Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

Л. В. Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ КРАМЕРА.

1. Введение и результаты

Рассмотрим последовательность $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ независимых случайных величин с общим распределением V, удовлетворяющем правостороннему условию Крамера

$$L(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1} < \infty,\ \lambda > 0. \tag{1.1}$$

Положим

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ m(h) = \big(\ln L(h)\big)',\ \sigma^2(h) = m'(h). \tag{1.2}$$

Продолжая исследования Г. Крамера [1], В. В. Петров [2] показал (см. также [3–5]),что если X_1 имеет нерешетчатое распределение, то

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant x\right) = \frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\,L^n(h)e^{-hx}(1+o(1)), \quad n\to\infty, \tag{1.3}$$

равномерно по x, $nm(\varepsilon) \leqslant x \leqslant nm(\lambda-\varepsilon)$, где $h = h(\frac{x}{n})$ – решение уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n}, \tag{1.4}$$

ε - сколь угодно малая положительная постоянная.

Если же X_1 имеет решетчатое распределение со значениями вида $N\cdot H$ (N целое), где $H>0$ – максимальный шаг распределения, и $x = kH (k$ целое), то при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\left(S_n = x\right) = \frac{H}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\,L^n(h)e^{-hx}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1.5a}$$

Работа над статьей была поддержана грантом Мин. Образования No. E02-1.0-219, грантом РФФИ No. 02-01-01099 и грантом НШ No. 2258.2003.01.

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant x\right) = \frac{H}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h) e^{-hx}(1-e^{-hH})^{-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.5б)$$

равномерно относительно x из того же интервала. При этом, $h \in [\varepsilon, \lambda-\varepsilon]$ и $-\infty < m(h) < \infty$, $0 < \sigma^2(h) < \infty$ равномерно в этом промежутке; кроме того, $s(x) = \ln L(h) - hm(h) = \inf\limits_{t>0}\,(\ln L(t) - t\frac{x}{n})$, а $m(h)$ и $\sigma^2(h)$ являются соответственно средним и дисперсией случайной величины $X^{(h)}$, имеющей "сопряженное" распределение $V^{(h)}(x)$, для которого

$$V^{(h)}(dx) = \frac{1}{L(h)}\, e^{hx}\, V(dx), \quad 0 \leqslant h \leqslant \lambda. \quad (1.6)$$

В [6] А. В. Нагаевым было отмечено, что формула (1.3) сохранит справедливость при $nm(\varepsilon) \leqslant x \leqslant nm(\lambda)$, если вместо (1.1) сделать чуть более ограничительное предположение $\sigma^2(\lambda) < \infty$; там же исследован случай $\sigma^2(\lambda) = \infty$.

Положим $D_\lambda(z) = \int\limits_z^\infty x^2\ e^{\lambda x}\, V(dx)$, $z \geqslant 0$. Понятно, что если $\sigma^2(\lambda) < \infty$, то

$$D_\lambda(z) = O(e^{-g(z)}), \ z \to \infty, \quad (1.7)$$

где $g(z)$ – некоторая функция, стремящаяся к бесконечности.

Основной целью настоящей статьи является изучение асимптотического поведения вероятности того, что сумма S_n превзойдет уровень x, когда x содержится в промежутке $[n\, m(\lambda), n\, m(\lambda) + \Lambda_n]$. Здесь последовательность Λ_n растет к бесконечности "пропорционально" росту функции $g(z)$.

Удалось также несколько упростить классическую методику доказательств за счет использования при аппроксимации функции распределения суммы сопряженных случайных величин оценки в центральной предельной теореме, которая зависит от длины интервала, в который эта сумма попадает. Ранее подобные соображения использовались лишь в многомерном случае([7, 8]).

Начнем с обобщения соотношений (1.3) и (1.5).

Теорема 1. *Пусть $\sigma^2(\lambda) < \infty$. Если X_1 имеет нерешетчатое распределение, то*

$$\mathbf{P}\left(x + y > S_n \geqslant x\right) = \frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h) e^{-hx}(1 - e^{-hy})(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad (1.8)$$

равномерно по $x \in [nm(\varepsilon), nm(\lambda)]$ *и* $y \geqslant \varepsilon$, *где* h *удовлетворяет уравнению* (1.4), ε – *сколь угодно малая положительная постоянная.*

Если X_1 *имеет решетчатое распределение со значениями вида* $N \cdot H$ *(*N *целое), где* H – *максимальный шаг распределения, и* $x = kH$ *(*k *целое), то*

$$\mathbf{P}\left(x + y > S_n \geqslant x\right) = \frac{H}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h) e^{-hx} \frac{1 - e^{-hy}}{1 - e^{-hH}} (1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad (1.9)$$

равномерно относительно x *из того же интервала и* $y = mH$ *(*m *положительное целое).*

Соотношение (1.8) уточняет один результат из [9]; кроме того, при $y = \infty$ из него следует равенство (1.3). Результаты (1.5а) и (1.5б) (с заменой $O(\frac{1}{n})$ на $o(1)$) вытекают из (1.9) при $y = H$ и $y = \infty$, соответственно.

Положим

$$B_\lambda^2 = n\sigma^2(\lambda), \;\; x_\lambda = x - nm(\lambda), \;\; I_\lambda(x) = \frac{1}{B_\lambda\sqrt{2\pi}}\, L^n(\lambda) e^{-\lambda x}, \qquad (1.10)$$
$$P_n(x, y) = \mathbf{P}\left(x + y > S_n \geqslant x\right), \;\; K(t) = (1 - e^{-t})/t.$$

Замечание. Пусть $\sigma^2(\lambda) < \infty$. Если X_1 имеет нерешетчатое распределение, то

$$P_n(x, y) = yK(\lambda y)\, I_\lambda(x) e^{-x_\lambda^2/2B_\lambda^2}(1 + o(1)), \quad 0 \leqslant x_\lambda = O(B_\lambda),$$
$$y \geqslant \varepsilon, \quad n \to \infty, \quad (1.11а)$$

при любом положительном ε;
если X_1 имеет решетчатое распределение, такое же как в теореме 1, то

$$P_n(x, y) = y\frac{K(\lambda y)}{K(\lambda H)} I_\lambda(x) e^{-x_\lambda^2/2B_\lambda^2}(1 + o(1)),$$
$$0 \leqslant x_\lambda = O(B_\lambda), \quad n \to \infty, \quad (1.11б)$$

равномерно по $y = mH$, где m – любое целое положительное число (напоминаем, что x/H – целое).

Равенство (1.11а) при некоторых дополнительных предположениях может быть уточнено.

Пусть $V_\lambda(t) = V\big(\min(t, B_\lambda)\big)$,

$$L_\lambda(h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ht}\, V_\lambda(dt),\ m_\lambda(h) = \big(\ln L_\lambda(h)\big)',\ \sigma_\lambda^2(h) = \big(\ln L_\lambda(h)\big)'',$$

а случайная величина $\overline{X}_\lambda$ имеет функцию распределения $\overline{V}_\lambda(t)$ такую, что

$$\overline{V}_\lambda(dt) = \frac{1}{L_\lambda(\lambda)}\, e^{\lambda t}\, V_\lambda(dt), \quad -\infty < t < \infty. \tag{1.12}$$

Положим $\widetilde{X}_\lambda = \overline{X}_\lambda - m_\lambda(\lambda)$ (заметим, что $m_\lambda(\lambda) = \mathbf{E}\overline{X}_\lambda$,)

$$\begin{gathered} \widetilde{L}(\delta) = \mathbf{E}e^{\delta \widetilde{X}_\lambda},\ \widetilde{s}(t) = \inf_{\delta > 0} \left(\ln \widetilde{L}(\delta) - \delta \frac{t}{n} \right); \\ \Lambda_n = \min_{y \geqslant B_\lambda} y \left(\frac{1}{2} + \frac{g(y)}{y^2} B_\lambda^2 \right). \end{gathered} \tag{1.13}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть X_1 имеет нерешетчатое распределение, $0 < \lambda = \sup\{h : L(h) < \infty\} < \infty$ и $\sigma^2(\lambda) < \infty$.*

Если выполняется условие (1.7), причем при $z \to \infty$

$$g(z) \sim \overline{g}(z), \quad \text{где} \quad \frac{\overline{g}(z)}{z}, \downarrow 0. \tag{1.14}$$

то

$$P_n(x, y) = yK(\lambda y)\, I_\lambda(x)\, e^{n\widetilde{s}(x_\lambda)}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \tag{1.15}$$

равномерно по x, $0 \leqslant x_\lambda \leqslant (1 - \varepsilon)\Lambda_n$, и $y \geqslant \varepsilon$, где ε – сколь угодно малая положительная постоянная.

