Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

В. А. Ровский

О КОРРЕКТНОМ РАЗЛИЧЕНИИ ГАУСОВСКИХ ГИПОТЕЗ

Пусть на гильбертовом пространстве H заданы две (взаимно) абсолютно непрерывные центрированные гауссовские меры γ_0 и γ_1 и $\rho = d\gamma_1/d\gamma_0$ – производная Радона-Никодима. Скажем, что задача различения этих мер корректна, если функция непрерывна в норме гильбертова пространства H. Эквивалентность двух гауссовских мер на фиксированном гильбертовом пространстве не означает существования непрерывной версии плотности ρ, что вполне очевидно, так как для произвольной не равной тождественно единице плотности можно так ослабить гильбертову норму, что в новой норме плотность перестанет быть непрерывной. При этом для сохранения свойства гильбертовости пространство придется пополнить, но на эквивалентности гауссовских мер это никак не отразится, поскольку свойство эквивалентности этих мер проверяется по паре их ковариационных квадратичных форм на пространстве линейных измеримых функционалов F, т.е. по соотношению эквивалентных $L^2(\gamma_i)$ -норм $(i = 0, 1)$ на этом пространстве, не меняющемся при изменении "носителя" мер H. С другой стороны, если производная Радона-Никодима этих гауссовских мер не непрерывна по норме H, можно попытаться перейти к более сильной норме, сужая при этом запас элементов гильбертова носителя. Понятно, что неограниченно сужать носитель мер γ_i нельзя. Возникает вопрос: **всегда ли возможно подобрать такой гильбертов носитель H, на котором задача различения наших мер становится корректной?** В качестве фиксированной версии плотности мы будем рассматривать естественно возникающую версию, описанную ниже, а в качестве норм, порождающих гильбертовы носители мер – только весовые нормы.

Гауссовскую меру мы считаем заданной, если задана ее ковариационная квадратичная форма, иначе говоря – квадрат неко-

Работа поддержана грантом НШ-2258.2003.1.

торой гильбертовой нормы на векторном пространстве F. Условие эквивалентности двух рассматриваемых гауссовских мер позволяет рассматривать их как две гауссовские продакт-меры на пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. При этом масштаб по каждой координате можно выбрать так, чтобы одна из мер была стандартной: $\gamma_0 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}(0,1)$, а вторая имела вид $\gamma_1 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} N(0,\sigma_k^2)$, где $\{\sigma_k\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - 1)^2 < \infty. \tag{1}$$

Тогда по запасу элементов (а для γ_0 и по норме) ядро H_{γ_i} каждой из этих мер совпадает с подпространством $l^2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, сопряженным с гильбертовым пространством F. Таким образом, обозначая через Q_i квадрат нормы ядра соответствующей гауссовской меры, мы получаем $Q_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$, $Q_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\sigma_k^2}$. Рассмотрим норму вида:

$$\|x\|_{\{\delta_k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \delta_k, \quad \delta_k > 0 \quad \text{для всех} \quad k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty, \tag{2}$$

и сформулируем без доказательства следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть $\|\cdot\|$ – некоторая весовая норма. Для того чтобы множество $H = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\| < \infty\}$ с нормой $\|\cdot\|$ было гильбертовым носителем мер γ_0 и γ_1 необходимо и достаточно, чтобы эта норма имела вид* (2).

Переформулируем задачу и несколько упростим ее. Выпишем в явном виде плотность и ее логарифм:

$$\rho(x) = \frac{d\gamma_1}{d\gamma_0}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2} \cdot \frac{1-\sigma_k^2}{\sigma_k^2} \right), \quad x = (x_1, x_2 \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

$$\ln \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\ln \sigma_k + \frac{x_k^2}{2} \cdot \frac{\sigma_k^2 - 1}{\sigma_k^2} \right). \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (x_k^2 - 1),$$

в которой $\beta_k = \frac{\sigma_k - 1}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$.

Лемма 2. *Для того чтобы существовало гильбертово пространство полной меры (порожденное весовой нормой), в котором корректна задача различения мер γ_0 и γ_1 необходимо и достаточно, чтобы существовало гильбертово пространство полной меры (порожденное весовой нормой), в котором непрерывна функция $s(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через $\|\cdot\|$ весовую гильбертову норму, пополняющую ядро до гильбертова простанства полной меры $(H, \|\cdot\|)$, относительно которой $\rho(x)$ непрерывна на H. По лемме 1 эта норма имеет вид (2), для некоторой последовательности $\{\delta_k\}$.

