Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

А. В. Либер, О. В. Русаков

О СЛУЧАЙНЫХ ЛОМАНЫХ, СЛАБО СХОДЯЩИХСЯ К ДРОБНОМУ ПРОЦЕССУ ОРНСТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

0. Введение

Известно, что стандартный процесс Орнстейна–Уленбека (стационарный, гауссовский, марковский процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и экспоненциально убывающей ковариацией) получается из обыкновенного броуновского движения путем экспоненциальной замены времени $U(t) = \exp\{-\beta t\}W(\exp\{2\beta t\})$, где $\beta > 0$ – масштабный временной коэффициент, называемый *вязкостью.*

При применении аналогичной замены времени к дробному броуновскому движению (с показателем дробности $h \in (0,2)$), то есть к центрированному гауссовскому процессу, стартующему из нуля и обладающему ковариационной функцией

$$\operatorname{cov}\left(W^{(h)}(s), W^{(h)}(t)\right) = \frac{1}{2}\left(|t|^h + |s|^h - |t-s|^h\right),$$

получается стационарный центрированный гауссовский процесс $u^{(h)}(t) = \exp\{-\beta t\, h\}W^{(h)}(\exp\{2\beta t\})$, с ковариационой функцией

$$B_h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-h\beta t} + e^{h\beta t} - |\, e^{\beta t} - e^{-\beta t}|^h\right), \qquad (*)$$

который принято называть *дробным процессом Орнстейна–Уленбека* (см. [5, 6]).

В работе Ю. А. Давыдова (1970) [2] получены условия слабой сходимости к дробному броуновскому движению непрерывных случайных ломаных, построенных по нарастающим суммам стационарных последовательностей (в частности, при суммировании последовательностей скользящего среднего) с узлами, расположенными в соответствии с ростом дисперсии.

Работа поддержана грантом НШ-2258.2003.1.

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы получить результаты о сходимости к дробному процессу Орнстейна–Уленбека для подобного рода случайных ломаных.

В разделах 1–2 даются собственно условия сходимости к дробному процессу Орнстейна–Уленбека, полученные при эксплуатации подхода, описанного в работе [2].

В разделе 3 рассматривается последовательность скользящего среднего, построенная по последовательности Орнстейна–Уленбека. Последовательностью Орнстейна–Уленбека [стандартной] будем называть стационарную последовательность из стандартных нормальных величин с экспоненциально убывающей ковариацией. Последовательность Орнстейна-Уленбека может быть представлена в виде скользящего среднего по независимым стандартным нормальным случайным величинам.

Раздел 4 посвящен исследованию сходимости случайных ломаных к дробному броуновскому движению в случае, когда ломаные построены по дважды сглаженной последовательности скользящего среднего. В одном операторе сглаживания используются коэффициенты степенного вида, рассмотренные в работе [2] для сходимости к дробному броуновскому движению, другой оператор сглаживания с коэффициентами экспоненциального вида, которые требуются для задания последовательности Орнстейна–Уленбека. Устанавливается, что эти два оператора сглаживания коммутируют, тем самым снимается вопрос корректности с точки зрения предельных теорем определения дробного процесса Орнстейна–Уленбека как стационарное решение уравнения Ланжевена со случайной мерой, построенной по приращениям дробного броуновского движения [8, 7].

1. Конструкция ломаных, слабо сходящихся к дробному процессу Орнстейна–Уленбека

Рассматривается двусторонняя стационарная последовательность с монотонно возрастающей накопленной дисперсией. В зависимости от скорости роста накопленной дисперсии вычисляются узлы разбиения вещественной прямой для построения случайных ломаных. При условии сходимости к дробному процессу Орнстейна–Уленбека таким образом построенных случайных ломаных, даются необходимые условия на скорость роста накопленной дисперсии.

Через $(x) = x_t$ будем обозначать строго стационарный процесс с дискретным $(t \in \mathbb{Z})$ или непрерывным $(t \in \mathbb{R})$ временем. Определим "простые" накопленные (нарастающие) суммы, для дискретного и непрерывного времени, соответственно,

$$S_T = \sum_{t=1}^{T} x_t\,, \ \text{при}\, t \in \mathbb{Z}\,; \qquad\qquad S_T = \int_0^T x_t dt\,, \ \text{при}\, t \in \mathbb{R}\,,$$

полагая, $S_0 = 0$. Вообще, сумма по пустому множеству будет предполагаться нулевой.

Для дисперсии простой нарастающей суммы будем предполагать строго монотонный рост

$$\mathbb{D}S_T \triangleq \psi(T) \uparrow \infty \qquad \text{при} \quad T \to \infty\,, \qquad T \in \mathbb{R}_+$$

что, например, выполняется при положительно коррелирующих членах стационарной последовательности (x_j).

