Y_i^{(\eta_i)}$ случайные элементы, соответствующие точечному процессу $\mathbf{Y}_i$. Известно, что тогда точечный процесс $\mathbf{Y}^* = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{Y}_i$, где $\mathbf{Y}_i = \Big\{Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}, \ldots, Y_i^{(\eta_i)}\Big\}$, имеет конечномерные распределения случайных величин $\mathbf{Y}^*(A_1), \mathbf{Y}^*(A_2), \ldots, \mathbf{Y}^*(A_m)$, совпадающие с конечномерными распределениями случайных величин $\mathbf{Y}(A_1), \mathbf{Y}(A_2), \ldots, \mathbf{Y}(A_m)$ для любых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{S}$.

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) : (\mathfrak{X}, \mathcal{S}) \to \big(\mathbf{R}^d, \mathfrak{B}_d\big)$ – измеримое отображение, а $\mathfrak{B}_d$ – борелевская σ-алгебра. Обозначим

$$G_{\mathbf{f}} = \mathcal{L}\Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}(X_i)\Big), \qquad H_{\mathbf{f}} = \mathcal{L}\Big(\sum_{i=1}^{\eta} \mathbf{f}(Y^{(i)})\Big). \tag{1}$$

Пусть $R(\cdot,\cdot)$ – некоторое расстояние в пространстве вероятностных мер. Произведения и степени мер будут пониматься в смысле свертки. Мы будем обозначать

$$R_{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = R(G_{\mathbf{f}}, H_{\mathbf{f}})$$

и

$$e(\lambda F) = e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s F^s}{s!},$$

где $\lambda \geq 0$, а F – некоторое вероятностное распределение в пространстве $\left(\mathbf{R}^d, \mathfrak{B}_d\right)$. Характеристическая функция распределения $e(\lambda F)$ равна $\exp\big(\lambda\big(\widehat{F}(\mathbf{t}) - 1\big)\big)$, где

$$\widehat{F}(\mathbf{t}) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{x}\rangle}\, F\{d\mathbf{x}\}$$

– характеристическая функция распределения F. В частности, с помощью этой формулы можно проверить, что имеет место равенство

$$\prod_{i=1}^{n} e(\lambda_i F_i) = e\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i\right) = e\left((\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i F_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$G_{\mathbf{f}} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}(\mathbf{f}(X_i)), \qquad H_{\mathbf{f}} = e\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(\mathbf{f}(X_i))\right). \tag{2}$$

Мы будем в первую очередь рассматривать

$$\rho(F, G) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d} |F(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})|, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d,$$

– равномерное расстояние между функциями распределения

$$F(\mathbf{x}) = F\left\{\left\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^d : \mathbf{y} \leq \mathbf{x}\right\}\right\}.$$

Нас будет интересовать аппроксимация вероятностей событий вида

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(X_i) \leq \mathbf{x}\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i) \leq x_i, i = 1, \ldots, n\right\}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, \tag{3}$$

которые можно интерпретировать как вероятности того, что суммарные воздействия факторов риска f_i не превзойдут фиксированных критических значений x_i. Мы оценим величины вида

$$\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d} \left| \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(X_i) \leq \mathbf{x}\right\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{\eta} \mathbf{f}(Y^{(i)}) \leq \mathbf{x}\right\}\right|. \tag{4}$$

Оценивание величины $\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ сводится к оцениванию близости распределений линейных функционалов вида $\int \mathbf{f}(x)\, m_{\mathbf{X}}(dx)$ и $\int \mathbf{f}(x)\, m_{\mathbf{Y}}(dx)$, где $m_{\mathbf{X}}$ и $m_{\mathbf{Y}}$ – ненормированные эмпирические меры, построенные по сравниваемым точечным процессам $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Заметим, кстати, что из близости линейных функционалов не вытекает близость распределений. Например, в работе автора [51] для любого $\varepsilon > 0$ построены примеры таких двумерных распределений F и G, что расстояние по вариации между проекциями этих распределений на произвольное направление не превосходит ε, а $\rho(F,G) \geqslant 1/2$.