В условиях теоремы 2 $\sigma^2(\lambda + \varepsilon) = \infty$ $\forall \varepsilon > 0$. Легко понять, что последнее соотношение выполняется тогда (и только тогда) когда имеет место (1.7), где $g(z)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию $\liminf\limits_{z \to \infty} g(z)/z = 0$. Таким образом, условия (1.7), (1.14) не слишком ограничительны.

Соотношение (1.15) остается справедливым, если $0 < \lambda < \sup\{h : L(h) < \infty\}$, однако в этом случае более простой и точный результат вытекает из (1.8). По той же причине (1.15) представляет основной интерес при $x_\lambda \geqslant \rho_n \sqrt{n}$, где ρ_n достаточно медленно стремится к бесконечности.

Заметим еще, что равенство (1.15) можно записать в следующем равносильном виде:

$$P_n(x,y)=\frac{y\,K(h\,y)}{B_\lambda\sqrt{2\pi}}\,L^n_\lambda(h)\,e^{-h\,x}(1+o(1)),\quad n\to\infty,\tag{1.15$'$}$$

где $h=h(\frac{x}{n})$ – решение уравнения

$$m_\lambda(h)=\frac{x}{n},\tag{1.16}$$

Интересно, что таким образом переформулированная теорема 2 в целом сохраняет справедливость и при $\lambda=0$(см. [11, следствие 4 при $c_n(\lambda_n)=B_n$]).

Приведем некоторые следствия теоремы 2.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2 *при* $n\to\infty$

$$P_n(x,y)=y\,K(\lambda\,y)\,I_\lambda(x)\,\exp\left\{-\frac{x_\lambda^2}{2B_\lambda^2}(1+o(1))\right\},$$
$$B_\lambda\leqslant x_\lambda\leqslant(1-\varepsilon)\Lambda_n,\ y\geqslant\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0.$$

Чуть позже свойства функции $\widetilde{s}(x_\lambda)$ будут описаны более детально, а пока изучим поведение границы зоны больших уклонений Λ_n.

Замечание 1. Пусть при $z\to\infty$ функция $\eta=\eta(z)$ удовлетворяет условию

$$\eta^2/g(\eta)\sim z^2,\tag{1.17}$$

а функция $g(z)\sim z^\alpha g_0(z)$, где постоянная $\alpha\in[0,1]$.

Если $yg_0'(y)=o(g_0(y)),\ y\to\infty$, то

$$\Lambda_n\sim c_\alpha\eta(B_\lambda)\sim c_\alpha\sigma^{\frac{2}{2-\alpha}}(\lambda)\,\eta(\sqrt{n}),\quad n\to\infty,$$

где

$$c_\alpha=(2-\alpha)(2-2\alpha)^{-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}};\tag{1.18}$$

если же

$$yg_0'(y)=o(g_0(y)/(1+|\ln g_0(y)|)),\ y\to\infty,\tag{1.19}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}&\max_{y_1\leqslant y\leqslant y_2}g_0(y)=O(\max_i g_0(y_i))\quad\text{или}\\&\max_{y_1\leqslant y\leqslant y_2}|yg_0'(y)|=O(\max_i|y_ig_0'(y_i)|)\quad\text{при}\quad y_i\to\infty,\ i=1,2,\end{aligned}\tag{1.20}$$

то $\eta(z) \sim \bigl(z^2 g_0(z^{\frac{2}{2-\alpha}})\bigr)^{\frac{1}{2-\alpha}}$, $z \to \infty$, и, следовательно,

$$\Lambda_n \sim c_\alpha \bigl(B_\lambda^2 g_0(B_\lambda^{\frac{2}{2-\alpha}})\bigr)^{\frac{1}{2-\alpha}} \sim c_\alpha \sigma^{\frac{2}{2-\alpha}}(\lambda)\Bigl(n g_0(n^{\frac{1}{2-\alpha}})\Bigr)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \ n \to \infty.$$

Отметим, что $c_0 = \sqrt{2}$ и $c_1 = 1$, а в случае выполнения условий (1.19), (1.20) Λ_n при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ эквивалентно $\sigma(\lambda)\sqrt{2ng(\sqrt{n})}$ и $\sigma^2(\lambda)g(n)$, соответственно. Заметим также, что условие (1.20) выполняется, если функция g_0 монотонна или вогнута.

Следует сказать, что зона больших уклонений в теоремах 2 и 3, скорее всего оптимальна: по аналогии с теоремой 2 из [10] можно предположить, что $P_n(x, y)$ при $x_\lambda > (1+\varepsilon)\Lambda_n$ имеет другую асимптотику.

Проанализируем теперь поведение функции $\widetilde{s}(x_\lambda)$. Оно во многом зависит от “правильности” поведения $g(z)$ и изучалось в [10, леммы 1] (см. также [11–13]).

Замечание 2. Пусть при $\lambda \geqslant 0$ выполняются условия (1.7), (1.14). Тогда, если

$$\overline{g}(z)/z^\alpha \downarrow 0 \ (\exists 0 < \alpha < 1/2), \tag{1.21}$$

то

$$\widetilde{s}(x_\lambda) = -\frac{x_\lambda^2}{2B_\lambda^2} + o(1), \quad B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant \Lambda_n, \quad n \to \infty; \tag{1.22}$$

если при некотором целом $k \geqslant 1$

$$\int_0^\infty x^{k+3} e^{\lambda x} V(dx) < \infty \tag{1.23}$$

и

$$g(z) = o\Bigl(z^{\frac{k+1}{k+2}}\Bigr), \ z \to \infty, \tag{1.24}$$

то

$$\widetilde{s}(x_\lambda) = -\frac{x_\lambda^2}{2B_\lambda^2} + \frac{x_\lambda^2}{B_\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_{\nu-1}\Bigl(\frac{x_\lambda}{n}\Bigr)^\nu + o(1),$$
$$B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant \Lambda_n, \quad n \to \infty, \tag{1.25}$$

где $\{\lambda_\nu\}$ – начальные коэффициенты ряда Крамера, зависящие от кумулянтов случайной величины $X = \bigl(X^{(\lambda)} - m(\lambda)\bigr)/\sigma(\lambda)$ до порядка $\nu+2$ включительно(см. [14, гл. 8]); в частности, $\lambda_0 = \frac{1}{6}\mathbf{E}X^3$.

Заметим, что условие (1.23) следует из соотношения

$$\int\limits_0^\infty x^k e^{-g(x)}dx < \infty,$$

которое, в свою очередь, вытекает из условия $\liminf\limits_{z\to\infty} g(z)/\ln z > k+1$.

Следующие следствия теоремы 2, одно из которых было анонсировано в [15], справедливы, если X_1 имеет нерешетчатое распределение.

Следствие 2. *Пусть $\lambda > 0$. Если выполняется условие (1.7), где функция $g(x)$ правильно меняется с показателем $\alpha \in [0, 1/2)$, то при $n \to \infty$ $\forall \varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant x\right) = \frac{1}{\lambda}\, I_\lambda(x)\, e^{-x_\lambda^2/2B_\lambda^2}(1+o(1)),$$
$$0 \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\, c_\alpha \sigma^{\frac{2}{2-\alpha}}(\lambda)\eta_n,$$

где c_α определено в (1.18), η_n удовлетворяет условию $\eta_n^2/g(\eta_n) \sim n$, $n \to \infty$.

В частности, если $g(z) \sim \exp\left\{\sqrt{\int\limits_0^z \frac{\delta(u)}{1+u}du}\right\}$, $z \to \infty$, где $\delta(u) \to +0$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\delta(u)}{1+u}du$ расходится, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(S_n \geqslant x\right) &= \frac{1}{\lambda}\, I_\lambda(x)\, e^{-x_\lambda^2/2B_\lambda^2}(1+o(1)), \\ 0 \leqslant x_\lambda &\leqslant (1-\varepsilon)\, \sigma(\lambda)\sqrt{2n\, g(\sqrt{n})}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Следствие 3. *Пусть $\lambda > 0$ и выполняется условие (1.7), причем $g(x) = ax^\alpha$, где $\alpha \in [1/2, 1)$ и $a > 0$. Тогда при $n \to \infty$ $\forall \varepsilon > 0$*

$$P_n(x,y) = y\, K(\lambda\, y)\, I_\lambda(x)\, \exp\left\{-\frac{x_\lambda^2}{2B_\lambda^2} + \frac{x_\lambda^2}{B_\lambda^2}\sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu-1}\left(\frac{x_\lambda}{n}\right)^\nu\right\}(1+o(1)),$$

$$\sigma(\lambda)\sqrt{n} \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)c_\alpha(a\sigma^2(\lambda)n)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \quad y \geqslant \varepsilon,$$

где $k = [\alpha/(1-\alpha)]$, λ_ν, c_α определены в (1.25) и (1.18), соответственно.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $h > 0$ и $0 < \sigma^2(h) < \infty$ (см.(1.1), (1.2)).