Для случая дискретного времени случайные ломаные будем строить в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}_{[-N,N]}$. В этой связи определим "сдвинутые" нарастающие суммы

$$S_T(k) \triangleq \sum_{j=-T}^{k} x_j\,, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots \pm T\,. \tag{0}$$

Также введем обозначения для односторонних сумм, $S_T^- \triangleq \sum_{j=-T}^{-1} x_j = S_T(0)$ и $S_T^+ \triangleq \sum_{j=0}^{T} x_j$. Очевидно, $\mathbb{D}S_T^- = \psi(T)$.

Для случая дискретного времени определим случайные ломаные $X_T(t)$ линейной интерполяцией по узлам, вычисляемым в соответствии со скоростью роста дисперсии накопленной суммы

$$X_T(t) = \psi^{-1/2}(T)\left(S_T(k) + x_{k+1}\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\right),\ k = 0, \pm 1, \ldots \pm (T-1) \tag{1}$$

для $t \in [t_k, t_{k+1})$ и узлов

$$t_k \triangleq \frac{1}{\beta}\ln\frac{\psi(T+k)}{\psi(T)}, \qquad\qquad \beta > 0\,. \tag{1t}$$

Очевидно, что при таких обозначениях, $t_0 = 0$ и $\mathbf{D}X_T(0) = 1$.

Определим $N \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы с ростом T, начиная с некоторого, достаточно большого T_0, крайние узлы разбиения $\frac{1}{\beta}\ln\frac{\psi(1)}{\psi(T)}$ и $\frac{1}{\beta}\ln\frac{\psi(2T-1)}{\psi(T)}$ лежали вне пределов интервала $[-N, N]$.

Осуществляя сужение области определения построенных ломаных на компакт $[-N, N]$, получим ломаные $X_T(t)$, заданные как элементы пространства $\mathbf{C}_{[-N,N]}$.

Для случая непрерывного времени исходного процесса x_t аналогичным образом определим случайный процесс $X_T(t)$ с помощью замены времени

$$X_T(t) = \psi^{-1/2}(T) \int\limits_0^{g(t,T)} x_s ds\,, \qquad t \in [-N, N]\,, \tag{2}$$

где

$$g(t,T) \triangleq \psi^{-1}(e^{\beta t}\psi(T))\,. \tag{2t}$$

В этом случае из построения процесса $X_T(t)$ вытекает, что $\mathbb{D}X_T(t) = e^{\beta t}$. Также, в силу стационарности процесса x_t для приращений $X_T(t)$ выполняется следующее равенство по распределению

$$X_T(t) - X_T(s) \overset{d}{=} \frac{1}{\sqrt{\psi(T)}} \int\limits_0^{g(t,T)-g(s,T)} x_\tau d\tau. \tag{3}$$

Пусть $B_T(s,t)$ – корреляционная функция процесса $X_T(t)$, построенного по (1),(1т) или (2),(2т) в зависимости от контекста. Обозначим,

$\mathcal{P}_T$ – распределение в $\mathbf{C}_{[-N,N]}$, соответствующее $X_T(t)$;

$\mathcal{U}_\gamma$ – распределение, соответствующее центрированному гауссовскому процессу с ковариационнной функцией

$$B_\gamma(s,t) = \frac{1}{2}\left\{e^{\beta t} + e^{\beta s} - \left|e^{\frac{\beta t}{\gamma}} - e^{\frac{\beta s}{\gamma}}\right|^\gamma\right\}\,, \qquad \gamma \in (0,2) \tag{4}$$

(Вырожденный случай $\gamma = 2$ мы исключаем из рассмотрения.)

Слабую сходимость распределений будем обозначать значком $\Rightarrow$. Через $h(t)$ всюду в дальнейшем мы будем обозначать медленно меняющиеся на бесконечности (по Карамата) функции [4], возможно различные в разных местах текста.

Предложение 1. *Если $\mathcal{P}_T \Rightarrow \mathcal{U}_\gamma$ при $T \to \infty$, то $B_T(t,s) \to B_\gamma(t,s)$ поточечно, и $\psi(T) = T^\gamma h(T)$.*

2. Достаточные условия для слабой сходимости ломаных, построенных по процессу скользящего среднего

Рассмотрим процесс скользящего среднего (x), построенный по шуму (ξ), с квадратично суммируемыми весовыми коэффициентами $\sum c_k^2 < \infty$, $c_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$

$$x_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-j}\xi_k, \qquad j \in \mathbb{Z}\,, \tag{5}$$

где (ξ_k) – последовательность независимых одинаково распределенных величин с $\mathbb{E}\xi_k = 0$.