Обозначения $c(\cdot)$, $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$, будут применяться для положительных постоянных, зависящих только от указанных в скобках аргументов, причем символ $c(\cdot)$ будет использоваться как для одинаковых, так и для различных постоянных в тех случаях, когда нам безразличны их численные значения. Так например, $c(d)$ зависят только от размерности d, c – абсолютные постоянные. Будем также обозначать $\mathfrak{F}_d$ – множество всех d-мерных вероятностных распределений, $E_{\mathbf{a}} \in \mathfrak{F}_d$ – распределение, сосредоточенное в точке $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$, $E = E_{\mathbf{0}}$, где символом $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^d$ обозначен нулевой вектор. Например, введенные выше меры $m_{\mathbf{X}}$ и $m_{\mathbf{Y}}$ могут быть записаны в виде $m_{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{n} E_{X_i}$ и $m_{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^{\eta} E_{Y(i)}$.

Аппроксимация распределения $G_{\mathbf{f}}$ с помощью распределения $H_{\mathbf{f}}$ имеет непосредственное отношение к задаче об аппроксимации распределений сумм независимых случайных векторов с помощью безгранично делимых законов. Эта задача была впервые рассмотрена в 50-е годы прошлого столетия в работах А. Н. Колмогорова [26] и [27]. Колмогоров предложил вместо аппроксимации последовательности распределений сумм индивидуальным предельным распределением использовать целые семейства приближающих законов. Ю. В. Прохоров [38] доказал, что для любого одномерного распределения B можно построить такую последовательность безгранично делимых распределений D_n, что $\rho(B^n, D_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то есть

$$\rho(B^n, \mathfrak{D}_1) = \inf_{D\in\mathfrak{D}_1} \rho(B^n, D) \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty, \tag{5}$$

где $\mathfrak{D}_d$ – множество d-мерных безгранично делимых законов. Принципиальный шаг вперед сделал А. Н. Колмогоров [27]. Он доказал, что сходимость в (5) равномерна по классу $\mathfrak{F}_1$ всех одномерных вероятностных распределений, получив оценку

$$\omega_1(n) = \sup_{B \in \mathfrak{F}_1} \rho(B^n, \mathfrak{D}_1) \le cn^{-1/5}.$$

В дальнейшем эта функция оценивалась в работах Ю. В. Прохорова, Л. Д. Мешалкина, Ф. М. Кагана, А. Н. Колмогорова, Л. Ле Кама, И. А. Ибрагимова и Э. Л. Пресмана (см. библиографию в [4]). Окончательные по порядку оценки принадлежат Т. Араку [2, 3]

$$c_1 n^{-2/3} \le \omega_1(n) \le c_2\, n^{-2/3}. \tag{6}$$

Многие авторы изучали поведение величины $\sup_{B \in \mathfrak{G}} \rho(B^n, \mathfrak{D}_1)$ для различных подклассов $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}_1$, см., например, библиографию в [16, 52]. В многомерном случае поведение величины $\omega_d(n) = \sup_{B \in \mathfrak{F}_d} \rho(B^n, \mathfrak{D}_d)$ изучали В. В. Сазонов и Э. Л. Пресман. Лучшая на сегодняшний день оценка принадлежит Пресману [36]: $\omega_d(n) \le c(d)\, n^{-1/3}$, обобщившему на многомерный случай результат А. Н. Колмогорова [28]. Следуя Ле Каму [30], Пресман использовал в качестве приближающих сопровождающие законы вида $E_{n\mathbf{a}}\, e\,(nBE_{-\mathbf{a}})$. Ранее Ле Кам [30] показал, что

$$\sup_{B \in \mathfrak{F}_1} \inf_{a \in \mathbf{R}} \rho(B^n, E_{na}\, e\,(nBE_{-a})) \le c\, n^{-1/3}, \tag{7}$$

передоказав тем самым результат А. Н. Колмогорова [28] $\omega_1(n) \le cn^{-1/3}$. И. А. Ибрагимов и Э. Л. Пресман [24] показали, что неравенство (7) справедливо с $c = 8$. Возвращаясь к формуле (4), и учитывая, что

$$\rho(B^n, E_{n\mathbf{a}}\, e\,(nBE_{-\mathbf{a}})) = \rho((BE_{-\mathbf{a}})^n, e\,(nBE_{-\mathbf{a}})),$$

