Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

Б. П. Харламов

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследование непрерывных полумарковских процессов. Полумарковский процесс определяется как процесс, для которого марковское свойство выполняется для всех внутренних марковских моментов – таких, как моменты первого выхода из фиксированеных множеств и их итерации. Эти процессы можно рассматривать как обобщение строго марковских процессов [4]. Существуют специфические методы изучения и области приложения непрерывных полумарковских процессов [8].

В настоящей статье мы исследуем характеристический оператор, известный в теории марковских процессов. Для полумарковского процесса его определение аналогично. Однако его существование в этой ситуации требует специального доказательства. Мы покажем, что для полумарковского процесса диффузионного типа существование характеристического оператора является свойством решений дифференциального уравнения эллиптического типа, зависящего от параметра, определяющего распределение хода времени.

Исследование многомерных процессов опирается на результаты работы [7], где было получено асимптотическое разложение плотности распределения точки первого выхода процесса из малой окрестности его начальной точки (см. также [8]). В настоящей работе мы уточняем этот результат, чтобы привести его к виду, удобному для исследования характеристического оператора. Для вывода асимптотики математического ожидания времени первого выхода из малой окрестности начальной точки исследуется производная по параметру от решения исходного дифференциального уравнения. Одномерный случай требует отдельно-

Поддержано грантом ведущих научных школ НШ.2258.2003.1.

го изучения ввиду очевидного качественного отличия границы (состоящей из двух точек) одномерной окрестности от границы, например, двумерной окрестности. Однако с формальной точки зрения одномерные формулы можно вывести из общих формул, полученных для многомерных процессов.

Полумарковский процесс общего вида. Полумарковские процессы общего вида – это процессы со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{X}$, обладающих марковским свойством относительно момента первого выхода из любого множества $G \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – класс всех открытых подмножеств множества $\mathbb{X}$ [8].

Такими, в частности, будут все ступенчатые полумарковские процессы, а также все строго марковские процессы, в том числе – непрерывные. Пусть (P_x) $(x \in \mathbb{X})$ – измеримое согласованное семейство распределений данного полумарковского процесса, где P_x – вероятностная мера на измеримом множестве непрерывных отображений $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$, при этом $P_x(\xi(0) = x) = 1$. Полумарковской переходной функцией для данного процесса называется ядро $F_G(A \times B|\, x) = P_x(\sigma_G \in A,\, \xi(\sigma_G) \in B)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\sigma_G(\xi)$ – время первого выхода процесса из множества G. Полумарковской переходной производящей функцией мы называем ядро

$$f_G(\lambda,\, B|\, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_G(dt \times B|\, x),$$

где $\lambda \geq 0$. Полумарковское свойство процесса отражено в уравнении, которому подчиняются функции f_G при разных $G \in \mathfrak{A}$: $(\forall G_1, G_2 \in \mathfrak{A},\, G_1 \subset G_2)$

$$f_{G_2}(\lambda,\, B|\, x) = \int_{\mathbb{X}} f_{G_2}(\lambda,\, B|\, x_1) f_{G_1}(\lambda,\, dx_1|\, x). \tag{1}$$

Чтобы это уравнение имело смысл для всех $x \in \mathbb{X}$, а не только для $x \in G_1$, мы доопределяем $f_G(\lambda,\, B|\, x)$ на $\mathbb{X} \backslash G$ значением $I_B(x)$ (индикаторная функция множества B).

Процесс диффузионного типа. В настоящей статье мы рассматриваем полумарковские процессы диффузионного типа в области $S \subset \mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ $(d > 1)$. Так мы будем называть непрерывные полумарковские процессы, переходные производящие функции которых порождаются в этой области дифференциальным уравнением второго порядка эллиптического типа. Основное содержание статьи составляет решение задачи: по данному дифференциальному уравнению найти асимптотические локальные свойства ядра оператора задачи Дирихле, который интерпретируется как распределений точки первого выхода из малой окрестности начальной точки процесса. Соответствующая прямая задача: вывод дифференциального уравнения из локальных свойств ядра, – в данном случае сводится к вычислению характеристического оператора процесса.