Обозначим через $F^{(h)}(x)$ функцию распределения центрированной и нормированной суммы n независимых случайных величин с общей функцией распределения $V^{(h)}(x)$ (см. (1.6)). Положим

$$f^{(h)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, F^{(h)}(dx), \quad \delta^{(h)}(t) = f^{(h)}(t) - e^{-t^2/2},$$
$$\delta_\varepsilon = \int_0^{1/\varepsilon} |\delta^{(h)}(t)|\, dt \quad (\varepsilon > 0). \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Пусть $u < v \leqslant \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\,(u \leqslant S_n - n\,m(h) < v) =$$
$$L^n(h) e^{-n\,h\,m(h)} \left(\int_{u\frac{h}{\tau}}^{v\frac{h}{\tau}} e^{-\tau t}\, \Phi(dt) + \theta\, \frac{e^{-h\,u} - e^{-h\,v}}{\tau}\, \varepsilon^{(h)}(v-u) \right), \tag{2.2}$$

где $\Phi(t)$ обозначает стандартную нормальную функцию распределения,

$$\tau = h\,\sigma(h)\sqrt{n},\ \varepsilon^{(h)}(y) = \inf_{\varepsilon>0} \left\{ \delta_\varepsilon + (1+\delta_\varepsilon)\Big(1 + \frac{1}{y\,h}\Big)\,\tau\varepsilon \right\}, \tag{2.3}$$

$|\theta| \leqslant c$, а c – некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство леммы 1. Обозначим для краткости $L(h)$, $m(h)$ через L и m, соответственно, и положим $\overline{u} = u\frac{h}{\tau}$, $\overline{v} = v\frac{h}{\tau}$. Стандартные рассуждения (например, [14, гл. 8] приводят к равенству

$$\mathbf{P}\,\Big(\overline{u} \leqslant \frac{S_n - n\,m}{\sigma(h)\sqrt{n}} < \overline{v}\Big) = L^n\, e^{-n\,h\,m} \int_{\overline{u}}^{\overline{v}} e^{-\tau t}\, F^{(h)}(dt). \tag{2.4}$$

Пусть $\Delta(t) = F^{(h)}(t) - \Phi(t)$. Очевидно,

$$\int_{\overline{u}}^{\overline{v}} e^{-\tau t}\, F^{(h)}(dt) = \int_{\overline{u}}^{\overline{v}} e^{-\tau t}\, \Phi(dt) + \int_{\overline{u}}^{\overline{v}} e^{-\tau t}\, \Delta(dt). \tag{2.5}$$

Обозначим модуль второго интеграла в правой части (2.5) через J и оценим его. Имеем,

$$J \leqslant e^{-\tau\overline{v}}\,|\Delta(\overline{v})-\Delta(\overline{u})| + \tau\, e^{-\tau\overline{u}} \int\limits_0^{\overline{v}-\overline{u}} |\Delta(\overline{u}+t)-\Delta(\overline{u})|\, e^{-\tau t} dt. \quad (2.6)$$

Далее нам понадобится следующая оценка, аналог которой, причем сразу в многомерной ситуации, был доказан в [8, леммы 3 и 4].

Лемма 2. *Пусть λ, $\varepsilon > 0$. Тогда (см.* (2.1), (2.5)*)*

$$\sup_z |\Delta(\lambda+z)-\Delta(z)| \leqslant C_1\,(\varepsilon + (\lambda+\varepsilon)\,\delta_\varepsilon), \quad (2.7)$$

где C_1 – некоторая абсолютная постоянная.

Используя оценку (2.7) в (2.6) и учитывая, что

$$e^{-\tau\,\overline{u}} = (e^{-\tau\,\overline{u}} - e^{-\tau\,\overline{v}}) + e^{-\tau\,\overline{v}} \leqslant \frac{e^{-\tau\,\overline{u}} - e^{-\tau\,\overline{v}}}{\tau}\,(\tau + 1/(\overline{v}-\overline{u})),$$

легко найдем

$$J \leqslant C_1\,\frac{e^{-\tau\,\overline{u}} - e^{-\tau\,\overline{v}}}{\tau}\,(\delta_\varepsilon + \varepsilon\,(1+\delta_\varepsilon)\,(\tau + 1/(\overline{v}-\overline{u}))). \quad (2.8)$$

Соотношение (2.2) следует из (2.4), (2.5) и (2.8). Лемма 1 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\tau > 0$ и $0 \leqslant \gamma < \beta$. Тогда*

$$\frac{e^{-\tau\,\gamma} - e^{-\tau\,\beta}}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-\gamma^2/2} > \int\limits_\gamma^\beta e^{-\tau t}\,\Phi(dt) > \frac{e^{-\tau\,\gamma} - e^{-\tau\,\beta}}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-\gamma^2/2}\,(1-(1+\tau\,\gamma)/\tau^2). \quad (2.9)$$

Доказательство леммы 3. Учитывая, что

$$U = e^{\gamma^2/2}\,\tau\sqrt{2\pi} \int\limits_\gamma^\beta e^{-\tau t}\,\Phi(dt) = \tau \int\limits_\gamma^\beta e^{-\tau t-(t^2-\gamma^2)/2}\,dt,$$

а $e^{-(t^2-\gamma^2)/2} \in [1-(t^2-\gamma^2)/2, 1]$, находим

$$e^{-\tau\,\gamma} - e^{-\tau\,\beta} > U > e^{-\tau\,\gamma} - e^{-\tau\,\beta} - \frac{\tau}{2}\int\limits_{\gamma}^{\beta} e^{-\tau t}\,(t^2-\gamma^2)\,dt.$$

Отсюда и из оценки

$$\tau\int\limits_{\gamma}^{\beta} e^{-\tau t}\,(t^2-\gamma^2)\,dt < \frac{2}{\tau^2}\,(1+\tau\,\gamma)\,(e^{-\tau\,\gamma} - e^{-\tau\,\beta}),$$

которую можно получить интегрированием по частям, следует соотношение (2.9). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть (см.* (1.1), (1.2), (1.6), (2.3)*)*

$$\begin{aligned} D_n^{(h)}(u) &= \frac{1}{\sigma^2(h)}\int\limits_{|x|>u\,\tau/h} x^2 dV^{(h)}(x+m(h)), \quad u \geqslant 0; \\ \Psi_n^{(h)} &= \int\limits_0^1 D_n^{(h)}(u)du. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда (см. (2.1)*) при любом* $\varepsilon > 0$

$$|f^{(h)}(t)| \leqslant \exp\{-\frac{2}{\pi^2}\,(1-2\,D_n^{(h)}(\varepsilon))\,t^2\}, \quad |t| \leqslant \frac{\pi}{2\varepsilon}; \tag{2.11}$$

кроме того, если $\Psi_n^{(h)} \leqslant 1/8$, *то*

$$|\delta^{(h)}(t)| \leqslant 2\,(t^2 + 0.36\,|t|^3)\,e^{-t^2/2}\,\Psi_n^{(h)}, \quad |t| \leqslant (\Psi_n^{(h)})^{-1/3}. \tag{2.12}$$

Оценка (2.11) вытекает из [16, лемма при $\alpha = \pi$] и [17, теорема 3].

Неравенство (2.12) может быть получено с помощью стандартных рассуждений с использованием [16, (3) и замечание 1].

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что если $\sigma^2(\lambda) < \infty$, то

$$0 < \inf_{\varepsilon \leqslant h \leqslant \lambda} \sigma^2(h) < \sup_{\varepsilon \leqslant h \leqslant \lambda} \sigma^2(h) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

и (см. (2.10)) $\sup\limits_{\varepsilon \leqslant h \leqslant \lambda} \psi_n^{(h)} \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть число r удовлетворяет условию (см.(2.10), (2.3))

$$D_n^{(h)}\Big(\frac{1}{r}\frac{h}{\tau}\Big) \leqslant 1/4. \qquad (2.13)$$

Сначала рассмотрим нерешетчатый случай. Для проверки (1.8) воспользуемся леммами 1 и 3 при $u=\gamma=0$, $v=y$, $\beta=y\frac{h}{\tau}$ и h из условия (1.4). Имеем, придерживаясь обозначений из (2.2), (2.3)

$$\mathbf{P}\,(x \leqslant S_n < x+y) = \frac{1-e^{-hy}}{\tau\sqrt{2\pi}}\,L^n(h)e^{-hx}\left(1+\theta\left(\frac{1}{\tau^2}+\varepsilon^{(h)}(y)\right)\right). \qquad (2.14)$$

Возьмем произвольное $k>1$ и положим $\gamma=\frac{1}{k}\frac{h}{\tau}$. Если $\varepsilon \leqslant h \leqslant \lambda$ и $y \geqslant \varepsilon$, то (см.(2.1), (2.3))

$$\varepsilon^{(h)}(y) \leqslant \delta_\gamma + (1+\delta_\gamma)(1+\varepsilon^{-2})\,\lambda/k,$$
$$\delta_\gamma \leqslant \Bigg(\int_0^\alpha + \int_\alpha^{r\frac{\tau}{h}} + \int_{r\frac{\tau}{h}}^{k\frac{\tau}{h}}\Bigg)|\delta^{(h)}(t)|dt = I_1+I_2+I_3, \qquad (2.15)$$

где $\alpha=(\psi_n^{(h)})^{-1/3}$.