мы видим, что если $d < \infty$ и случайные элементы $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены (то есть $F_1 = \dots = F_n = F$) с произвольным распределением F, а $\mathbf{f} : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$ – произвольное измеримое отображение, то существует такая неслучайная последовательность $\mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^d$, что

$$\rho_{\mathbf{f}-\mathbf{a}_n}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \le c(d)\, n^{-1/3}. \tag{8}$$

Примечательно в данном утверждении то, что $c(d)$ в неравенстве (8) зависит только от размерности d и не зависит от распределения F и отображения $\mathbf{f}$. Таким образом, при любых F и $\mathbf{f}$ можно так центрировать случайные векторы $\mathbf{f}(X_i)$ и $\mathbf{f}(Y^{(i)})$, что

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d}\left|\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{f}(X_i)-\mathbf{a}_n)\le\mathbf{x}\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{\eta}\Big(\mathbf{f}(Y^{(i)})-\mathbf{a}_n\Big)\le\mathbf{x}\right\}\right| \le c(d)\,n^{-1/3}. \quad (9)$$

Это означает, что при изучении вероятностей событий вида (3) мы вполне можем заменить выборку $\mathbf{X}=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ пуассоновским точечным процессом $\mathbf{Y}=\{Y^{(1)},Y^{(2)},\dots,Y^{(\eta)}\}$, если нам известны векторы $\mathbf{a}_n$ и нас устраивает погрешность аппроксимации вида $c(d)\,n^{-1/3}$. Заметим, что для справедливости неравенства (8) существенно наличие центрирования суммируемых векторов неслучайными векторами $\mathbf{a}_n$. Если, например, $d=1$ и функция $\mathbf{f}$ – ненулевая константа, то есть $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_1))=E_a$, и $a\ne0$, то $G_{\mathbf{f}}=E_{na}$, а $H_{\mathbf{f}}=e\,(nE_a)=\mathcal{L}(a\eta)$. Ясно, что в этом случае $\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\geqslant c$. Аналогичная ситуация имеет место и в многомерном случае: $\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\geqslant c$ если $1<d<\infty$ и хотя бы одна координата вектора $\mathbf{f}(X_1)$ с вероятностью единица равна некоторому фиксированному числу $a\ne0$.

Постоянные $\mathbf{a}_n$, фигурирующие в неравенстве (8), зависят от F и $\mathbf{f}$ и представляют собой средние значения условных распределений $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_1)\,|\,\mathbf{f}(X_1)\in I_n)$, где I_n – подходящим образом выбранные ограниченные отрезки. Необходимость центрирования снижает, разумеется, ценность рассматриваемой нами аппроксимации. Поэтому особый интерес представляют оценки точности аппроксимации сверток сопровождающими законами, в определении которых центрирование отсутствует, то есть $\mathbf{a}_n=0$. Получив в работе [30] неравенство (7), Ле Кам рассмотрел также вопрос о возможности оценить величину $\rho(B^n,e\,(nB))$. Он получил оценку для случая неодинаково распределенных слагаемых, оценив в одномерном случае величину $\rho(\prod_{i=1}^n B_i,\prod_{i=1}^n e\,(B_i))$. Теорема 5 [30] или Теорема 2 [31, с. 431] дают оценки, учитывающие возможную малость центрирующих констант, возникающих при аппроксимации сопровождающими законами с центрированием. К сожалению, из этих результатов не вытекают правильные по порядку оценки, равномерные по широким классам центрированных распределений (см. (11)–(16)). В той же работе [30] Ле Кам показал, что (при $d=1$ и произвольных $V_i \in \mathfrak{F}_1$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$)

$$\rho\left(\prod_{i=1}^{n}((1-p_i)E+p_iV_i), \prod_{i=1}^{n} e\,(p_iV_i)\right) \le c \max_{1\le i\le n} p_i^{1/3}. \tag{10}$$

Очевидно, что $e\,(p_iV_i) = e\,((1-p_i)E+p_iV_i)$. Таким образом, аппроксимация сопровождающими законами без центрирования дает хорошее приближение, если суммируются независимые случайные величины, каждая из которых равна нулю с вероятностью близкой к единице. Ниже мы вернемся к обсуждению этого результата.