Используем обозначения, аналогичные предыдущим,

$(\mathcal{P}_n)$ – последовательность распределений в $\mathbf{C}_{[-N,N]}$ для случайных ломаных, построенных в соответствии с правилом построения (1)-(1т) по суммам $S_n(k)$ стационарной последовательности (5).

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $k \geqslant 2$ *существует момент* $\mathbb{E}|\xi_j|^{2k} < \infty$, *а дисперсия простой накопленной суммы по последовательности* (x), *определенной (5), имеет степенной рост* $\mathbb{D}S_n = n^\gamma h(n)$ *для* $2/(k+2) < \gamma < 2$.

Тогда имеет место слабая сходимость

$$\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{U}_\gamma, \qquad n \to \infty$$

Сходимость к дробному процессу Орнстейна–Уленбека.

Рассмотрим последовательность распределений $(\tilde{\mathcal{P}}_n)$ непрерывных случайных ломаных $\tilde{X}_n(t) \triangleq e^{-\beta t/2}X_n(t)$, построенных с теми же узлами (1т). Для них предельным распределением будет распределение $\tilde{\mathcal{U}}_\gamma$ процесса $e^{-\beta t/2}U_\gamma(t)$ (где $U_\gamma(t)$ процесс с распределением $\mathcal{U}_\gamma$, определенным (4)), т.е. гауссовского процесса с корреляционной функцией

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_\gamma(s,t) &\triangleq e^{-\beta(t+s)/2}B_\gamma(s,t) \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{\beta(t-s)/2} + e^{\beta(s-t)/2} - \left|e^{\frac{\beta(t-s)}{2\gamma}} - e^{\frac{\beta(s-t)}{2\gamma}}\right|^\gamma\right\} \\
&= \cosh\left(\frac{\beta}{2}|t-s|\right) - 2^{\gamma-1}\sinh^\gamma\left(\frac{\beta}{2\gamma}|t-s|\right), \qquad \beta > 0\,, \quad 0 < \gamma < 2
\end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, из теоремы 1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{E}|\xi_j|^{2k} < \infty$, $k \geqslant 2$, *а* $\mathbb{D}S_n = n^\gamma h(n)$, *для* $2/(k+2) < \gamma < 2$.

Тогда в $\mathbf{C}_{[-N,N]}$ *имеет место слабая сходимость*

$$\tilde{\mathcal{P}}_n \Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_\gamma\,, \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Несложно проверить, что после замены времени ($t := \gamma t$) *у процесса с распределением* $\tilde{\mathcal{U}}_\gamma$ *получается дробный процесс Орнстейна-Уленбека с ковариационной функцией* $(*)$.

3. Слабая сходимость для последовательностей скользящего среднего при стационарном шуме типа Орнстейна–Уленбека

Определение 3.1. *Стандартной последовательностью Орнстейна–Уленбека будем называть стационарную последовательность* (U_n), $n \in \mathbb{Z}$, *с распределением сечений* $\mathcal{N}(0,1)$ *и экспоненциально убывающей ковариацией,* $\mathbb{E}U_k = 0$, $\mathbb{E}U_iU_j = e^{-|i-j|}$ *(здесь выбран масштаб дискретного времени, дающий единичную вязкость).*

Стандартная последовательность Орнстейна–Уленбека может быть построена посредством следующего рекуррентного правила. Сначала произведем построение для целых неотрицательных значений временной переменной n.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – независимые стандартные нормальные $\mathcal{N}(0,1)$ величины.

(0) Положим, $U_0 = \xi_0$;

(1) $U_{n+1} = e^{-1}U_n + \left(1 - e^{-2}\right)^{1/2} \xi_{n+1}$.

Затем, применяя оператор сдвига необходимое количество раз, получаем последователь Орнстейна–Уленбека с начальным моментом времени в произвольной точке $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность (u_j), $j \in \mathbb{Z}$, построенную методом скользящего среднего с использованием в качестве шума [стандартной] последовательности Орнстейна-Уленбека:

$$u_j \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-j} U_k\,, \tag{7}$$

где коэффициенты (c_i) предполагаются неотрицательными и суммируемыми на плоскости с экспоненциальными весами,

$\sum_{i,j}^{\infty} c_i c_j e^{-|i-j|} < \infty$ (это условие будет, в частности, выполняться при $(c_i) \in l^1$).

Так как сама последовательность Орнстейна–Уленбека получена скользящим суммированием по независимым стандартным нормальным случайным величинам, то следующую последовательность (u_j), определенную (7), мы *называем дважды сглаженной*.