По (2.11)–(2.13)

$$I_1+I_2 \leqslant c\,\psi_n^{(h)} \qquad (2.16)$$

при всех достаточно больших n (c–абсолютная постоянная). Далее,

$$I_3 \leqslant \int_{r\frac{\tau}{h}}^{\infty} e^{-t^2/2}dt + \gamma^{-2}\,q_k^n, \qquad (2.17)$$

где $q_k = \sup\limits_{r\leqslant|t|\leqslant k,\ \varepsilon\leqslant h\leqslant\lambda} |\,\mathbf{E}\,e^{itX^{(h)}}|$. Поскольку $q_k<1$ при *любом* $k>1$ (напоминаем, что случайная величина X_1 и, следовательно, $X^{(h)}$, имеет нерешетчатое распределение; см. также [5, стр. 114]), по (2.15)–(2.17) заключаем, что $\sup\limits_{y\geqslant\varepsilon,\ \varepsilon\leqslant h\leqslant\lambda} \varepsilon^{(h)}(y) \to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда и из (2.14) следует соотношение (1.18).

Перейдем к решетчатому случаю. Для удобства положим $H=1$. Легко проверить, что при $\varepsilon \leqslant h \leqslant \lambda$ и любых целых $k \geqslant 0$ и

$x \in [n\,m(\varepsilon), n\,m(\lambda)]$

$$p_k = \mathbf{P}\,(S_n = x + k) = L^n(h)\,e^{-h\,(x+k)}\,\frac{h}{2\pi\tau}\,I_k, \tag{2.18}$$

где $I_k = \int\limits_{|t|\leqslant\frac{\pi\tau}{h}} f^{(h)}(t)e^{-it\frac{h}{\tau}(x+k-n\,m(h))}dt$, а прочие обозначения заимствованы в (2.1), (2.3).

Пусть h удовлетворяет уравнению (1.4). Так же, как в (2.15),

$$I_k = \int\limits_{|t|\leqslant\alpha} e^{-t^2/2-i\,t\,k\,\frac{h}{\tau}}dt + \theta_1 \int\limits_{|t|\leqslant\alpha} |\delta^{(h)}(t)|dt+$$
$$\theta_2 \int\limits_{\alpha<|t|\leqslant r\frac{\tau}{h}} |f^{(h)}(t)|dt + \theta_3 \int\limits_{r\frac{\tau}{h}<|t|\leqslant\pi\frac{\tau}{h}} |f^{(h)}(t)|dt, \quad |\theta_i| \leqslant 1. \tag{2.19}$$

Первый интеграл в правой части (2.19) равен

$$\sqrt{2\pi}\,e^{-(\frac{k\,h}{\tau})^2/2} + \theta_4 \int\limits_{|t|>\alpha} e^{-t^2/2}dt, \quad |\theta_4| \leqslant 1;$$

второй и третий по (2.12), (2.11) при всех достаточно больших n не превосходит $c\,\psi_n^{(h)}$ (c – абсолютная постоянная), а четвертый не более $\frac{\pi\tau}{h}\,q^n$, где

$$q = \sup_{\varepsilon\leqslant h\leqslant\lambda,\, r\leqslant|t|\leqslant\pi} |\,\mathbf{E}\,e^{itX^{(h)}}| < 1$$

поскольку $X^{(h)}$ имеет решетчатое распределение с максимальным шагом $H = 1$ (см.также [5, лемма 3.2]).

Соотношение (1.9) следует из (2.18), (2.19) и вышесказанного, так как при $s = e^{-h}$, $a = \frac{h^2}{2\tau^2}$ и любом целом $y \geqslant 1$

$$\frac{1-s^y}{1-s} > \sum_{k=0}^{y-1} s^k\,e^{-k^2a} > \frac{1-s^y}{1-s}(1 - a\,s(2(1-s)^{-2} - 1)). \tag{2.20}$$

Теорема 1 полностью доказана.

Проверим замечание. Для доказательства (1.11б) воспользуемся равенством (2.18) при $h = \lambda$. Так же, как в (2.19) получим (см.(2.3)) при всех достаточно больших n

$$I_k = \sqrt{2\pi}\,e^{-(k+x_\lambda)^2/2B_\lambda^2} + \theta\,(\psi_n^{(\lambda)} + B_\lambda\,\overline{q}^n), \tag{2.20}$$

где $\overline{q} = \sup\limits_{r\leqslant|t|\leqslant\pi} |\mathbf{E}\, e^{itX^{(\lambda)}}|$, $|\theta| < c$. Нужное нам утверждение (напоминаем, что $x_\lambda = 0(B_\lambda)$, $n \to \infty$) следует из (2.18), (2.21) и (2.20) при $s = e^{-(\lambda + x_\lambda/b_\lambda^2)}$, $a = (2B_\lambda^2)^{-1}$.

Докажем (1.11a). Из леммы 1 при $h = \lambda$, $u = x_\lambda$, $v = y + x_\lambda$ (см. (1.10)) и леммы 3 при $\gamma = \frac{x_\lambda}{B_\lambda}$ и $\beta = \frac{y+x_\lambda}{B_\lambda}$(напоминаем, что $\frac{\tau}{h} = B_\lambda$ при $h = \lambda$) получим (см. (2.2))

$$P_n(x,y) =$$
$$y\,K(\lambda y)\,I_\lambda(x)e^{-x_\lambda^2/2B_\lambda^2}\left(1 + \theta\Big(\frac{1+\lambda\,x_\lambda}{\lambda^2 B_\lambda^2} + e^{\frac{x_\lambda^2}{2B_\lambda^2}}\,\varepsilon^{(\lambda)}(y)\Big)\right). \quad (2.21)$$

Соотношение (1.11a) вытекает из (2.21), поскольку $x_\lambda = 0(B_\lambda)$, $\sup\limits_{y\geqslant\varepsilon} \varepsilon^{(\lambda)}(y) = o(1)$ при $n \to \infty$ (см. (2.15) и ниже).

Замечание доказано.

3. Доказательство теоремы 2

Предположим, что при $\lambda > 0$ выполняются условия (1.7), (1.14). Вначале докажем ряд вспомогательных результатов.

Пусть η – произвольно малая положительная постоянная,

$$0 \leqslant \delta \leqslant \delta_\lambda = (1-\eta)\,g(B_\lambda)/B_\lambda. \quad (3.1)$$

Покажем (см. обозначения в (1.12) и выше), что при $h = \lambda + \delta$ и $k = 0, 1$ или 2

$$L_\lambda^{(k)}(h) = L^{(k)}(\lambda) + o(1), \quad n \to \infty, \quad (3.2)$$

равномерно по δ, удовлетворяющим (3.1).

Пусть $k = 2$. Если $\delta B_\lambda \leqslant 1$, то при $n \to \infty$

$$L_\lambda''(h) = \int\limits_{-\infty}^{B_\lambda} e^{\delta y} y^2 e^{\lambda y}\,V(dy) = \int\limits_{|y|\leqslant B_\lambda} (1 + \delta y e^{\theta\delta y})\,y^2 e^{\lambda y}\,V(dy) + o(1) =$$

$$L''(\lambda) + o(1) + \theta_1 \frac{1}{B_\lambda} \int\limits_{|y|\leqslant B_\lambda} |y|^3 e^{\lambda y}\,V(dy) = L''(\lambda) + o(1)$$

(например, [11, (67)]), где $|\theta| \leqslant 1$, $|\theta_1| \leqslant e$.