Неравенства (7)–(9) были уточнены и обобщены для аппроксимации без центрирования в тех случаях, когда независимые одинаково распределенные случайные векторы $\mathbf{f}(X_i)$ имеют нулевые математические ожидания или когда они симметрично распределены (то есть $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_i)) = \mathcal{L}(-\mathbf{f}(X_i)) \in \mathfrak{F}_d^s$) В работах автора [43] (при $d=1$) и [46] (при $1 \le d < \infty$) было показано, что

$$\sup_{B\in\mathfrak{F}_d^s} \rho(B^n, e\,(nB)) \le c(d)\, n^{-1/2}. \tag{11}$$

Заметим, что несколько ранее И. А. Ибрагимов и Э. Л. Пресман [24] получили при $d=1$ аналог неравенства (11) с дополнительным логарифмическим множителем.

Если дополнительно предположить, что характеристическая функция $\widehat{B}(\mathbf{t})$ симметричного распределения $B \in \mathfrak{F}_d^s$ неотрицательна, $\widehat{B}(\mathbf{t}) \ge 0$ при всех $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^d$, то

$$\rho(B^n, e\,(nB)) \le c(d)\, n^{-1} \tag{12}$$

(Т. Арак [1] (при $d=1$) и автор [48] (при $1 \le d < \infty$)). Более того, если предположить, что $\alpha > 0$ и $\widehat{B}(\mathbf{t}) \ge -1+\alpha$ при всех $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^d$, то

$$\rho(B^n, e\,(nB)) \le c(d)\left(n^{-1} + \exp\left(-n\alpha + cd\log^3 n\right)\right) \tag{13}$$

(автор [48], см. также В. Чяканавичюс [13]).

Если же предположить, что $B \in \mathfrak{F}_1$, $\int |x|^{3/2}\, B\{dx\} < \infty$ и $\int x B\{dx\} = 0$, то

$$\rho(B^n, e\,(nB)) \le c(B)\, n^{-1/2}. \tag{14}$$

(автор [52]). Более того, в той же работе автора [52] было показано, что

$$\rho(B^n, e\,(nB)) = o(n^{-1/2}), \tag{15}$$

если $\int |x|^\beta \, B\,\{dx\} < \infty$ при некотором $3/2 < \beta < 2$, $\int xB\{dx\} = 0$, и $\int x^2\, B\{dx\} = \infty$.

Оценки близости значений распределений B^n и $e\,(nB)$ на эллипсоидах в гильбертовом пространстве при $\int xB\{dx\} = \mathbf{0}$ были получены С. В. Нагаевым [33, 34] и В. Бенткусом, Ф. Гетце и автором [10]. С. В. Нагаев [33, 34] получил оценки порядка $O(n^{-1/2})$, предполагая, что $\int \|x\|^2 \, B\{dx\} < \infty$, а в работе [10] содержатся оценки порядка $O(n^{-1})$, при $\int \|x\|^{8/3} \, B\{dx\} < \infty$.

Следующий результат представляет собой частный случай основного результата работы автора [47], см. также [53]. Пусть распределение $F \in \mathfrak{F}_d$ представлено в виде смеси

$$F = (1-p)U + pV,$$

где $U, V \in \mathfrak{F}_d$,

$$0 \le p \le 1, \qquad \int x\, U\{dx\} = \mathbf{a}, \qquad U\left\{\left\{x \in \mathbf{R}^d : \|x - \mathbf{a}\| \le \tau\right\}\right\} = 1,$$

а распределение V произвольно. Тогда для любого $\lambda > 0$ и любого натурального n можно так построить на одном вероятностном пространстве случайные векторы ξ и η, чтобы

$$\mathbf{P}\left\{\|\xi - \eta\| > \lambda\right\} \le c(d)\,\left(p + \exp\left(-\frac{\lambda}{c(d)\tau}\right)\right) \tag{16}$$

и

$$\mathcal{L}(\xi) = \left(FE_{-\mathbf{a}}\right)^n, \qquad \mathcal{L}(\xi) = e(nFE_{-\mathbf{a}}),$$

где $c(d)$ зависит только от d.