2. Многомерный диффузионный процесс

Мы обозначаем точку многомерного пространства $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ в виде $p = (p^1, \dots, p^d)$, а частные производные от функции, заданной в этом пространстве, как

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial p^i}, \quad D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial p^i \partial p^j}.$$

В приведенных ниже интегралах мы обозначаем переменную интегрирования $p_1, p_2, \dots$ и т.д. В этих случаях $D_i^{(k)}, D_{ij}^{(k)}, \dots$ означает, что дифференцирование ведется по координатам точки p_k. Для обозначения координат мы будем использовать также оператор проектирования $\pi_i : \pi_i(p_k) = p_k^i$ – i-тая координата точки p_k.

Рассмотрим в области $S \in \mathfrak{A}$ частное дифференциальное уравнение эллиптического типа

$$\mathcal{L}u = 0, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{d} b^i D_i u - cu. \tag{3}$$

Здесь a^{ij}, b^i, c – непрерывные вещественные функции, заданные на S, такие, что $(\forall p \in S)$ $\big(a^{ij}(p)\big)$ – положительно определенная матрица, нормированная условием

$$\sum_{i=1}^{d} a^{ii}(p) = d \tag{4}$$

и $c(p) \geq 0$. Непрерывный полумарковский процесс называется *полумарковским процессом диффузионного типа* в области S, если для любого $\lambda \geq 0$ существует дифференциальный оператор эллиптического типа $\mathcal{L}$ (зависящий от λ) с описанными выше коэффициентами, так что при любом $G \in \mathfrak{A} \cap S$ функционал вида $\phi \mapsto f_G(\lambda, \phi | \cdot) \equiv \int_{\mathbb{X}} \phi(x)\, f_G(\lambda, dx | \cdot)$ этого процесса является решением задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}u = 0$ в G со значением ϕ на ∂G. В дальнейшем будет понятно, что дифференциальный оператор $\mathcal{L}$, зависит от λ только через коэффициент $c = c(\lambda, p)$.

Мы будем рассматривать случай, когда для области G с кусочно гладкой границей переходная производящая функция имеет плотность $h_G(\lambda, x | p)$ относительно лебеговой меры на границе: $f_G(\lambda, dx | p) = h_G(\lambda, x | p)\, dS(x)$. Уравнение (1) в этом случае переходит в интегральное уравнение относительно плотности

$$h_{G_2}(\lambda, x | p) = \int\limits_{\partial G_1} h_{G_2}(\lambda, x | p_1)\, h_{G_1}(\lambda, p_1 | p)\, dS(p_1). \qquad (5)$$

Нас будет интересовать асимптотика этой плотности при $G \downarrow p$ для любой точки $p \in S$.

Рассмотрим уравнение (2) в области S. Пусть эта область содержит начало координат – точку $\mathbf{0}$. На первом этапе исследования мы предположим, что $\mathbf{0}$ – начальная точка процесса и $(\forall i, j)\ a^{ij}(\mathbf{0}) = \delta^{ij}$ (символ Кронекера). В дальнейшем эти предположения будут сняты.

Пусть $\mathbf{0} \in G$, $RG = \{p : (\exists p_1 \in G)\ p = Rp_1\}$ $(R > 0)$ – преобразование масштаба множества G. При изменении масштаба будет меняться площадь границы измененного множества – ее лебегова мера: $|\partial(RG)| = R^{d-1} |\partial G|$. Ясно, что всякая разумная асимптотика вероятностных плотностей на $\partial(RG)$ должна учитывать этот нормирующий коэффициент. Для произвольных $p \in G$, $x \in \partial G$ обозначим

$$\widetilde{h}_G^R(\lambda, x | p) \equiv R^{d-1} h_{RG}(\lambda, Rx | Rp),$$
$$\widetilde{f}_G^R(\lambda, \phi | p) \equiv \int\limits_{\partial G} \phi(x)\, \widetilde{h}_G^R(\lambda, x | p)\, dS(x).$$

Класс областей $\mathfrak{A}^\circ(\beta)$. В книге [2, с. 95] определен следующий класс областей. Область G и ее граница принадлежат классу

$\mathcal{C}^{k,\alpha}$ ($k = 0,1,2,\ldots,\ 0 \le \alpha \le 1$), если для каждой точки $p_0 \in \partial G$ существует шар $B = B(p_0, r)$ (p_0 – центр, r – радиус) и взаимно однозначное отображение f этого шара на $G \subset \mathbb{R}^d$ такие, что:

(i) $f(B \cap G) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$;
(ii) $f(B \cap \partial G) \subset \partial(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$;
(iii) $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(B), \quad f^{-1} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(D)$.