Рассмотрим случайные величины $\xi_i = (1 - e^{-2})^{-1/2} \cdot (U_i - e^{-1} U_{i-1})$. Легко видеть, что (ξ_i) , $i \in \mathbb{Z}$, составляют последовательность независимых стандартных нормальных $\mathcal{N}(0,1)$ случайных величин. Тогда U_i можно представить в виде

$$U_i = (1 - e^{-2})^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{i} \xi_j e^{j-i} \tag{7U}$$

Соответственно,

$$u_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-j} U_k \triangleq (1 - e^{-2})^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{k-j} \xi_k \,, \tag{8}$$

где $d_k = \sum_{i=k}^{\infty} c_k e^{k-i}$.

Легко проверить, что следующие ниже условия (и) и (ии) эквивалентны:

(i) $\sum_{i,j}^{\infty} c_i c_j e^{-|i-j|} < \infty$; **(ii)** $\sum_k^{\infty} d_k^2 < \infty$.

Пусть $(\mathcal{P}_n^u)$ – семейство распределений в $\mathbf{C}_{[-N,N]}$, соответствующее случайным ломаным, построенным по нарастающим суммам (S_n) стационарного процесса u и по узлам (1). Из условия (ии) и лемм теоремы 1 следует теорема.

Теорема 3. *Если* $\mathbb{D}S_n = n^\gamma h(n)$, *для* $0 < \gamma \leqslant 2$, *где* $h(n)$ – *медленно меняющаяся на бесконечности функция, то при* $n \to infty$ *имеет место слабая сходимость*

$$\mathcal{P}_n^u \Rightarrow \mathcal{U}_\gamma \,.$$

4. Слабая сходимость к ДБД дважды сглаженной последовательности скользящего среднего. Показательные и степенные весовые коэффициенты

В этом разделе рассматривается последовательность (u_j), полученная скользящим суммированием из стандартной последовательности Орнстейна–Уленбека. В работе [2] приводятся условия сходимости последовательностей скользящего среднего к дробному броуновскому движению для случая, когда шум представляет собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Затем там дается пример [основной], когда веса при суммировании имеют степенной вид. Цель этого раздела показать, что аналогичный результат имеет место и в случае, когда шум представляет собой последовательность Орнстейна–Уленбека.

Рассмотрим непрерывные ломанные $X_n(t)$, построенные на отрезке $[0, N]$ по нарастающим суммам $S_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$, стационарного процесса u, вида (7),

$$X_n(t) = \psi^{-1/2}(n)\left(S_k + u_{k+1}\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\right), \qquad t \in [t_k, t_{k+1}), \tag{9}$$

с узлами (t_k), определенными как в [2],

$$t_k = \left(\frac{\psi(k)}{\psi(n)}\right)^{1/\gamma}. \tag{9t}$$

Для соответствующих распределений $\{\mathcal{P}'_n\}$ в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}_{[0,N]}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если $\mathbb{D}S_n = n^\gamma h(n)$, $0 < \gamma \leqslant 2$, $h(n)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция, то $\mathcal{P'}_n \Rightarrow W_\gamma$, где W_γ – распределение, соответствующее гауссовскому процессу с нулевым средним и ковариационной функцией $K_\gamma(s,t) = \frac{1}{2}(s^\gamma + t^\gamma - |s-t|^\gamma)$, которая определяет гауссовский процесс, называемый дробным броуновским движением (дБд) с параметром Харста, равным $H = \gamma/2$.*

Пример 1. Показательные и степенные веса. Рассмотрим поведение дисперсии частичной суммы, которая в силу стационарности процесса Орнстейна–Уленбека представима в виде,

$$S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} u_i \stackrel{d}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \sum_{j=i}^{i+n-1} U_j .$$

В случае степенных коэффициентов $c_k = k^{-\alpha}$ при $k > 0$ и $c_k = 0$ при $k \leq 0$ для $\alpha = \frac{1}{2}(3 - \gamma)$ дисперсия накопленной суммы имеет вид $\mathbb{D}S_n = n^{-2\alpha+3}h(n)$.

Действительно. Представим дисперсию данной накопленной суммы через ковариации,

$$\mathbb{D}S_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_i c_j R_n(i-j), \tag{10}$$

где $R_n(i-j)$ – ковариации, которые, в силу стационарности процессов (u_j) и (U_j), имеют вид

$$R_n(i-j) = \operatorname{cov}\left(\sum_{k=i}^{i+n-1} U_k, \sum_{l=j}^{j+n-1} U_l\right). \tag{11}$$

Вычислим ковариацию $R_n(r)$. При $r > n$ получаем,

$$R_n(r) = e^{n-r} R_n(n) = e^{n-r-1} + 2e^{n-r-2} + \ldots$$

$$+ne^{-r} + (n-1)e^{-r-1} + \ldots + e^{-r-n+1} =$$

$$= e^{n-r}\left(\sum_{j=1}^{2n-1} je^{-j} - 2\sum_{i=r}^{n-1} ie^{-i}\right) = e^{n-r-1}\frac{\left(1-e^{-n}\right)^2}{\left(1-e^{-1}\right)^2}. \tag{12}$$