Для других метрик точность аппроксимации сверток неодинаковых распределений сопровождающими законами изучалась, например, в работах [5, 9, 40]. Следует особо упомянуть работы, в которых применялся метод Стейна–Чена при аппроксимации пуассоновскими точечными процессами выборок, составленных даже из зависимых наблюдений, см. [5, 7, 8, 9, 17, 41]. Впрочем, метод Стейна–Чена применяется пока для исследования близости только решетчатых распределений.

Ясно, что перечисленные выше неравенства (11)–(16) обеспечивают справедливость соответствующих аналогов неравенства (8). Например, неравенство (11) влечет, что если $d < \infty$ и случайные элементы $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены, а $\mathbf{f} : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$ – такое измеримое отображение, что распределение $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_1))$ симметрично, то

$$\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \le c(d)\, n^{-1/2}.$$

Тем самым, при дополнительных предположениях на распределение $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_1))$ (см. (11)–(16)), утверждение (8) может быть существенно усилено и уточнено. Для произвольных же измеримых отображений $\mathbf{f} : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$ вероятности событий (3) хорошо аппроксимируются вероятностями событий

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\eta} \Big(\mathbf{f}(Y^{(i)}) - \mathbf{a}_n \Big) \le \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_n \right\},$$

где $\mathbf{a}_n$ – неслучайные векторы, зависящие от $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_1))$.

Точность аппроксимации в неравенствах (11)–(15) может быть значительно увеличена, если вместо сопровождающих законов использовать близкие к ним по виду преобразований Фурье знакопеременные безгранично делимые заряды (signed compound Poisson approximation). К настоящему времени (в основном В. Чяканавичюсом) получено большое количество содержательных результатов, как правило – в одномерном случае (см. работы [13, 14, 15, 16, 23] и библиографию в них).

Формулировки большинства результатов об аппроксимации сверток неодинаковых распределений сопровождающими законами существенно используют индивидуальное центрирование каждого распределения. Фактически оцениваются величины типа $R\left(\prod_{i=1}^{n} (F_i E_{-\mathbf{a}_i}), \prod_{i=1}^{n} e\,(F_i E_{-\mathbf{a}_i})\right)$, где центрирующие векторы $\mathbf{a}_i$ вообще говоря различны для разных F_i (если конечно на распределения F_i не наложены условия, обеспечивающие совпадение $\mathbf{a}_i$). Тем самым, такие результаты не могут быть интерпретированы как результаты о близости точечных процессов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. То же самое можно сказать и об аппроксимации сверток другими безгранично делимыми законами, например – безгранично делимыми зарядами (см., например, работы [13, 14, 15, 16, 23] и библиографию в них), законами с нетривиальными гауссовскими компонентами (см. [45, 47, 50]) или законами, обеспечивающими справедливость аппроксимации Арака (6). Точнее, результат Арака обеспечивает для любого натурального n, любого одномерного распределения $F = \mathcal{L}(X_i) \in \mathfrak{F}_1$, $i = 1, \dots, n$, и любой измеримой функции $\mathbf{f} : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}$ существование такого пуассоновского точечного процесса $\mathbf{Z} = \left\{Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(\zeta)}\right\}$ и такой центрирующей постоянной a_n, что

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}(X_i) - a_n) \le x\right\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{\zeta} \Big(\mathbf{f}(Z^{(i)}) - a_n\Big) \le x\right\}\right| \le cn^{-2/3}.$$

Но при этом процесс $\mathbf{Z}$ существенно зависит от распределения $\mathcal{L}(\mathbf{f}(X_1))$, в отличие от процесса $\mathbf{Y}$, дающего хорошую аппроксимацию одновременно для широких классов отображений $\mathbf{f}$.

В заключение мы рассмотрим схему независимых неодинаково распределенных редких событий, которая, будучи фактически частным случаем первоначально рассмотренной нами ситуации, допускает содержательные оценки без дополнительного центрирования для по существу произвольных отображений $\mathbf{f}$.