Рассмотрим две функции:

$$p_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-(\sigma_k - 1) + \frac{x_k^2(\sigma_k^2 - 1)}{2\sigma_k^2} \right)$$

и

$$p_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\sigma_k - 1)}{2} \cdot (x_k^2 - 1) \right).$$

Нетрудно проверить, что эти функции конечны γ_0-п.н. (и γ_1-п.н.). При этом $\ln\rho$ и p_1 непрерывны одновременно:

$$\ln\rho(x) - p_1(x) = \sum((\sigma_k - 1) - \ln\sigma_k) = \mathrm{const} < \infty. \tag{4}$$

Покажем, что найдется гильбертово пространство полной меры (порожденное весовой нормой), в котором непрерывна p_2:

$$p_1(x) - p_2(x) =$$
$$= \sum \left(\frac{(x_k^2 - 1)(\sigma_k - 1)}{2} - \frac{(\sigma_k - 1)^2}{2\sigma_k} \cdot x_k^2 - \frac{(\sigma_k - 1)^2(\sigma_k + 1)}{2\sigma_k^2} \cdot x_k^2 \right). \tag{5}$$

Введем две нормы:

$$\|x\|_1^2 := \sum \frac{(\sigma_k - 1)^2}{2\sigma_k} x_k^2, \tag{6}$$

$$\|x\|_2^2 := \sum \frac{(\sigma_k - 1)^2(\sigma_k + 1)}{2\sigma_k} x_k^2, \tag{7}$$

На основе норм $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ создадим новую:

$$\|x\|_s^2 := \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 d_k,$$

$$d_k := \max\left(\delta_k, \frac{(\sigma_k - 1)^2}{2\sigma_k}, \frac{(\sigma - 1)^2(\sigma_k + 1)}{2\sigma_k^2}\right). \tag{8}$$

Очевидно, новая весовая гильбертова норма сильнее каждой из трех, описанных выше, и пополненное по ней ядро является гильбертовым носителем мер γ_0 и γ_1. Обозначим через $(H_s, \|\cdot\|_s)$ новое гильбертово пространство. Непрерывность функций $\ln\rho$ и p_1 сохранится в новом пространстве, и равенство (5) можно переписать так:

$$2p_2(x) = p_1(x) + \|x\|_1^2 + \|x\|_2^2,$$

где каждое слагаемое, очевидно, непрерывно по норме $\|\cdot\|_s$. Следовательно, p_2 также непрерывна по норме $\|\cdot\|_s$ в H_s, и лемма в одну сторону доказана.

Достаточность. Пусть $\|\cdot\|$ – весовая норма вида (2) и $(H, \|\cdot\|)$ – пополненное по этой норме ядро. Предположим, что функция p_2 непрерывна на $(H, \|\cdot\|)$. Рассмотрим нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, определенные выше (см. (6) и (7)) и определим новую гильбертову норму $\|\cdot\|_{s,1}$, скомбинированную из $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, как это указано в (8). Эта норма также пополняет ядро H_{γ_0} до гильбертова пространства полной меры $(H_{s,1}, \|\cdot\|_{s,1})$. Для элементов этого пространства выполняется равенство (5) и из него можно выразить p_1:

$$p_1(x) = 2p_2(x) - \|x\|_1^2 - \|x\|_2^2.$$

Отсюда следует непрерывность функции p_1 на $(H_{s,1}, \|\cdot\|_{s,1})$, а в силу (4) и непрерывность ρ. Лемма доказана. •

Перейдем к вопросу о корректном различении мер:

Теорема 1. *Пусть вместе с* (1) *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1|$. *Тогда существует гильбертово расширение ядра* H_{γ_0}, *в котором задача различения мер* γ_0 *и* γ_1 *корректна.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся леммой 2. Рассмотрим функцию $s(x) = \sum \beta_k(x_k^2 - 1)$, где по условию теоремы $\sum |\beta_k| < \infty$, и покажем, что существует гильбертово пространство полной меры, в котором $s(x)$ непрерывна. Введем норму $\|x\|_{\{\beta_k\}}^2 := \sum x_k^2 |\beta_k|$. По лемме 1 она порождает гильбертово пространство полной меры. Пусть $H = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{\{\beta_k\}} < \infty\}$.