При $r \leqslant n$ ковариация выражается в виде суммы четырех слагаемых,

$$R_n(r) = \left(e^{n-r-1} + 2e^{n-r-2} + \ldots + (n-r-1)e^0\right)$$

$$+ \left(n-r)e^{-1} + \ldots e^{-r-n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=r}^{2n-1} ke^{r-k} - 2\sum_{k=1}^{n-1} ke^{-k-n+r} + \sum_{k=r}^{n-1} ke^{k-r} =$$

$$= (n-r)\frac{e+1}{e-1} + \frac{e^{r-n+1}}{(1-e)^2} - 2\frac{e^{-1-r}}{(1-e^{-1})^2} + \frac{e^{-1-r-2n}}{(1-e^{-1})^2} \tag{13}$$

Возьмем коэффициенты $c_i = \frac{1}{i^\alpha}$ при $i > 0$ и $c_i = 0$ при $i < 0$. Дисперсию запишем в виде $\mathbb{D}S_n = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, где слагаемые I_1–I_4 соответствуют слагаемым в (13), а I_5 соответствует (12). Оценим каждое из этих слагаемых,

$$I_1 = 2\frac{e+1}{e-1}\sum_{i=\infty}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \sum_{j=i}^{i+n-1} \frac{1}{j^\alpha}(n-j+i) = n^{-2\alpha+3}h(n),$$

$$I_2 = \frac{2}{(e-1)^2} \sum_{i=\infty}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \sum_{j=i}^{i+n-1} \frac{1}{j^\alpha} e^{(1-n+j-i)} \leqslant p_{-2\alpha+1}(n)h(n), \\ = n^{-2\alpha+1}h(n),$$

$$I_3 = \frac{-4}{(1-e^{-1})^2} \sum_{i=\infty}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \sum_{j=i}^{i+n-1} \frac{1}{j^\alpha} e^{(-1-j+i)} \leqslant p_{-2\alpha+2}(n)h(n), \\ = n^{-2\alpha+2}h(n),$$

$$I_4 = \frac{2}{(1-e^{-1})^2} \sum_{i=\infty}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \sum_{j=i}^{i+n-1} \frac{1}{j^\alpha} e^{(-j+i-n-1)} \leqslant n^{-2\alpha+1} e^{-n} h(n),$$

$$I_5 = \frac{2e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}(1-e^{-n})^2 \sum_{i=\infty}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \sum_{j=i+n}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} e^{(-j+i+n)} \leqslant n^{-2\alpha+1}h(n).$$

В результате совмещения оценок имеем равенство $\mathbb{D}S_n = n^{-2\alpha+3}h(n)$, откуда при $\gamma = 3-2\alpha$ получаем, что $\mathbb{D}S_n = n^\gamma h(n)$.

Также аналогичные оценки можно получить заметив, что $d_i = c_i h(i)$, где $h(i)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Непосредственно проверяется коммутативность используемых здесь двух операторов свертки, действующих на стационарные последовательности, – оператора свертки с показательными весами (7У) и оператора со степенными весами $\{c_i = \frac{1}{i^\alpha}\}$.

Предложение 2. *Пусть* (ξ_i) , $i \in \mathbb{Z}$, *– последовательность независимых стандартных нормальных* $\mathcal{N}(0,1)$ *случайных величин. Пусть* (Z_n) *– результат действия операторов скользящего среднего на последовательность* (ξ_1) *сначала со степенными весами* $c_k = k^{-\alpha}$, *а затем с показательными, соответствующими (7У),*

$$Z_n \triangleq \sum_{j=-\infty}^{n} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{(j-k)^\alpha} \xi_k e^{-\beta(n-j)} ,$$

а (Z'_n) *– наоборот, сначала с показательными весами, соответствующими (7У), а затем со степенными* $c_k = k^{-\alpha}$,

$$Z'_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{(j-n)^\alpha} \xi_k e^{-\beta(j-k)}$$

Тогда $\mathbb{D}Z_n = \mathbb{D}Z'_n$.

5. Доказательства

Доказательство предложения 1. Доказательство проведем для случая непрерывного времени.