Будем говорить, что X_i описывают редкие события, если с вероятностью близкой к единице они принимают выделенное значение, обозначенное символом $\mathbb{O}$. При $X_i = \mathbb{O}$ считается, что редкое событие с номером i не произошло. Обозначим $p_i = \mathbf{P}\{X_i \ne \mathbb{O}\}$. Нетрудно видеть, что распределение $\mathcal{L}(X_i)$ случайного элемента X_i можно записать в виде

$$\mathcal{L}(X_i) = (1 - p_i)\mathbb{E} + p_i\mathbb{V}_i,$$

где $\mathbb{E}$ – распределение, сосредоточенное в точке $\mathbb{O}$, а $\mathbb{V}_i$ – условное распределение X_i при условии, что соответствующее редкое событие произошло. В данной модели естественно интересоваться распределениями случайных векторов $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(X_i)$ только для тех $\mathbf{f} : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$, которые удовлетворяют соотношению $\mathbf{f}(\mathbb{O}) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^d$. Ведь если редкое событие с номером i не произошло, его вклад в сумму $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(X_i)$ должен быть нулевым. Обозначим через $\mathbb{F}_d$ множество таких $\mathbf{f}$.

Пусть $V_i \in \mathfrak{F}_d$ – произвольные d-мерные распределения. В работе автора [47] было уточнено неравенство Ле Кама (10) и показано, что

$$\rho\left(\prod_{i=1}^{n}\left((1-p_i)E+p_iV_i\right),\prod_{i=1}^{n}e\left(p_iV_i\right)\right)\le c(d)\max_{1\le i\le n}p_i. \tag{17}$$

Ранее неравенство (17) было получено в одномерном случае в [44]. В работе [49] можно найти уточнения неравенств (13) и (17), содержащие оценки близости значений распределений на выпуклых многогранниках. Следует упомянуть также результаты К. Хиппа [22], оценившего в одномерном случае левую часть неравенства (17) несколько в иных терминах.

Согласно (17), для рассмотренной нами схемы редких событий

$$\sup_{\mathbf{f}\in\mathbb{F}_d}\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\le c(d)\max_{1\le i\le n}p_i. \tag{18}$$

Величина $c(d)$ в неравенстве (18) зависит только от размерности d и не зависит от распределений $\mathbb{V}_i$, вероятностей p_i и отображения $\mathbf{f}$. Таким образом, при любых p_i, $\mathbb{V}_i$ и $\mathbf{f}\in\mathbb{F}_d$ мы имеем

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d}\left|\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}(X_i)\le\mathbf{x}\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{\eta}\mathbf{f}(Y^{(i)})\le\mathbf{x}\right\}\right|\le c(d)\max_{1\le i\le n}p_i. \tag{19}$$

Это означает, что при изучении вероятностей событий вида (3) выборка $\mathbf{X}=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ может быть заменена пуассоновским точечным процессом $\mathbf{Y}=\left\{Y^{(1)},Y^{(2)},\dots,Y^{(\eta)}\right\}$, если величина $\max_{1\le i\le n}p_i$ достаточно мала. Другими словами, если рассматриваемые нами редкие события достаточно редки. Заметим, что в отличие от (8), для справедливости неравенства (18) не требуется центрирования суммируемых векторов постоянными $\mathbf{a}_n$.

Неравенство (18) показывает, что различные выборки, составленные из редких событий вида $\mathbf{X}=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ с равномерно малыми p_i, оказываются близки друг к другу, если у них совпадают (или близки) меры $\sum_{i=1}^{n}p_i\mathbb{V}_i$. Ведь тогда у них совпадают (или близки) приближающие пуассоновские точечные процессы $\mathbf{Y}$.

В случае одинаковых распределений V_i неравенство (17) может быть существенно уточнено и усилено. Даже расстояние по вариации $d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{n}\left((1-p_i)E+p_iV\right),\prod_{i=1}^{n}e\left(p_iV\right)\right)$ оценивается через $c\max_{1\le i\le n}p_i$ (Ю. В. Прохоров [37], случай одинаковых p_i; Ле Кам [29], случай произвольных p_i) и, более того, через

$\sum_{i=1}^n p_i^2/\max\{1, \sum_{i=1}^n p_i\}$ (Барбур и Холл [6]), см. также [12, 18, 42]. Тем самым, существенно усиливается и утверждение о близости рассматриваемых нами процессов. Однако условие одинаковой распределенности редких событий выполняется далеко не всегда. Редкие события подобны чрезвычайным происшествиям, каждое из которых уникально и имеет свое индивидуальное распределение. Таким образом, неравенства (18) и (19) могут быть полезны, например, в страховом деле при оценивании вероятности того, что суммарные воздействия факторов риска f_i не превзойдут фиксированных критических значений x_i (см., например, [19, 20, 22, 23, 32, 35]).