Если же $\delta B_\lambda > 1$, то при $n \to \infty$

$$L''_\lambda(h) = \int\limits_{|y|\leqslant 1/\delta} (1+\delta y e^{\theta\delta y})\, y^2 e^{\lambda y}\, V(dy) + \int\limits_{1/\delta}^{B_\lambda} e^{\delta y} y^2 e^{\lambda y}\, V(dy) + o(1). \tag{3.3}$$

Первый интеграл здесь равен $L''(\lambda)+o(1)$, а второй при $\gamma = \eta/2$ не превосходит (см. (1.7))

$$e\, D_\lambda(1/\delta)+\delta \int\limits_{1/\delta}^{B_\lambda} D_\lambda(y) e^{\delta y}\, dy \leqslant e\, D_\lambda(1/\delta)+D_\lambda^{\gamma}(1/\delta)\, \delta \int\limits_{1/\delta}^{B_\lambda} D_\lambda^{1-\gamma}(y) e^{\delta y}\, dy =$$

$$O\big(e^{-g(1/\delta)} + e^{-\gamma\, g(1/\delta)}\delta \int\limits_{1/\delta}^{B_\lambda} e^{-\gamma\delta y}\, e^{y(1+\gamma)(\delta-\tau g(y)/y)} dy\big),$$

где $\tau = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} > 1-\eta$.

Учитывая условия (1.14) и (3.1), отсюда заключаем, что второй интеграл в (3.3) стремится к нулю и, следовательно, как и в случае $\delta B_\lambda \leqslant 1$, $\quad L''_\lambda(h) = L''(\lambda)+o(1)$, $n \to \infty$. Равенство (3.2) при $k=2$ доказано. Случаи $k=0$ и $k=1$ проверяются аналогично.

Из (3.2) следует, что

$$\sigma_\lambda^2(h) = \sigma^2(\lambda) + o(1), \ \ \lambda \leqslant h \leqslant \lambda+\delta_\lambda, \ \ n \to \infty. \tag{3.4}$$

Покажем теперь, что

$$0 \leqslant m(\lambda) - m_\lambda(\lambda) \leqslant \frac{1+o(1)}{L(\lambda)} D_\lambda(B_\lambda)/B_\lambda, \ \ B_\lambda \to \infty. \tag{3.5}$$

Имеем,

$$m(\lambda) - m_\lambda(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)} \int\limits_{B_\lambda}^{\infty} (y - m_\lambda(\lambda)) e^{\lambda y}\, V(dy). \tag{3.6}$$

Отсюда, с учетом неравенства $m_\lambda(\lambda) \leqslant B_\lambda$, получим оценку снизу в (3.5).

Из (3.6) следует, что

$$m(\lambda) = m_\lambda(\lambda)(1 - \frac{1}{L(\lambda)} \int\limits_{B_\lambda}^{\infty} e^{\lambda y}\, V(dy)) + \frac{1}{L(\lambda)} \int\limits_{B_\lambda}^{\infty} y\, e^{\lambda y}\, V(dy),$$

и, в частности, $m_\lambda(\lambda) = m(\lambda) + o(1)$, $B_\lambda \to \infty$. Используя это соотношение в правой части (3.6), докажем верхнюю оценку в (3.5).

Теперь рассмотрим функцию $\Delta(u) = m_\lambda(\lambda + u) - m_\lambda(\lambda)$, $0 \leqslant u \leqslant \delta_\lambda$. Имеем,

$$\Delta(u) = u\, \frac{dm_\lambda(\lambda + \theta\, u)}{du} = u\, \sigma_\lambda^2(\lambda + \theta\, u), \tag{3.7}$$

где $|\theta| < 1$.

Функция $\Delta(u)$ возрастает и, следовательно, уравнение

$$\Delta(u) = a, \quad 0 \leqslant u \leqslant \Delta(\delta_\lambda), \tag{3.8}$$

имеет единственное решение $u = u(a)$.

По (3.4) и (3.7)

$$\Delta(u) \sim u\, \sigma^2(\lambda),\ 0 \leqslant u \leqslant \delta_\lambda, \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

и, в частности, при $n \to \infty$

$$\Delta(\delta_\lambda) \sim \delta_\lambda\, \sigma^2(\lambda) = (1 - \eta) \frac{B_\lambda\, g(B_\lambda)}{n}. \tag{3.10}$$

Пусть (см. (1.10), (1.13)) $B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1 - \varepsilon)\Lambda_n$, $\varepsilon < \eta$. Обратимся к уравнению (1.16). Его можно переписать, учитывая (3.5) и положив $\delta = h - \lambda$, в следующем виде

$$m_\lambda(h) - m_\lambda(\lambda) = \Delta(\delta) = \frac{x_\lambda}{n} + m(\lambda) - m_\lambda(\lambda) \sim \frac{x_\lambda}{n}, \quad n \to \infty. \tag{3.11}$$

Поскольку $\Lambda_n \leqslant \frac{1}{2} B_\lambda + B_\lambda\, g(B_\lambda) \sim B_\lambda\, g(B_\lambda)$, $B_\lambda \to \infty$, из (3.8)–(3.11) заключаем, что решение h уравнения (1.16) удовлетворяет соотношению

$$h - \lambda = \delta \sim \frac{x_\lambda}{B_\lambda^2}, \quad B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1 - \varepsilon)\Lambda_n, \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Положим

$$s_\lambda(x) = \ln L_\lambda(h) - h\, m_\lambda(h), \quad 0 \leqslant x_\lambda \leqslant (1 - \varepsilon)\Lambda_n, \tag{3.13}$$

где h – решение уравнения (1.16).

Покажем, что равномерно по x, $B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\Lambda_n$,

$$s_\lambda(x) = \ln L(\lambda) - \lambda\,\frac{x}{n} + \widetilde{s}(x_\lambda) + o(1/n), \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Имеем (при $\delta = h - \lambda$)

$$s_\lambda(x) - \ln L(\lambda) + \lambda\,\frac{x}{n} = I_1 + I_2, \tag{3.15}$$

где

$$I_1 = \ln \frac{L_\lambda(\lambda)}{L(\lambda)}, \quad I_2 = \ln \frac{L_\lambda(\lambda+\delta)}{L_\lambda(\lambda)} - \delta\,\frac{x}{n}.$$

Оказывается,

$$I_2 = \ln \widetilde{L}(\delta) - \delta\,\frac{\overline{x}_\lambda}{n} = \widetilde{s}(\overline{x}_\lambda), \tag{3.16}$$

где $\overline{x}_\lambda = x - n\,m_\lambda(\lambda)$. Действительно (см. (1.13)),

$$\begin{aligned}(\ln \widetilde{L}(\delta))' = \frac{\widetilde{L}'(\delta)}{\widetilde{L}(\delta)} = \frac{L_\lambda(\lambda)}{L_\lambda(\lambda+\delta)}\,\mathbf{E}\,\widetilde{X}_\lambda e^{\delta\widetilde{X}_\lambda + \delta m_\lambda(\lambda)} = \\ \frac{L_\lambda(\lambda)}{L_\lambda(h)}\big(\,\mathbf{E}\,\overline{X}_\lambda e^{(h-\lambda)\overline{X}_\lambda} - m_\lambda(\lambda)\,\mathbf{E}\,e^{(h-\lambda)\overline{X}_\lambda}\big) = \\ \frac{(L_\lambda(h))'}{L_\lambda(h)} - m_\lambda(\lambda) = \frac{x}{n} - m_\lambda(\lambda) = \frac{\overline{x}_\lambda}{n}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Поскольку $\overline{x}_\lambda - x_\lambda = m(\lambda) - m_\lambda(\lambda)$, то (см. (3.5))

$$\begin{aligned}\widetilde{s}(x_\lambda) \geqslant \widetilde{s}(\overline{x}_\lambda) = \ln \widetilde{L}(\delta) - \delta\,\frac{x_\lambda}{n} - \delta\,\frac{(\overline{x}_\lambda - x_\lambda)}{n} \geqslant \\ \widetilde{s}(x_\lambda) - \delta\,(m(\lambda) - m_\lambda(\lambda)).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Пусть (см. (1.14)) ω_n является решением уравнения $\frac{\overline{g}(\omega_n)}{\omega_n^2} = \frac{1}{B_\lambda^2}$. Очевидно, что $\Lambda_n < 2\omega_n$ при всех достаточно больших n. Поэтому (см. (3.5), (3.12), (1.7))

$$\begin{aligned}n\,\delta\,(m(\lambda) - m_\lambda(\lambda)) = O(\Lambda_n\,D_\lambda(B_\lambda)/B_\lambda) = \\ O\left(\frac{\omega_n}{B_\lambda}e^{-g(B_\lambda)}\right) = o(1), \quad n \to \infty,\end{aligned} \tag{3.19}$$

с учетом того, что $g(B_\lambda) \sim \overline{g}(B_\lambda) \geqslant \frac{B_\lambda}{\omega_n}\,\overline{g}(\omega_n) \geqslant \frac{\omega_n}{B_\lambda}$.

Далее,

$$0 < -I_1 \leqslant \frac{L(\lambda) - L_\lambda(\lambda)}{L_\lambda(\lambda)} = o\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n \to \infty$$

(см. (3.2), (1.7)). Отсюда и из (3.15)–(3.19) следует (3.14).

