Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

В. В. Петров

О РОСТЕ СУММ ИНДИКАТОРОВ СОБЫТИЙ

1. Введение

Пусть $A_1, A_2, \dots$ – произвольная последовательность событий на вероятностном пространстве (Ω, F, P). Пусть $I(A)$ – индикатор множества A точек $\omega \in \Omega$. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} I(A_k), \qquad M_n = \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{1}$$

В силу равенства $EI(A_k) = P(A_k)$ имеем $M_n = ES_n$. Согласно лемме Бореля–Кантелли, условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \tag{2}$$

необходимо для равенства $P(A_n\, i.o.) = 1$. Представляют интерес оценки роста сумм S_n почти наверное при $n \to \infty$ в терминах M_n при выполнении условия (2), означающего, что $M_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Некоторые оценки роста сумм S_n следуют непосредственно из известных общих теорем о росте сумм случайных величин почти наверное и о росте сумм измеримых функций почти всюду (см., например, [1–6]). Однако для сумм индикаторов событий могут быть получены более сильные результаты. В работе Филиппа [7] доказано следующее предложение. Если последовательность событий $A_1, A_2, \dots$ удовлетворяет условию

$$P(A_i A_k) \leqslant P(A_i)P(A_k) + c_{i-k} P(A_i) \tag{3}$$

для всех i, k, таких, что $i > k$, где $c_1, c_2, \dots$ – неотрицательные постоянные, и если $\sum c_n < \infty$, то

$$S_n = M_n + O(M_n^{1/2} (\log M_n)^{3/2+\delta}) \qquad \text{п. н.} \tag{4}$$

Работа была поддержана грантом РФФИ 02-01-00779 и грантом ведущих научных школ НШ-2258.2003.1.

для любого $\delta > 0$. Условие (3) выполнено, если

$$P(A_i A_k) \leqslant P(A_i)P(A_k) \quad (i \neq k). \tag{5}$$

Следовательно, последовательность попарно независимых событий $\{A_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы Филиппа. В силу известного результата Эрдеша и Реньи (см., например, [8, стр. 200]) условия (2) и (5) влекут за собой равенство $P(A_n i.o.) = 1$. Нетрудно показать, что последнее утверждение останется верным и при замене в нем условия (5) более слабыми условиями Филиппа. Цель настоящей работы – обобщение и усиление теоремы Филиппа.

2. Результаты

В дальнейшем Ψ_c будет обозначать множество функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\Sigma 1/(n\psi(n))$ сходится. Значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций $\psi(x)$. Примерами функций класса Ψ_c являются функции x^p и $(\log x)^{1+p}$ для любого $p > 0$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ – произвольная последовательность событий. Положим*

$$S_{m,n} = \sum_{k=m+1}^{n} I(A_k), \quad M_{m,n} = \sum_{k=m+1}^{n} P(A_k)$$

для $0 \leqslant m < n$, $S_n = S_{0,n}$, $M_n = M_{0,n}$. Пусть выполнены условия (2) и

$$\mathrm{Var} S_{m,n} \leqslant C M_{m,n} \tag{6}$$

для любых $m < n$ и всех достаточно больших n, где C – постоянная, не зависящая от m и n. Тогда

$$S_n = M_n + o((M_n \psi(\log M_n))^{1/2} (\log M_n)^{3/2}) \quad \text{п. н.} \tag{7}$$

для любой функции $\psi \in \Psi_c$.

Заметим, что оценка (4) следует из (7) при $\psi(x) = x^p$, $p > 0$. Несколько более сильная по сравнению с (4) оценка может быть получена из (7), например, при $\psi(x) = (\log x)^{1+p}$, $p > 0$.

Покажем, что если выполнено условие (3) и ряд Σc_n сходится, то выполнены неравенства (6) для любых m и n, таких, что $m < n$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Var} S_{m,n} &= ES^2_{m,n} - M^2_{m,n} = \Sigma_{m+1\leqslant i,k\leqslant n} P(A_iA_k) - M^2_{m.n}\\ &= \Sigma_{m+1\leqslant i\leqslant n} P(A_i) + 2\Sigma_{m<k<i\leqslant n} P(A_iA_k) - M^2_{m,n}\\ &\leqslant M_{m,n} + 2\Sigma_{m<k<i\leqslant n}\{P(A_i)P(A_k) + c_{i-k}P(A_i)\} - M_{m,n}\end{aligned}$$

в силу (3), поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{Var} S_{m,n} &\leqslant M_{m,n} + (\Sigma_{m<i\leqslant n} P(A_i))^2 - \Sigma_{m<i\leqslant n}(P(A_i))^2\\ &+2\Sigma_{m<k<i\leqslant n} c_{i-k}\Sigma_{m<i\leqslant n} P(A_i) - M^2_{m,n} \leqslant CM_{m,n}.\end{aligned}$$