Здесь $\mathcal{C}^{k,\alpha}(A)$ означает пространство k раз дифференцируемых функций, k-е производные которых непрерывны по Гёльдеру с показателем α на множестве A.

Пусть $\mathcal{R}(G) \equiv \inf\{r > 0 : G \subset B(\mathbf{0}, r)\}$. В дальнейшем мы будем рассматривать *нормированные окрестности нуля* вида $G^\circ = (1/\mathcal{R}(G))\, G$, касающиеся поверхности сферы $B(\mathbf{0}, 1)$.

Для положительного числа $\beta \ge 1$ обозначим $\mathfrak{A}^\circ(\beta)$ семейство нормированных окрестностей нуля такое, что $(\forall G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta))$ существует диффеоморфизм f класса $\mathcal{C}^{2,\alpha}(G)$, отображающий G на $B(\mathbf{0}, 1)$, такой, что $(\forall p_1, p_2 \in G) \quad \beta^{-1}\|p_1 - p_2\| \le |\,f(p_1) - f(p_2)| \le \beta\,\|p_1 - p_2\|$. Ясно, что $\mathfrak{A}^\circ(\beta) \subset \mathcal{C}^{2,\alpha}$.

Обозначим функцию Грина для оператора Лапласа в области G и, соответственно, производную от функции Грина (как функции от второго аргумента) по направлению внутренней нормали к границе области как

$$Q_G(p_1, p_2) \quad (p_1, p_2 \in G), \quad K_G(p_1, p_2) = \frac{\partial Q_G(p_1, p_2)}{\partial n_2} \quad (p_2 \in \partial G).$$

В следующей теореме рассматривается семейство окрестностей нуля вида RG, где $R > 0$ и $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$ при некотором $\beta \geqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты b^i непрерывно дифференцируемы в окрестности нуля и $a^{ij} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(S)$ при некотором $\alpha > 0$. Пусть кроме того $(\forall ij)$ $a^{ij}(\mathbf{0}) = \delta^{ij}$ и существуют положительные числа Λ_1 и Λ_2 такие, что*

$$\sum_{ij} a^{ij}(x) p^i p^j \ge \Lambda_1 \|p\|^2 \quad (\forall p \in S),$$

$$|\,b^i(x)|\,, |\,c(x)|\,, |\,a^{ij}(x) - \delta^{ij}|\,/\|x\| \le \Lambda_2$$

при всех i, j и x в некоторой окрестности нуля.

Тогда при $R \to 0$ имеет место слабая асимптотика

$$\widetilde{h}_G^R(\lambda, p|\,\mathbf{0}) = K_G(\mathbf{0}, p) +$$
$$+\int\limits_G Q_G(\mathbf{0}, p_1)\Big(2R\sum_i b^i(\mathbf{0}) D_i^{(1)} K_G(p_1, p) + R\,X_G(p_1, p) -$$
$$-2R^2 c(\mathbf{0}) K_G(p_1, p) + R^2 Y_G(p_1, p)\Big)\, dV(p_1) +$$
$$+o(R^2)\int\limits_G Q_G(\mathbf{0}, p_1)\, dV(p_1) \qquad (6)$$

($p \in \partial G$). При любом $\beta \geq 1$ член $o(R^2)$ равномерен по всем $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$ и $x \in G$. Он понимается в слабом смысле (интеграл по ∂G от этого члена, помноженного на любую ограниченную на этом множестве функцию класса $\mathcal{C}^{2,\alpha}(S)$ ($\alpha > 0$), деленный на R^2, стремится к нулю при $R \to 0$). При этом

$$X_G(p_1, p) = \sum_{ij}\sum_m D_m a^{ij}(\mathbf{0}) \pi_m(p_1) D_{ij}^{(1)} K_G(p_1, p),$$
$$Y_G(p_1, p) = \sum_{i=1}^{6} Y_i(p_1, p),$$