Нам будут нужны такие свойства $\widetilde{s}(x_\lambda)$, как

$$\widetilde{n}\, s(x_\lambda) \sim -\frac{1}{2}\frac{x_\lambda^2}{B_\lambda^2}, \quad n \to \infty, \tag{3.20}$$

$$n\,(\widetilde{s}(x_\lambda - t) - \widetilde{s}(x_\lambda)) \sim \frac{t}{B_\lambda^2}\Big(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t\Big),\ 0 \leqslant t \leqslant x_\lambda, \quad n \to \infty, \tag{3.21}$$

равномерно по $x \in [0, (1-\varepsilon)\Lambda_n]$.

Сначала докажем (3.21). Предварительно заметим, что $\Delta(t) = (\ln \widetilde{L}(t))'$ (см. (3.17)). Имеем,

$$\widetilde{s}'(v) = -\frac{1}{n}\,u\Big(\frac{v}{n}\Big), \quad \widetilde{s}''(v) = \Big(n\,\sigma_\lambda\Big(\lambda + u\Big(\frac{v}{n}\Big)\Big)\Big)^{-2}, \tag{3.22}$$

где $u(a)$ – решение уравнения (3.8).

Таким образом,

$$\widetilde{s}(x_\lambda - t) - \widetilde{s}(x_\lambda) = -t\,\widetilde{s}'(x_\lambda) + \frac{1}{2}\,t^2\,\widetilde{s}''(\theta), \quad x_\lambda - t < \theta < x_\lambda.$$

Правая часть здесь при $n \to \infty$ в соответствии с (3.22), (3.9) и (3.8) при $a = \frac{x_\lambda}{n}$ равна $\frac{t}{nB_\lambda^2}(x_\lambda(1+o(1)) - (\frac{1}{2} + o(1))\,t) = \frac{t}{nB_\lambda^2}(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t)\,(1+o(1))$, что и доказывает (3.21). Оценка (3.20) вытекает из (3.21) при $t = x_\lambda$, так как $\widetilde{s}(0) = 0$.

Приступим к доказательству теоремы 2. Если $0 \leqslant x_\lambda \leqslant \rho_n\,B_\lambda$, где ρ_n стремится к бесконечности достаточно медленно, то равенство (1.15) вытекает из (1.11a) и (3.20). Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что

$$\rho_n\,B_\lambda < x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\,\Lambda_n. \tag{3.23}$$

Обозначим через A интервал $[x, x+y)$. Нетрудно показать (см. [12, (27), (45)]), что

$$V_\lambda^{*n}(A) \leqslant V^{*n}(A) \leqslant V_\lambda^{*n}(A) + n\int_{B_\lambda}^{\infty} \overline{V}_{n-1}(x-t)\,V(dt), \tag{3.24}$$

где в соответствии с обозначениями перед (1.12)

$$V_\lambda^{*n}(A) = \mathbf{P}\,(S_n \in A,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant B_\lambda),$$
$$V^{*n}(A) = \mathbf{P}\,(S_n \in A) \quad \text{и} \quad \overline{V}_m(z) = \mathbf{P}\,(S_m \geqslant z). \tag{3.25}$$

Положим

$$I = \int\limits_{B_\lambda}^{\infty} \overline{V}_{n-1}(x-t)\,V(dt) =$$

$$\Bigl(\int\limits_{B_\lambda}^{x_\lambda} + \int\limits_{x_\lambda}^{x-k} + \int\limits_{x-k}^{\infty}\Bigr)\overline{V}_{n-1}(x-t)\,V(dt) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{3.26}$$

где $k = n\,m(\alpha)$, причем $\alpha \in (0,\lambda)$ и удовлетворяет условию $f(\alpha) = \ln L(\lambda) - \lambda\, m(\alpha) > 0$. Такое α существует. Действительно, если $0 \leqslant v, u \leqslant \lambda$, то

$$\ln L(u) = \ln L(v) + (u-v)\,m(v) + \frac{1}{2}\,(u-v)^2\,\sigma^2(\theta),\ \ \theta \in (v,u),$$

откуда при $u = 0$, $v = \lambda$ получим $f(\lambda) < 0$; при $u = \lambda, v = 0$ и $m(0) > -\infty$ имеем $f(0) > 0$ (если $m(0) = -\infty$, то $f(0) = +\infty$). Остается заметить, что функция $f(\alpha)$ убывает на $[0,\lambda]$, поскольку $f'(\alpha) = -\sigma^2(\alpha) < 0$.

Сначала оценим I_3. Имеем,

$$I_3 \leqslant \int\limits_{x-k}^{\infty} V(dt) \leqslant \frac{1}{(x-k)^2}\, e^{-\lambda(x-k)} D_\lambda(x-k).$$

Поскольку $x - k \geqslant x_\lambda$ (напоминаем, что $m(h)$ возрастает), отсюда при $y \geqslant \varepsilon$ получим (см.(1.7) и (3.20)) равномерно в интервале (3.23)

$$n\,I_3 = O(1)\,\frac{n}{x_\lambda^2}\,e^{-\lambda x}\,L^n(\lambda)\,e^{-nf(\alpha)-g(x-k)} =$$
$$o(1)\,(1-e^{-\lambda y})\,I_\lambda(x)\,e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda)}, \quad n \to \infty. \tag{3.27}$$

Теперь рассмотрим I_2:

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\overline{V}_1(0)} \int\limits_{x_\lambda}^{x-k} \overline{V}_n(x-t)\,V(dt), \tag{3.28}$$

причем $\overline{V}_1(0) = \mathbf{P}(X_1 \geqslant 0) > 0$, так как $\lambda < \infty$.

По (1.8) при $y = \infty$ заключаем

$$\overline{V}_n(x-t) = \frac{1+o(1)}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, e^{Q(x-t)},$$

$$\frac{x-t}{n} \in [m(\alpha), m(\lambda)], \quad n \to \infty, \tag{3.29}$$

где $h = h(\frac{x-t}{n})$– решение уравнения $m(h) = \frac{x-t}{n}$, $Q(x-t) = n\,L(h) - (x-t)\,h$.

Из (3.28), (3.29) и того, что $h \in [\alpha, \lambda]$, а $(Q(x-t) - \lambda t)'_t = h - \lambda \leqslant 0$, следует

$$\begin{aligned} I_2 = &O(1)\,\frac{1}{x_\lambda^2}\frac{1}{B_\lambda}\int_{x_\lambda}^{x-k} e^{Q(x-t)-\lambda t}\, t^2\, e^{\lambda t}\, V(dt) = \\ &O(1)\,\frac{1}{x_\lambda^2\, B_\lambda}\, e^{Q(x-x_\lambda)-\lambda x_\lambda} D_\lambda(x_\lambda) = \\ &O\left(\frac{1}{x_\lambda^2}\right) I_\lambda(x)\, e^{-g(x_\lambda)}, \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{3.30}$$

поскольку $x - x_\lambda = n\,m(\lambda)$ и $Q(x-x_\lambda) = n \ln L(\lambda) - \lambda\,(x - x_\lambda)$.

Далее, пусть $\gamma = \frac{2}{2(1-\varepsilon)}$ и $\omega = \omega(\gamma/B_\lambda^2)$ является решением уравнения $\frac{\overline{g}(\omega_n)}{\omega_n^2} = \frac{\gamma}{B_\lambda^2}$. Тогда (см. (1.13) и (1.14)) при всех $n > n_\varepsilon$ $x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\Lambda_n \leqslant (1-\varepsilon)\omega\left(\frac{1}{2} + (1+\varepsilon)\frac{\overline{g}(\omega)}{\omega^2}\, B_\lambda^2\right) = \omega$ и $g(x_\lambda) \geqslant (1-\varepsilon/2)\,x_\lambda^2\,\frac{\overline{g}(x_\lambda)}{x_\lambda^2} \geqslant (1-\varepsilon/2)\,x_\lambda^2\,\frac{\overline{g}(\omega)}{\omega^2} = \frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}\,\frac{x_\lambda^2}{2\,B_\lambda^2}$.