Из построения процесса $X_T(t)$ вытекает, что $\mathbb{D}X_T(t) = e^{\beta t}$. В силу стационарности процесса x_t выполняется равенство по распределению (3). Из которого, при $T \to \infty$, следует сходимость дисперсий

$$\mathbb{D}\{X_T(t) - X_T(s)\} \to \left| e^{\frac{\beta t}{\gamma}} - e^{\frac{\beta s}{\gamma}} \right|^{\gamma}.$$

Таким образом, из того, что $2B_T(s,t) = \mathbb{D}X_T(t) + \mathbb{D}X_T(s) - \mathbb{D}\{X_T(t) - X_T(s)\}$ мы получаем предельное соотношение

$$\lim_{T\to\infty} B_T(t,s) = \frac{1}{2}\left\{ e^{\beta t} + e^{\beta s} - \left| e^{\frac{\beta t}{\gamma}} - e^{\frac{\beta s}{\gamma}} \right|^{\gamma} \right\}.$$

Для доказательства предложения осталось установить тот факт, что для любого фиксированного $t > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\psi(Tt)}{\psi(T)} = t^{\gamma}. \tag{14}$$

Сначала проверим выполнение соотношения (14) при t вида $1/r$, где r – целое. Начнем с $t = \frac{1}{2}$. Из (3) и из сходимости дисперсий следует, что при $T \to \infty$,

$$\mathbb{D}\left\{ X_T(0) - X_T\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\psi(T - g(1/2,T))}{\psi(T)} \to \frac{1}{2^{\gamma}}.$$

Поскольку $T/2$ лежит между $g(1/2,T)$ и $T - g(1/2,T)$, то, пользуясь монотонностью ψ и тем, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\psi(g(1/2,T))}{\psi(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{\psi(T - g(1/2,T))}{\psi(T)} = \frac{1}{2^{\gamma}},$$

получаем, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\psi(T/2))}{\psi(T)} = \frac{1}{2^{\gamma}}.$$

Теперь допустим, что соотношение (14) выполнено для $t = 1, \frac{1}{2}, , ..., \frac{1}{n-1}$. Рассуждая так же, как и в случае $t = \frac{1}{2}$ получим:

$$\frac{\psi(T - g(1/n,T))}{\psi(T)} \to \Big[\frac{n-1}{n}\Big]^{\gamma}.$$

А так как $\frac{(n-1)T}{n}$ лежит между $T - g(1/n, T)$ и $(n-1)g(1/n, T)$, то

$$\frac{\psi((n-1)T/n)}{\psi(T)} \to \left[\frac{n-1}{n}\right]^\gamma,$$

откуда следует, что при $T \to \infty$,

$$\frac{\psi(T/n)}{\psi(T)} = \frac{\psi(T/n)}{\psi((n-1)T/n)} \frac{\psi((n-1)T/n)}{\psi(T)} \to \frac{1}{n^\gamma}\,.$$

Таким образом, соотношение (14) доказано для чисел, обратных целым, а, следовательно, и для всех рациональных чисел. В силу монотонности ψ оно выполняется и для любого вещественного t.

Случай дискретного времени для (x) рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Доказательство разобьем на несколько лемм.

Введем обозначения. Пусть X – случайный процесс, заданный на некотором замкнутом интервале прямой A;

$(X_n(t))$ – случайные ломанные, построенные линейной интерполяцией по процессу X и некоторому набору узлов $\{t_{n,k}\}$, образующих разбиение компакта A (в качестве A будет выступать $[-N, N]$).

Обозначим, $(\mathcal{X}_n)$ – распределения в $\mathbf{C}(A)$, соответствующие случайным ломаным $(X_n(t))$.

Пусть $\tilde{A}$ – подмножество A, а f – непрерывное отображение $\tilde{A}$ в компактное подмножество прямой $B : B \subseteq A$. Рассмотрим прообразы узлов разбиения $\tau_{n,k} = f^{-1}(t_{n,k})$. Пусть $Y_n(t)$ – случайные ломанные, построенные по значениям процесса X в узлах $\{\tau_{n,k}\}$.

Обозначим $(\mathcal{Y}_n)$ – распределения в $\mathbf{C}(A)$, порожденные случайными ломаными и $Y_n(t)$.

Лемма 1. *Предположим, что выполнены следующие условия*

1) $\max\limits_k |t_{n,k+1} - t_{n,k}| \to 0$, *при* $n \to \infty$*;*

2) *последовательность* $(\mathcal{X}_n)$ *слабо компактна.*

Тогда последовательность $(\mathcal{Y}_n)$ *также слабо компактна.*

Доказательство. Пусть $g(h)$ – модуль непрерывности функции f, то есть $|f(\tau') - f(\tau'')| \leqslant g(h)$ при $|\tau' - \tau''| < h$, и $g(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Так как при всех достаточно больших n, обусловленных условиями 1),2) настоящей леммы, имеют место оценки,

$$\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|Y_n(t')-Y_n(t'')|\leqslant \max_{|t_{n,k}-t_{n,l}|\leqslant g(h)}|X_n(t_{n,k})-X_n(t_{n,l})|+$$

$$+2\max_k|X_n(t_{n,k+1})-X_n(t_{n,k})|\leqslant 3\sup_{|t'-t''|\leqslant g(h)}|X_n(t')-X_n(t'')|,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h}|Y_n(t')-Y_n(t'')|>\epsilon\}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{|t'-t''|\leqslant g(h)}|X_n(t')-X_n(t'')|>\epsilon/3\}$$

Так как любой модуль непрерывности является монотонно неубывающей функцией, то получаем требуемое.