где

$$Y_1(p_1, p) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{mn} D_{mn} a^{ij}(\mathbf{0}) \pi_m(p_1)\pi_n(p_1) D_{ij}^{(1)} K_G(p_1, p),$$
$$Y_2(p_1, p) = 2\sum_i\sum_m D_m b^i(\mathbf{0}) \pi_m(p_1) D_i^{(1)} K_G(p_1, p),$$
$$Y_3(p_1, p) = \sum_{ij}\sum_m D_m a^{ij}(\mathbf{0}) \sum_{kl}\sum_n D_n a^{kl}(\mathbf{0}) \pi_m(p_1) \times$$
$$\times D_{ij}^{(1)} \int\limits_G Q_G(p_1, p_2) \pi_n(p_2) D_{kl}^{(2)} K_G(p_2, p)\, dV(p_2),$$
$$Y_4(p_1, p) = 2\sum_i b^i(\mathbf{0}) \sum_{kl}\sum_n D_n a^{kl}(\mathbf{0}) \times$$
$$\times D_i^{(1)} \int\limits_G Q_G(p_1, p_2) \pi_n(p_2) D_{kl}^{(2)} K_G(p_2, p)\, dV(p_2),$$

$$Y_5(p_1,p)=2\sum_{ij}\sum_m D_m a^{ij}(\mathbf{0})\sum_k b^k(\mathbf{0})\pi_m(p_1)\times$$

$$\times D_{ij}^{(1)}\int\limits_G Q_G(p_1,p_2)D_k^{(2)}K_G(p_2,p)\,dV(p_2),$$

$$Y_6(p_1,p)=4\sum_i b^i(\mathbf{0})\sum_k b^k(\mathbf{0})\times$$

$$\times D_i^{(1)}\int\limits_G Q_G(p_1,p_2)D_k^{(2)}K_G(p_2,p)\,dV(p_2).$$

Доказательство. На границе области RG мы рассмотрим функцию ϕ_R, где $\phi_R(Rp)=\phi(p)$ $(p\in\partial G)$. При этом $f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,p)$ является решением задачи Дирихле для уравнения (2) в области RG со значением ϕ_R на границе области. Уравнение $\mathcal{L}u=0$ перепишем в виде $\Delta u=-(2\mathcal{L}-\Delta)u$, где Δ – оператор Лапласа. Тогда, согласно известной формуле решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (см. [2] и др.), мы имеем

$$f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,p)=\psi_R(p)+\int\limits_{RG}Q_{RG}(p,p_1)\,(2\mathcal{L}-\Delta)f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,p_1)\,dV(p_1), \tag{7}$$

где

$$\psi_R(p)=\int\limits_{\partial\, RG}K_{RG}(p,p_1)\phi_R(p_1)\,dS(p_1).$$

Таким образом мы получаем интегральное уравнение относительно функционала $f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,p)$. Нашей целью является исследование плотности $\widetilde{h}_G^R(\lambda,x|\,p)$ и функционала $\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\,p)$, где, согласно обозначению (13), имеем

$$f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,Rp)=\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\,p).$$

Пользуясь представлением

$$Q_{RG}(p_1,p_2)=\begin{cases}\frac{1}{(d-2)\omega_d r_{12}^{d-2}}+g_1(p_1,p_2), & d\ge 3\\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{12}}+g_2(p_1,p_2), & d=2\end{cases}$$

и его единственностью (см. [6, с. 302]), где $r_{ij} = \|p_i - p_j\|$, ω_d – площадь поверхности единичного шара в d-мерном пространстве, $g_i(p_1,p_2)$ $(i=1,2)$ – регулярные гармонические функции, мы получаем соотношения

$$R^{d-2}Q_{RG}(Rp_1,Rp_2) = Q_G(p_1,p_2),\ R^{d-1}K_{RG}(Rp_1,Rp_2) = K_G(p_1,p_2).$$

Отсюда

$$\psi_R(Rp) = \int\limits_{\partial G} K_{RG}(Rp,Rp_1)\phi_R(Rp_1)R^{d-1}dS(p_1) =$$
$$= \int\limits_{\partial G} K_G(p,p_1)\phi(p_1)dS(p_1) \equiv \psi(p). \tag{8}$$

Кроме того, если мы обозначим $\overline{F}(p) = F(Rp)$, то

$$D_iF(Rp) = D_i\overline{F}(p)/R, \quad D_{ij}F(Rp) = D_{ij}\overline{F}(p)/R^2.$$