Отсюда, из (3.30) и (3.20) получим при $y \geqslant \varepsilon$ равномерно в интервале (3.23)

$$\begin{aligned} n\,I_2 = &\ o(1)\,I_\lambda(x)\,e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda)} = \\ &o(1)\,yK(\lambda y)\,I_\lambda(x)\,e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda)}, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Займемся I_1. Мы видим, что

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\overline{V}_1(0)}\int_{B_\lambda}^{x_\lambda} \overline{V}_n(x-t)\, V(dt) \leqslant$$

$$\frac{1}{\overline{\overline{V}}_1(0)} \max_{x-x_\lambda \leqslant z \leqslant x-B_\lambda} \frac{\overline{V}_n(z)}{I_\lambda(z)\, e^{n\,\widetilde{s}(z_\lambda)}} \int\limits_{B_\lambda}^{x_\lambda} I_\lambda(x-t)\, e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda - t)}\, V(dt), \quad (3.32)$$

где $z_\lambda = z - n\,m(\lambda)$. Последний интеграл перепишем в виде

$$J = I_\lambda(x)\, e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda)}\, J_1,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{B_\lambda}^{x_\lambda} e^{n\,(\widetilde{s}(x_\lambda - t) - \widetilde{s}(x_\lambda)}\, e^{\lambda t} V(dt). \quad (3.33)$$

Имеем по (3.21) при $n \geqslant n_\varepsilon$, интегрируя по частям,

$$J_1 \leqslant \frac{1}{B_\lambda^2} \int\limits_{B_\lambda}^{x_\lambda} e^{(1+\varepsilon)\,t\,(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t)/B_\lambda^2} t^2\, e^{\lambda t} V(dt) \leqslant$$

$$\frac{1}{B_\lambda^2}\Bigg(e^{(1+\varepsilon)\,(x_\lambda - \frac{1}{2}\,B_\lambda)/B_\lambda}\, D_\lambda(B_\lambda) + \quad (3.34)$$

$$(1+\varepsilon)\,\frac{x_\lambda}{B_\lambda^2} \int\limits_{B_\lambda}^{x_\lambda} D_\lambda(t) e^{(1+\varepsilon)\,t\,(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t)/B_\lambda^2} dt \Bigg).$$

Пусть $\gamma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Тогда при $t \geqslant B_\lambda$

$$(1+\gamma)t\left(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t\right)/B_\lambda^2 - g(t) \leqslant (1+\gamma)\,\frac{t}{B_\lambda^2}\left(x_\lambda - \frac{t}{1+\gamma}\left(\frac{1}{2} + \frac{g(t)}{t^2}\right) B_\lambda^2\right) \leqslant$$

$$(1+\gamma)\,\frac{t}{B_\lambda^2}\left((1-\varepsilon)\,\Lambda_n - \frac{1}{1+\gamma} \min_{t \geqslant B_\lambda} t\left(\frac{1}{2} + \frac{g(t)}{t^2}\,B_\lambda^2\right)\right) = 0,$$

откуда

$$(1+\varepsilon)\,t\,(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t)/B_\lambda^2 - g(t) \leqslant -\overline{\varepsilon}\,t\left(x_\lambda - \frac{1}{2}\,t\right)/B_\lambda^2 \leqslant -\frac{\overline{\varepsilon}\,t\,x_\lambda}{2B_\lambda^2},$$

$$\overline{\varepsilon} = \gamma - \varepsilon, \;\; B_\lambda \leqslant t \leqslant x_\lambda. \quad (3.35)$$

Используя (1.7) и (3.35) в (3.34) легко получим

$$n\,J_1 = o(1)(1 - e^{-\lambda y}), \;\; \rho_n B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\,\Lambda_n, \quad n \to \infty. \quad (3.36)$$

Введем некоторые дополнительные обозначения. Положим (см. (1.10), (3.25))

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &= \frac{P_n(x,y)}{yK(\lambda y)I_\lambda(x)\,e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda)}}, \\ \tau_\lambda(x,y) &= \frac{V_\lambda^{*n}([x,x+y))}{yK(\lambda y)I_\lambda(x)\,e^{n\,\widetilde{s}(x_\lambda)}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

По (3.24)

$$\tau_\lambda(x,y) \leqslant \tau(x,y) \quad \text{при всех} \quad x, \text{ всех} \quad y>0 \quad \text{и} \quad n \geqslant 1; \tag{3.38}$$

кроме того, из (3.26), (3.27), (3.31)–(3.33) и (3.36) следует, что равномерно по $y \geqslant \varepsilon$ и x из интервала (3.23)

$$\begin{aligned} \tau(x,y) \leqslant \tau_\lambda(x,y) + o(1)(1 + \max_{0 \leqslant z_\lambda < x_\lambda} \tau(z,\infty)) &= \\ \tau_\lambda(x,y) + o(1)(1+\tau_n), \quad n \to \infty&, \end{aligned} \tag{3.39}$$

где $\tau_n = \max\limits_{\rho_n B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\Lambda_n} \tau(x,\infty)$ (напоминаем, что соотношение (1.15) при $0 \leqslant x_\lambda \leqslant \rho_n B_\lambda$ выполняется).

Предположим, что

$$\sup_{y \geqslant \varepsilon,\, \rho_n B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\Lambda_n} |\tau_\lambda(x,y) - 1| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.40}$$

Тогда из (3.38), (3.39) получим равномерно по $y \geqslant \varepsilon$, $\rho_n B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\Lambda_n$

$$1 + o(1) \leqslant \tau(x,y) \leqslant 1 + o(1)(1+\tau_n), \quad n \to \infty.$$

Отсюда при $y = \infty$, в частности, следует, что $\tau_n \to 1$, $n \to \infty$, и, следовательно,

$$\sup_{y \geqslant \varepsilon,\, \rho_n B_\lambda \leqslant x_\lambda \leqslant (1-\varepsilon)\Lambda_n} |\tau(x,y) - 1| \to 0, \quad n \to \infty,$$

что (см.(3.37)) совпадает с заключением теоремы 2.

Итак, нам остается проверить условие (3.40).

Для доказательства (3.40) применим рассуждения, которые ранее позволили получить (2.14), к независимым случайным величинам $X_{\lambda 1}, \ldots, X_{\lambda n}$ с общей функцией распределения $V_\lambda(t)$ (см.

(1.12)) вместо случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Учитывая, что $\mathbf{P}\,(X_{\lambda 1} + \cdots + X_{\lambda n} \in A) = L_\lambda^{-n}(\lambda)\, V_\lambda^{*n}(A)$, получим

$$V_\lambda^{*n}([x, x+y)) = \frac{1 - e^{-h\,y}}{\tau_\lambda \sqrt{2\pi}}\, e^{n\, s_\lambda(x)}\, (1 + \theta\, (\tau_\lambda^{-2} + \varepsilon_\lambda^{(h)}(y))), \tag{3.41}$$

где $\tau_\lambda = h\,\sigma_\lambda(h)\sqrt{n}$, h является решением уравнения (1.16), $s_\lambda(x)$ такое же, как в (3.13), а $\varepsilon_\lambda^{(h)}(y)$ отличается от $\varepsilon^{(h)}(y)$ (см.(2.3), (2.1)) тем, что в нем вместо случайной величины $X^{(h)}$ с распределением (1.6) используется случайная величина $X_\lambda^{(h)}$ с распределением

$$V_\lambda^{(h)}(dx) = \frac{1}{L_\lambda(h)}\, e^{hx}\, V_\lambda(dx). \tag{3.42}$$

Сразу отметим, что из (3.4) и (3.1) следует

$$\tau_\lambda \sim \lambda\, B_\lambda, \quad n \to \infty. \tag{3.43}$$

Далее, при $y > 0$ и $0 < \delta = h - \lambda < \lambda$

$$1 - e^{-h\,y} = (1 - e^{-\lambda\,y})\Big(1 + \theta\,\frac{\delta}{\lambda}\Big), \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.44}$$

В самом деле, пусть $f(t) = \frac{(1-e^{-\gamma\,t})e^{-t}}{1-e^{-t}}$, где $\gamma = \frac{\delta}{\lambda}$. Тогда $1 - \frac{1-e^{-h\,y}}{1-e^{-\lambda\,y}} = f(\lambda\,y)$. Положим $\overline{t} = \frac{1}{\gamma}\ln(1+\gamma)$. Если $\lambda\,y \geqslant \overline{t}$, то $f(\lambda\,y) \leqslant \frac{1}{1-e^{-\overline{t}}}\max\limits_{t \geqslant \overline{t}} e^{-t}\,(1 - e^{-\gamma\,t}) = f(\overline{t}) = \frac{\gamma}{1+\gamma}(e^{\overline{t}} - 1)^{-1} \leqslant \frac{\gamma}{1+\gamma}$, так как $\gamma \leqslant 1$ и $\overline{t} \leqslant \ln 2$. Если же $0 < t = \lambda\,y < \overline{t}$, то $f(\lambda\,y) = \gamma\,\frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\frac{1-e^{-\gamma\,t}}{\gamma\,t} \leqslant \gamma$, поскольку $t\,e^{-t} \leqslant 1 - e^{-t}$, а функция $\frac{1-e^{-v}}{v}$ убывает. Проделанные рассуждения приводят к (3.44).