Замечание к лемме 1. Для наших целей в качестве f следует выбрать функцию $f(x)\equiv f_{\gamma;\beta}\equiv\frac{1}{\beta}\ln(x^{1/\gamma})$, и компактом B будет отрезок $[\frac{1}{\beta}\ln\frac{\psi(1)}{\psi(T)},0]$.

Лемма 2. *Пусть существует* $n_0>0$ *такое, что для всех* $n>n_0$ *существуют константы* $C>0$ *и* $\delta>\frac{2}{\gamma}-2$ *такие, что последовательность накопленных сумм* (S_n)*, построенная по некоторой стационарной последовательности* (x_j)*, удовлетворяет соотношениям:*

1) $\mathbb{D}S_n=n^\gamma h(n)$,

2) $\mathbb{E}|S_n|^{2+\delta}\leqslant C\cdot(\mathbb{D}S_n)^{1+\delta/2}$,

для некоторой медленно меняющейся (по Карамата) на бесконечности функции $h(n)$.

Тогда последовательность $(\mathcal{P}_n)$*, построенная по узлам* (1), (1т)*, слабо компактна.*

Доказательство. Рассмотрим $Y_n(t)$ – непрерывную ломаную, построенную линейной интерполяцией по последовательности (x_j) с равномерными узлами $t_{n,k}=k/n$, заданными на замкнутом симметричном интервале прямой $[-N,N]$;

$\mathcal{Q}_n$ – соответствующее этому равномерному разбиению распределение.

Тогда при некотором $c>0$, верно неравенство

$$\mathbb{E}|Y_n(t)-Y_n(s)|^{2+\delta}\leqslant c\mathbb{E}|S_{m_n}-S_{k_n}|^{2+\delta}/(\mathbb{D}S_n)^{1+\delta/2},$$

где $m_n \equiv m_n(s)$ и $k_n \equiv k_n(t)$ – натуральные числа, такие, что $s \in [m_n/n, (m_n+1)/n]$; $t \in [k_n/n, (k_n+1)/n]$. Отсюда, используя стационарность X_j, получим

$$\mathbb{E}|Y_n(t) - Y_n(s)|^{2+\delta} \leqslant C|t-s|^{\gamma(2+\delta)/2}.$$

Последовательность $\{\mathcal{P}_n\}$ слабо компактна, так как $\gamma(2+\delta)/2 > 1$. Применяя Лемму 1 для $f(x) = \frac{1}{\beta}\ln(x^{1/\gamma})$, получим слабую компактность семейства $\{\mathcal{P}_n\}$.

Лемма 3. *Если для последовательности накопленных сумм* (S_n), *построенной по некоторой стационарной последовательности* (x_j), $\mathbb{E}|S_n|^{2k} < \infty$, *то для некоторой постоянной* $C > 0$ *выполняется неравенство* $\mathbb{E}|S_n|^{2k} \leqslant C(\mathbb{D}S_n)^k$.

Доказательство. См. [2].

Лемма 4. *Пусть* $\mathbb{D}S_n = n^\gamma h(n)$, *где* $h(n)$ *– медленно меняющаяся (по Карамата) на бесконечности функция. Тогда для произвольного набора точек* $\{s_1, s_2, ..., s_k\}$ *из интервала* $[-N, N]$ *конечномерные распределения* $\mathcal{P}_n^{\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}}$ *случайных ломаных* (1), (1т) *сходятся к конечномерным распределениям центрированного гауссовского процесса с корреляционной функцией* $B_\gamma(t,s)$.

Доказательство. Доказательство стандартно, см. [1, 3].

Рассмотрим распределение $\mathcal{P}_n^{\{s_1,s_2,\ldots,s_k;\,\tau\}}$, образованное случайной величиной

$Z_n \equiv Z_n(k) = \sum_{i=1}^k X_n(s_i)\tau_i$ с векторнозначным параметром $\tau = (\tau_1, \ldots \tau_k) \in \mathbb{R}^k$.