Рассмотрим два подпространства H: $H_1 := \{x \in H : x_k = 0, \beta_k < 0\}$ и $H_2 := \{x \in H : x_k = 0, \beta_k \geqslant 0\}$. Очевидно, $H_1 \perp H_2$

и $H_1 \oplus H_2 = H$. Пусть P_1 и P_2 – проекторы на соответствующие подпространства. Рассмотрим две функции: $s_1(x) = s(P_1x)$, $s_2(x) = s(P_2x)$. Нетрудно видеть, что каждая из них непрерывна по норме $\|\cdot\|_{\{\beta_k\}}$:

$$s_1(x) = \sum_{\beta_k>0} |\beta_k|(x_k^2 - 1) = \|P_1x\|^2_{\{\beta_k\}} - \sum_{\beta_k>0} |\beta_k|,$$

$$s_1(x) = -\|P_2x\|^2_{\{\beta_k\}} + \sum_{\beta_k<0} |\beta_k|.$$

Следовательно, функция также непрерывна на пространстве $(H, \|\cdot\|_{\{\beta_k\}})$. •

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1| = \infty$. *Тогда не существует весовой нормы, порождающей гильбертово пространство полной меры, в котором задача различения гауссовских мер* γ_0 *и* γ_1 *была бы корректна.*

Доказательство. Пусть $\|x\|^2 = \sum x_k^2\delta_k$ – произвольная норма вида (2), порождающая гильбертово пространство $(H, \|\cdot\|)$ полной меры. Рассмотрим функцию $s(x) = \sum \beta_k(x_k^2 - 1)$, $\beta_k = \frac{\sigma_k - 1}{2}$, и предположим, что $\sum\limits_{\beta_k>0} \beta_k = \infty$. Пусть $a \in (H, \|\cdot\|)$ – произвольная точка, такая, что $s(a) < \infty$, и $U_\varepsilon(a) = \{x \in H : \|x - a\| < \varepsilon\}$ – ε-окрестность точки a. Тогда для любого $\theta : 0 < \theta < \sqrt{\varepsilon}$ точка $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots,$

$$x_n(\theta) = \begin{cases} a_n + \operatorname{sgn} a_n \cdot \frac{\theta}{\sqrt{\sum\limits_{\beta_k>0} \delta_k}}, & \beta_n > 0, \\ a_n, & \beta_n < 0 \end{cases}$$

принадлежит окрестности , но при этом

$$s(x(\theta)) = \sum_n \beta_n \left(a_n^2 + \frac{2\theta \cdot a_n \operatorname{sgn} a_n}{\sqrt{\sum\limits_{\beta_k>0} \delta_k}} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(\beta_n) + \frac{\theta^2}{\sum\limits_{\beta_k>0} \delta_k} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(\beta_n) - 1 \right)$$

$$= s(a) + \frac{2\theta \cdot \sum\limits_{\beta_n>0} \beta_n |a_n|}{\sqrt{\sum\limits_{\beta_k>0} \delta_k}} + \frac{\theta^2 \cdot \sum\limits_{\beta_n>0} \beta_n}{\sum\limits_{\beta_k>0} \delta_k} = \infty.$$

Следовательно, $s(x)$ разрывна во всяком весовом гильбертовом пространстве полной меры. Осталось воспользоваться леммой 2. $\bullet$

Автор признателен В. Н. Судакову, обратившему его внимание на одно замечание А. М. Вершика в его совместной с В. Н. Судаковым работе [2], в котором упоминается конкретный пример, наводящий на мысль о более общем феномене, рассмотренном в настоящей работе.

Литература

1. V. Sudakov, *Gaussian Measures. A Brief Survey.* Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Univ. di Trieste, vol. XXVI, 1994, supplemento, 289–325.
2. А. М. Вершик, В. Н. Судаков, *Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах.* — Записки научн. семин. ЛОМИ **12** (1969), 7–67.

Rovskii V. A. Correct discrimination of the Gaussian hypotheses.

Given two equivalent Gaussian weak distributions, the problem of existence of Hilbert support with continuous likelyhood ratio of these distributions is under investigation.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 25 декабря 2003 г.