Таким образом, сформулированная теорема является обобщением и усилением теоремы Филиппа. Можно указать более слабые по сравнению с (3) условия, которые достаточны для условия (6). Достаточно, например, потребовать выполнения неравенств (3) лишь для таких i и k, что $i > k + h$, где h – положительная постоянная (с сохранением условия сходимости ряда Σc_n). Для доказательства сформулированной теоремы будем использовать метод работы [7], основанный на модификации метода Радемахера для ортогональных последовательностей, предложенной Шмидтом [9]. Пусть u – целое положительное число. Определим N_u как наибольшее целое число, для которого $M(N_u) < u$. Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться записью $M(n)$ вместо $M_n = P(A_1) + ... + P(A_n)$ и записью $M(k, n)$ вместо $M_{k,n} = P(A_{k+1}) + ... + P(A_n)$. Для любого целого $r \geqslant 1$ обозначим через L_r множество интервалов $(u, v]$ таких, что $u = 2^s t$, $v = (t+1)2^s \leqslant 2^r$, где s и t – целые неотрицательные числа. Имеют место неравенства

$$\Sigma M(N_u, N_v) \leqslant M(N_{2^r}) < 2^r, \tag{8}$$

где суммирование производится по всем интервалам $(u, v] \in L_r$, соответствующим фиксированному значению s. Это утверждение следует из того, что указанные непересекающиеся интервалы покрывают интервал $(0, 2^r]$ и, следовательно, соответствующие интервалы $(N_u, N_v]$ покрывают интервал $(0, N_{2^r}]$.

В силу неравенства $s \leqslant r$ имеем

$$\Sigma M(N_u, N_v) < (r+1)2^r. \tag{9}$$

Положим

$$T_r = \Sigma(S_{Nv} - S_{Nu} - E(S_{Nv} - S_{Nu}))^2.$$

Здесь и в (9) суммирование производится по всем интервалам $(u, v] \in L_r$, отвечающим фиксированному значению r и всем $s \leqslant r$. Учитывая условие (6), получаем

$$ET_r = \Sigma \mathrm{Var}(S_{Nv} - S_{Nu}) \leqslant C\Sigma(M(N_v) - M(N_u)) = C\Sigma M(N_u, N_v).$$

В силу (9) имеем

$$ET_r = O(r2^r) \quad (r \to \infty). \tag{10}$$

Поэтому ряд $(r^2 2^r \psi(r))^{-1} ET_r$ сходится для любой функции $\psi \in \Psi_c$. Отсюда следует, что ряд $\Sigma(r^2 2^r \psi(r))^{-1} T_r$ сходится почти наверное для любой функции $\psi \in \Psi_c$. Следовательно,

$$T_r = o(r^2 2^r \psi(r)) \quad \text{п.н.} \quad (r \to \infty). \tag{11}$$

Пусть w – целое число, такое, что $2^{r-1} < w \leqslant 2^r$. Интервал $(0, w]$ содержится в объединении не более чем $r + 1$ интервалов вида $(2^{k-1}, 2^k]$, где k – целое число, $k \leqslant r$, и такое же утверждение справедливо для интервала $(0, N_w]$. Поэтому

$$S_{Nw} - M_{Nw} = \Sigma(S_{Nv} - S_{Nu} - E(S_{Nv} - S_{Nu})), \tag{12}$$

где суммирование производится по не более чем $r+1$ интервалам $(u, v] \in L_r$. Для любых действительных чисел $b_1, \ldots, b_n$ и любого n имеем $(b_1 + \cdots + b_n)^2 \leqslant n(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$. Отсюда с учетом (11) и (12) получаем

$$(S_{Nw} - M_{Nw})^2 = o(r^3 2^r \psi(r)) \quad \text{п.н.}$$

для любой $\psi \in \Psi_c$. Отсюда следует (7) для $n = N_w$. Пусть n – произвольное целое положительное число. Пусть целое число w таково, что $N_w \leqslant n < N_{w+1}$. Мы имеем $S(N_w) \leqslant S(n) \leqslant S(N_{w+1})$ для любого $\omega \in \Omega$ в силу монотонности функции $S(n) = S_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Далее, $M(N_w) \leqslant M(n) \leqslant M(N_{w+1}) < w + 1$ с учетом определения числа N_{w+1}. Очевидно, $M(N_w + 1) = M(N_w) + P(A_{Nw+1})$. Поэтому $M(N_w) \geqslant w - 1$, $M(N_{w+1}) - M(N_w) < w + 1 - w + 1 = 2$. Эти оценки приводят к завершению доказательства теоремы.

Литература

1. I. S. Gal, J. F. Koksma, *Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables.* — Proc. Koninkl. Akad. Wetensch. **53**, N 5 (1950), 638–653.
2. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел.* — Теория вероятностей и ее примен. **14**, N 2 (1969), 193–202.
3. В. В. Петров, *О порядке роста сумм зависимых случайных величин.* — Теория вероятностей и ее примен. **18**, N 2 (1973), 358–361.
4. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности ортогональных случайных величин.* — Вестник Ленинград. унив. N 7 (1975), 52–57.
5. В. В. Петров, *О росте сумм измеримых функций.* — Литовский матем. сб. **16**, N 1 (1976), 189–192.
6. V. F. Gaposhkin, *On the growth order of partial sums of non-orthogonal series.* — Analysis Math. **6** (1980), 105–119.
7. W. Philipp, *Some metrical theorems in number theory.* — Pacific J. Math. **20**, N 1 (1967), 109–127.
8. V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory.* — Oxford University Press (1995).
9. W. M. Schmidt, *Metrical theorems on fractional parts of sequences.* — Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 493–518.

Petrov V. V. On the growth of sums of the indicators of events.

Some almost sure estimates of the growth of sums of the indicators of events are proved. A generalization of Philipp's result is obtained.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 сентября 2003 г.