Отсюда

$$\int\limits_{RG} Q_{RG}(Rp,p_1)(2\mathcal{L}-\Delta)f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,p_1)\,dV(p_1) =$$
$$= \int\limits_{G} Q_{RG}(Rp,Rp_1)(2\mathcal{L}_R-\Delta_R)f_{RG}(\lambda,\phi_R|\,Rp_1)\,R^d\,dV(p_1) =$$
$$= \int\limits_{G} Q_G(p,p_1)(2\mathcal{L}_R-\Delta_R)\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\,p_1)\,R^2\,dV(p_1),$$

где

$$\mathcal{L}_Ru = \frac{1}{2}\sum_{ij}\overline{a}^{ij}D_{ij}u/R^2 + \sum_i\overline{b}^iD_iu/R - \overline{c}\,u, \quad \Delta_Ru = \Delta u/R^2.$$

По условию теоремы функция $(\overline{a}^{ij}(p)-\delta^{ij})/R = (a^{ij}(Rp)-\delta^{ij})/R$ ограничена в единичном шаре для достаточно малых R. Пользуясь этим, мы рассмотрим оператор $\mathcal{M}_R \equiv R(2\mathcal{L}_R - \Delta_R)$, с помощью которого интегральное уравнение (7) перепишем в виде

$$\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\,p) = \psi(p) + R\int\limits_G Q_G(p,p_1)\,\mathcal{M}_R^{(1)}\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\,p_1)\,dV(p_1) \quad (p\in G) \tag{9}$$

($p \in G$). Заметим также, что $\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\cdot)$ является решением уравнения $\mathcal{L}_R u = 0$ на G с граничным значением ϕ на ∂G.

Для оценки остаточного члена асимптотики нам потребуется норма функции, учитывающая ее производные, вида

$$|f|_{2;G} \equiv \sup_{p\in G}\sup_{ij}|D_{ij}f(p)| + \sup_{p\in G}\sup_{i}|D_i f(p)| + \sup_{p\in G}|f(p)|.$$

Априорная оценка этой нормы для функции $\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\cdot)$ следует из теоремы 6.6 [2, с. 100]:

$$|\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|\cdot)|_{2;G} \le C_0\,|\phi|_{2;G}, \tag{10}$$

с постоянной $C_0 = C_0(d,\Lambda_1,\Lambda_2,\beta)$, где $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$. Здесь, как и выше, предполагается, что функция ϕ задана и равномерно дважды непрерывно дифференцируема на $B(\mathbf{0},1)$. С другой стороны

$$|\mathcal{M}_R u| \le \sum_{ij}\frac{|\overline{a}^{ij}-\delta^{ij}|}{R}|D_{ij}u| + 2\sum_i|\overline{b}^i|\cdot|D_i u|$$
$$+2R|\overline{c}|\cdot|u| \le C_1\,|u|_{2;G},$$

где $C_1 = C_1(d,\Lambda_2)$. Далее, функция $u = \int_G Q(\cdot,p)f(p)\,dV(p)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = -f$ в области G с нулевыми граничными значениями. Из той же теоремы 6.6 [2] следует: $|u|_{2;G} \leqslant C_2|f|_{2;G}$, где $C_2 = C_2(d,\Lambda_2)$. Из уравнения (9) и приведенных оценок следует представление

$$\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|p) = \psi(p) + R\int_G Q_G(p,p_1)\,\mathcal{M}_R^{(1)}\psi(p_1)\,dV(p_1)$$
$$+R^2\int_G Q_G(p,p_1)\,\mathcal{M}_R^{(1)}\int_G Q_G(p_1,p_2)\,\mathcal{M}_R^{(2)}\psi(p_2)\,dV(p_2)\,dV(p_1) + \varepsilon(p), \tag{11}$$

где

$$\varepsilon(p) = R^3\int_G Q_G(p,p_1)\,\mathcal{M}_R^{(1)}\int_G Q_G(p_1,p_2)\,\mathcal{M}_R^{(2)}\int_G Q_G(p_2,p_3)$$
$$\times\mathcal{M}_R^{(3)}\widetilde{f}_G^R(\lambda,\phi|p_3)\,dV(p_3)\,dV(p_2)\,dV(p_1) = R^3\,Z(p)\int_G Q_G(p,p_1)\,dV(p_1),$$