Из (3.43), (3.44), (3.14) и (3.41) следует, что (3.40) выполняется, если

$$\sup_{y \geqslant \varepsilon,\, \lambda \leqslant h \leqslant \lambda + \delta_\lambda} \varepsilon_\lambda^{(h)}(y) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.45}$$

Оценка (3.45) доказывается с учетом (3.2) вместе с соответствующими выкладками, (3.4), (3.5), (3.12) и (3.43) аналогично (2.15)–(2.17). При этом, в аналоге соотношения (2.16) вместо $\psi_n^{(h)}$ можно воспользоваться оценкой $\frac{1}{\sigma^3(h)\sqrt{n}}\,\mathbf{E}\,|X_\lambda^{(h)} - m_\lambda(h)|^3$, которая, как легко показать с учетом (3.23) и (3.12), равна $o(\frac{1}{\delta\sqrt{n}}) = o(1)$, $n \to \infty$.

Теперь (см. (3.42) и (1.16)), при $0 \leqslant \delta = h - \lambda \leqslant \delta_\lambda$

$$|\,\mathbf{E}\, e^{itX_\lambda^{(h)}}\,| = \frac{1}{L_\lambda(h)}\left|\int\limits_{-\infty}^{B_\lambda} e^{itx+hx}\, V(dx)\right| =$$

$$\frac{L(\lambda)}{L_\lambda(h)}\left|\mathbf{E}\, e^{itX^{(\lambda)}} - \int\limits_{B_\lambda}^{\infty} e^{itx}\, V^{(\lambda)}(dx) + \int\limits_{-\infty}^{B_\lambda} e^{itx}(e^{(h-\lambda)x} - 1)\, V^{(\lambda)}(dx)\right| \leqslant$$

$$\frac{L(\lambda)}{L_\lambda(h)}\Bigg(|\,\mathbf{E}\, e^{itX^{(\lambda)}}\,| + \int\limits_{B_\lambda}^{\infty} V^{(\lambda)}(dx) + (e-1)\delta \int\limits_{-\infty}^{1/\delta} |x|\, V^{(\lambda)}(dx) +$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{B_\lambda} e^{\delta x}\, V^{(\lambda)}(dx)\Bigg) = |\,\mathbf{E}\, e^{itX^{(\lambda)}}\,| + o(1), \quad n \to \infty,$$

что позволяет получить необходимые оценки в аналоге соотношения (2.17).

Теорема 2 доказана.

Равносильность соотношений (1.15) и (1.15') следует из (3.44) и (3.14).

Следствие 1 вытекает из теоремы 2 по (3.20).

Первая часть замечания 1 доказана в [10, (19)]. Проверим вторую его часть. Рассмотрим соотношение

$$\frac{\overline{\eta}(t)}{\widetilde{g}(\overline{\eta}(t))} = t, \;\; t \geqslant t_0 > 0, \tag{3.46}$$

где $\widetilde{g}(u) = g_0^{\frac{1}{2-\alpha}}(u)$. Из условия (1.19) следует, в частности, что функция $g_0(u)$ медленно меняется при $u \to \infty$. Поэтому, функция $\eta(z)$, удовлетворяющая уравнению (1.17), такова, что $\eta(z) \sim \overline{\eta}(z^{\frac{1}{2-\alpha}})$, $z \to \infty$, и нам достаточно показать, что $\overline{\eta}(z) \sim t\widetilde{g}(t)$, $t \to \infty$, или $\widetilde{g}(\overline{\eta}(t)) \sim \widetilde{g}(t)$, $t \to \infty$, или (см. (3.46))

$$\widetilde{g}(\psi(u)) \sim \widetilde{g}(u), \;\; u \to \infty, \tag{3.47}$$

где $\psi(u) = \frac{u}{\widetilde{g}(u)}$.

Положим $\psi(u) = ue^v$, $v = \ln \frac{1}{\widetilde{g}(u)}$. Тогда

$$\widetilde{g}(\psi(u)) - \widetilde{g}(u) = v\widetilde{g}'(ue^\theta)ue^\theta, \;\; 0 < \theta < v. \tag{3.48}$$

Пусть выполняется первое предположение в (1.20). Учитывая (1.19) и вытекающее оттуда соотношение $\ln\widetilde{g}(\psi(u)) \sim \ln\widetilde{g}(u)$, $u\to\infty$, из (3.48) получим при $n\to\infty$

$$|\widetilde{g}(\psi(u)) - \widetilde{g}(u)| = o(1)|\ln\widetilde{g}(u)| \max_{y\in(u,\psi(u))} \frac{\widetilde{g}(y)}{1+|\ln\widetilde{g}(y)|} =$$

$$o(1)\left(\frac{|\ln\widetilde{g}(u)|}{1+|\ln\widetilde{g}(u)|} + \frac{|\ln\widetilde{g}(\psi(u))|}{1+|\ln\widetilde{g}(\psi(u))|}\right) = o(1)(\widetilde{g}(u)+\widetilde{g}(\psi(u)).$$

Отсюда следует (3.47). Второй случай в (1.20) анализируется аналогично. Замечание 1 доказано.

Соотношение (1.22) вытекает, как уже упоминалось, из [10, замечание 1 и лемма 1а]. Надо лишь заметить, что (см. [10, (17а), (5)]) $\varkappa_n \asymp \eta(B_\lambda))$, $n\to\infty$, и что аналог условия (21) из [10] также выполняется, поскольку из (1.7), (1.14), (1.21),(1.6) и (1.17) следует, что при $\eta=\eta(z)$

$$\int\limits_{|y|>\frac{z^2}{\eta}} = O(e^{-g(z^2/\eta)}) = o(\frac{z^2}{\eta}/z)^2, \quad z\to\infty$$

(в самом деле, по (1.21) и (1.17) $g(z^2/\eta) \sim \overline{g}((\frac{z}{\eta})^2\,\eta) \geqslant (\frac{z}{\eta})^{2\alpha}\overline{g}(\eta) \sim (\frac{\eta}{z})^{2-2\alpha}$.)

Представление (1.25) является следствием [10, лемма 1б].

Следствия 2 и 3 вытекают из теоремы 2 и замечаний 1 и 2 (равенство (1.26) соответствует соотношениям (1.19), (1.20)).

Литература

1. Г. Крамер, *Об одной новой теореме теории вероятностей.* — Успехи матем. наук **X** (1944), 166–178.
2. В. В. Петров, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **10**, № 2 (1965), 310–322.
3. R. R. Bahadur, Rao R. Ranga, *On deviations of the sample mean.* — Ann. Math. Stat. **31** no. 4 (1960), 1015–1027.
4. А. А. Боровков, Б. А. Рогозин, *О центральной предельной теореме в многомерном случае.* — Теория вероятн. и ее примен. **10**, № 1 (1965), 61–69.
5. T. Höglund, *A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **49** (1979), 105–117.
6. А. В. Нагаев, *The Cramer large deviations when the extreme conjugate distribution is heavy-tailed.* — Теория вероятн. и ее примен. **43**, № 3 (1998), 456–475.

7. B. von Bahr, *Multi-dimensional integral limit theorems for large deviations.* — Ark. Mat. **7** (1967), 89–99.
8. L. V. Osipov, *On large deviations for sums of random vectors in R_k.* — J. Mult. Anal. **11** no. 2 (1981), 115–126.
9. Л. В. Ким, А. В. Нагаев, *О несимметричной проблеме больших уклонений.* — Теория вероятн. и ее примен. **22**, № 2 (1977), 335–346.
10. Л. В. Розовский, *Вероятности больших уклонений на всей оси.* — Теория вероятн. и ее примен. **38**, № 1 (1993), 79–109.
11. Л. В. Розовский, *Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, № 4 (1989), 686–705.
12. Л. В. Розовский, *О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, № 4 (1981), 847–857.
13. L. V. Rozovsky, *Asymptotic Expansions for Probabilities of Large Deviations.* — Probab. Theor. Related Fields **73** no. 2 (1986), 299–318.
14. В. В. Петров,, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).
15. L. V. Rozovsky, *Large deviation probabilities for sums of independent unlattice random variables under unilateral Cramer condition.* — In: 22nd European Meeting of Statisticians, 7th Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Stat, Abstracts, TEV, Vilnius (1998), p. 394.
16. Л. В. Розовский, *О точности нормального приближения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 129–137.
17. Л. В. Розовский, *О неравенстве Дуба для характеристических функций.* — Теория вероятн. и ее примен. **44**, № 3 (1999), 650–652.

Rozovsky L. V. Large deviation probabilities for some classes of distributions, satisfying the Cramer condition.

In the note limit theorems on large deviations of sum $X_1 + \cdots + X_n$ of i.i.d. random variables under the assumption $\mathbf{E}\, X_1^2\, e^{\lambda X_1} < \infty$ for some $\lambda > 0$ are studied.

Санкт-Петербургская
Химико-Фармацевтическая
Академия

Поступило 29 сентября 2003 г.