Обозначим следующую целую часть, $m_j \equiv m_j(n) \equiv [ne^{\beta s_j/\gamma}], j = 1, \ldots, k$. Тогда, как легко видеть, $\mathbb{D}S_{m_j}/\mathbb{D}S_n \to e^{\beta s_j}$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$Z_n = (\mathbb{D}S_n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{k} \tau_j \sum_{i=1}^{m_j} x_i + R_n \,,$$

где $\mathbb{D}R_n \to 0$, при $n \to infty$. Введем Z'_n и для $l \in \mathbb{Z}$ коэффициенты $d_{l,n}$,

$$Z'_n \triangleq Z_n - R_n = (\mathbb{D}S_n)^{-1/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \tau_i \sum_{r=1}^{m_i} c_{l-r} \right) \xi_l \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{l,n} \xi_l,$$

которые представимы,

$$d_{l,n}=\sum_{i=1}^{k}\tau_i a_{i,l}^{(n)}\,; \qquad a_{i,l}^{(n)}\triangleq(\mathbb{D}S_n)^{-1/2}\sum_{r=1}^{m_i}c_{l-r}\,. \tag{15}$$

Пусть $\epsilon_n \to 0$, при $n\to\infty$. Возьмем последовательность серий независимых случайных величин $\{\eta_{n,1},...,\eta_{n,l_n}\}$, $n=1,2,...,$, вида

$$\eta_{n,1}=\sum_{|l|>N_0}d_{l,n}\xi_l,\quad \eta_{n,2}=d_{-N,n}\xi_{-N_0},\quad \eta_{n,3}=d_{1-N,n}\xi_{1-N_0},\quad \dots,$$

$$\eta_{n,l_n}=d_{N,n}\xi_{N_0}\,,$$

где (ξ_l) из (5). Натуральное $N_0\equiv N_0(\epsilon)$ таково, что $\sum\limits_{|l|>N_0}d_{l,n}^2<\epsilon_n$.

Такое N_0 найдется, поскольку

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l,n}^2\leqslant k(\mathbb{D}S_n)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2\mathbb{D}S_{m_j}<\infty$$

Проверим выполнение условия Линдеберга для величин $\eta_{n,1},...,$ η_{n,l_n}. Согласно, 18.6.4 [3], $d_{l,n}\leqslant a_n=O((\mathbb{D}S_n)^{-1/4})$ при $n\to infty$, поэтому,

$$\sum_{j=1}^{l_n}\int\limits_{|z|>\epsilon}z^2dP\{\eta_{n,j}<z\}\leqslant\epsilon_n+\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_{l,n}^2\int\limits_{|z|>\epsilon/a_n}z^2dP\{\xi_0<z\}=o(1)\,.$$

Следовательно, как Z_n, так и Z'_n, асимптотически нормальны с параметрами $(0,\sigma_{s;\tau})$,

$$\sigma_{s;\tau}=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}d_{l,n}^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{k}\tau_i\tau_jB_n(s_i,s_j).$$

Последнее равенство приводит к цели с помощью следующих выкладок:

$2B_n(s_i,s_j)=\mathbb{D}X_n(s_i)+\mathbb{D}X_n(s_j)-\mathbb{D}\{X_n(s_i)-X_T(s_j)\}$ и при $n\to\infty$ $\mathbb{D}X_n(s_i)\to e^{\beta s_i}$, а

$\mathbb{D}\{X_n(s_i)-X_n(s_j)\}\sim\mathbb{D}S_{|m_i-m_j|}/\mathbb{D}S_n\sim\left|e^{\beta s_i/\gamma}-e^{\beta s_j/\gamma}\right|^{\gamma}$, откуда следует,

$\sigma_{s;\tau}=\sum_{i,j=1}^{k}\tau_i\tau_jB_\gamma(s_i,s_j)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы вытекает непосредственно из лемм 2, 3 и 4.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* — Наука, М. (1977).
2. Ю. А. Давыдов, *Принцип инвариантности для стационарных процессов.* — Теор. Вер. Прим., **т.XV в.3** (1970), 498–509.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* — Наука, М. (1965).
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* — Мир, М. (1984).
5. O. E. Barndorff-Nielsen and Victor Perez-Abreu, *Stationary and Selfsimilar Processes Driven by Levy Processes.* — MaPhySto Research Report No.1, University of Aarhus, Denmark (1998), 21p.
6. J. W. Lamperti, *Semi-stable Stochastic Processes.* — Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 62–78.
7. M. Jakobsen and M. York, *Multi-self-similar Markov Processes on* $\mathbb{R}_+^n$ *and their Lamperti Representation.* — MaPhySto report, August 1 (2002), Aarhus, 31p.
8. F. Comte and E. Renault, *Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Model.* — Mathematical Finance, **Vol. 8**, No.4, 291–323.

Liber A. V., Rusakov O. V. On random broken lines weakly converging to fractional Ornstein–Uhlenbeck process.

The behavior of sequences of continuous broken lines corresponding to sums of stationary sequences is studied. Conditions of weak convergence of distributions of these broken lines to Gaussian processes of Ornstein–Uhlenbeck type and fractional Brownian movement type are established.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 сентября 2003 г.