Литература

1. Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **25** (1980), 225–246.
2. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I; II.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **26** (1981), 225–245; 449–463.
3. Т. В. Арак, *Уточнение нижней оценки для скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **27** (1982), 767–772.
4. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Труды МИАН **174** (1986).
5. A. D. Barbour, L. H. Y. Chen and W. L. Loh, *Compound Poisson approximation for nonnegative random variables via Stein's method.* — Ann. Probab. **20** (1992), 1843–1866.
6. A. D. Barbour and P. Hall, *On the rate of Poisson convergence.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95** (1984), 473–480.
7. A. D. Barbour, L. Holst and S. Jansson, *Poisson Approximation.* Oxford University Press.
8. A. D. Barbour and O. Chryssaphinou, *Compound Poisson approximation: a user's guide.* — Ann. Appl. Probab. **11** (2002), 964–1002.
9. A. D. Barbour and V. Čekanavičius, *Total variation asymptotics for sums of independent integer random variables.* — Ann. Probab. **30** (2002), 509–545.
10. V. Bentkus, F. Götze and A. Yu. Zaitsev, *Approximation of quadratic forms of independent random vectors by accompanying laws.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **42** (1997), 308–335.
11. I. Borisov, *Moment inequalities connected with accompanying Poisson laws in Abelian groups.* Preprint, 2002.
12. И. С. Борисов, *Пуассоновская аппроксимация процесса частных сумм в банаховых пространствах.* — Сиб. Матем. Журнал **37**, № 4 (1996), 723–731.

13. В. Чяканавичюс, *Аппроксимация сопровождающими законами и асимптотические разложения. I.* — Литовский Матем. Журн. **29** (1989), 171–178.
14. V. Čekanavičius, *Bergström-type asymptotic expansions in the first Kolmogorov's uniform limit theorem.* — В кн.: Probab. Theory and Math. Statist. (ред. B. Grigelionis et al., eds.), VSP/TEV, 1994, с. 223–238.
15. V. Čekanavičius, *On multivariate Le Cam theorem and compound Poisson measures.* — Statist. Probab. Letters **28** (1996), 33–39.
16. V. Čekanavičius and Y. H. Wang, *Compound Poisson approximation for sums of discrete nonlattice random variables.* — Adv. Appl. Probab. **35** (2003), 228–250.
17. L. H. Y. Chen, *On the convergence of Poisson binomial to Poisson distribution.* — Ann. Probab. **2** (1974), 178–180.
18. P. Deheuvels and D. Pfeifer, *Poisson approximation of multinomial distributions and point processes.* — J. Multivar. Anal. **25** (1988), 65–89.
19. H. U. Gerber, *Error bounds for compound Poisson approximation.* — Insurance: Mathematics and Economics **3** (1984), 191–194.
20. H. U. Gerber, *An introduction to mathematical risk theory.* Huebner Foundation Monograph, 1981.
21. E. Giné, D. M. Mason and A. Yu. Zaitsev, *The L_1-norm density estimator process.* — Ann. Probab. **31** (2003), 719–768.
22. C. Hipp, *Approximation for the aggregate claim distributions by compound Poisson distributions.* — Insurance: Mathematics and Economics **4** (1985), 227–232.
23. C. Hipp, *Improved approximations of aggregate claim distributions in the individual model.* — ASTIN Bull. **16** (1987), 89–100.
24. И. А. Ибрагимов, Э. Л. Пресман, *О сближении распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **18** (1973), 753–766.
25. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы.* Москва, Наука, 1982.
26. А. Н. Колмогоров, *Некоторые работы последних лет в области теории вероятностей.* — Вестник МГУ **7**, № 10 (1953), 29–38.
27. А. Н. Колмогоров, *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **1** (1956), 426–436.
28. А. Н. Колмогоров, *О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями.* — Труды Московск. Матем. Об-ва **12** (1963), 437–451.
29. L. Le Cam, *An approximation theorem for Poisson binomial distribution.* — Pacific J. Math. **10** (1960), 1181–1197.
30. L. Le Cam, *On the distribution of sums of independent random variables.* — В кн.: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume). Berlin, Springer, 1965, с. 179–202.
31. L. Le Cam, *Asymptotic methods in statistical decision theory.* NewYork, Springer, 1986.
32. R. Michel, *An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearly homogeneous portfolio.* — ASTIN Bull. **17** (1988), 165–169.

33. S. V. Nagaev, *Concentration functions and approximation with infinitely divisible laws in Hilbert space.* Sonderforschungsbereich 343, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Preprint 90–094, Bielefeld, 1990.
34. С. В. Нагаев, *Функции концентрации и точность приближения безгранично делимыми законами в гильбертовом пространстве.* — Доклады РАН **359** (1998), 461–463.
35. H. H. Panjer and G. E. Willmot, *Compound Poisson models in actuarial risk theory.* — J. Econometrics **23** (1983), 63–76.
36. Э. Л. Пресман, *О многомерном варианте равномерной предельной теоремы Колмогорова.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **18** (1973), 396–402.
37. Ю. В. Прохоров, *Асимптотическое поведение биномиального распределения.* — Успехи Матем. Наук **8**, № 3 (1953), 135–142.
38. Ю. В. Прохоров, *О суммах независимых случайных величин.* — Доклады АН СССР **105** (1955), 645–647.
39. R. Pyke and G. R. Shorack, *Weak convergence of a two-sample empirical process and a new approach to Chernoff–Savage theorems.* — Ann. Math. Statist. **39** (1968), 755-771.
40. S. T. Rachev and L. Rüschendorf, *Approximation of sums by compound Poisson distributions with respect to stop-loss distances.* — Adv. Appl. Probab. **22** (1990), 350–374.
41. B. Roos, *Stein–Chen method for compound Poisson approximation: the coupling approach.* — В кн.: Probability Theory and Mathematical Statistics (ред. B. Grigelionis et al., eds.), VSP/TEV, 1994, с. 645–660.
42. B. Roos, *Sharp constants in the Poisson approximation.* — Statist. Probab. Letters **52** (2001), 155–168.
43. А. Ю. Зайцев, *Некоторые свойства n-кратных сверток распределений.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **26** (1981), 152–156.
44. А. Ю. Зайцев, *О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **28** (1983), 625–636.
45. А. Ю. Зайцев, *О равномерной аппроксимации функций распределения сумм независимых случайных величин.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **32** (1987), 45–52.
46. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the closeness of successive convolutions of multidimensional symmetric distributions.* — Probab. Theory Related Fields **79** (1988), 175–200.
47. А. Ю. Зайцев, *Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова.* — Теор. Вероятн. и ее Примен. **34** (1989), 108–128.
48. А. Ю. Зайцев, *Аппроксимация сверток многомерных симметричных распределений сопровождающими законами.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **177** (1989), 55–72.
49. А. Ю. Зайцев, *Об одном классе неравномерных оценок в многомерных предельных теоремах.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **184** (1990), 92–105.
50. А. Ю. Зайцев, *Аппроксимация сверток вероятностных распределений безгранично делимыми законами при ослабленных моментных ограничениях.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **194** (1992), 79–90.

51. А. Ю. Зайцев, *Неустойчивость обращения преобразования Радона.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **216** (1994), 76–85.
52. А. Ю. Зайцев, *Аппроксимация сверток сопровождающими законами при существовании моментов невысокого порядка.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **228** (1996), 135–141.
53. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the strong approximation in multidimensional central limit theorem.* — В кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002) . Beijing, Higher Ed. Press, 2002, с. 107–116.

Zaitsev A. Yu. On approximation of the sample by a Poisson point process.

It is shown that the results obtained earlier for the rate of approximation of convolutions of probability distributions by accompanying infinitely divisible laws may be interpreted as estimates of the rate of approximation of the sample by a Poisson point process. The most interesting results are obtained for a scheme of rare events.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 22 июня 2003 г.