$Z(p)$ – ограниченная функция на $B \equiv B(\mathbf{0}, 1)$ равномерно по всем $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$ для данного $\beta > 1$. Представим оператор $\mathcal{M}_R$ в виде

$$\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_0 + R\mathcal{N}_0 + \mathcal{W}_R,$$

где

$$\mathcal{M}_0 u = \sum_{ij} \sum_m D_m a^{ij}(\mathbf{0}) \pi_m(p) D_{ij} u + 2 \sum_i b^i(\mathbf{0}) D_i u,$$

$$\mathcal{N}_0 u = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{mn} D_{mn} a^{ij}(\mathbf{0}) \pi_m(p) \pi_n(p)\, D_{ij} u$$

$$+ 2 \sum_i \sum_m D_m b^i(\mathbf{0}) \pi_m(p)\, D_i u - 2c(\mathbf{0})\, u,$$

$$\mathcal{W}_R u = \sum_{ij} \alpha_R^{ij}(p)\, D_{ij} u + \sum_i \beta_R^i(p)\, D_i u - 2R\,(c(Rp) - c(\mathbf{0}))\, u,$$

где

$$\alpha_R^{ij}(p) = (a^{ij}(Rp) - \delta^{ij})/R - \sum_m D_m a^{ij}(\mathbf{0}) \pi_m(p)$$

$$- \frac{1}{2} R \sum_{mn} D_{mn} a^{ij}(\mathbf{0}) \pi_m(p) \pi_n(p)),$$

$$\beta_R^i(p) = 2b^i(Rp) - 2b^i(\mathbf{0}) - 2R \sum_m D_m b^i(\mathbf{0}) \pi_m(p).$$

Коэффициенты $\alpha_R^{ij}(p)$, $\beta_R^i(p)$, $R\,(c(Rp) - c(\mathbf{0}))$ очевидно имеют порядок $o(R)$ при $R \to 0$ равномерно по всем $p \in B$. Из предыдущих оценок и условий теоремы следует, что $|\,\mathcal{M}_0 u|_{2;G}$ и $|\,\mathcal{N}_0 u|_{2;G}$ ограничены и $|\,\mathcal{W}_R u|_{2;G} = o(R)$ для любой функции u с ограниченной нормой $|\,u|_{2;G}$ равномерно по всем $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$. Отсюда в разложении функции $\widetilde{f}_G^R(\lambda, \phi|\, x)$ по степеням R коэффициент при первой степени равен

$$\int_G Q(x,p) \mathcal{M}_0 \psi(p)\, dV(p),$$

при второй –

$$\int_G Q(x,p) \mathcal{N}_0 \psi(p)\, dV(p)$$

$$+ \int_G Q(x,p_1) \mathcal{M}_0^{(1)} \int_G Q(p_1,p) \mathcal{M}_0 \psi(p)\, dV(p)\, dV(p_1).$$

Остальные члены в совокупности дают под знаком интеграла функцию, имеющую порядок $o(R)$ для любой функции ϕ из класса дважды непрерывно дифференцируемых на B функций равномерно по всем $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$. Полагая $x = \mathbf{0}$, подставляя в коэффициенты разложения значение функции $\psi(p)$ и меняя порядок интегрирования, мы получаем формулу (6) с соответствующими значениями ядер $X_G(p_1, p)$ и $Y_G(p_1, p)$. $\bullet$

Заметим, что функция $X_G(p_1, \cdot)$ ортогональна любой постоянной и любой линейной функции на границе, функция $Y_G(p_1, \cdot)$ ортогональна любой постоянной функции на границе, что следует из свойств

$$\int\limits_{\partial G} K(p_1, p_2)\, dS(p_2) = 1, \quad \int\limits_{\partial G} K(p_1, p_2)(\pi_k(p_2) - \pi_k(p_1))\, dS(p_2) = 0,$$

которые являются условием нормировки и прямым следствием формулы Грина соответственно (см. [2, 6] и др.).

3. Матрица коэффициентов общего вида

Рассмотрим полумарковский процесс, начинающийся в произвольной точке x произвольного подмножества $G \subset S$ $(G \in \mathfrak{A})$ до момента первого выхода из G. Для точки x, вообще говоря, не выполняется условие $a^{ij}(x) = \delta^{ij}$. Функционал $f_G(\lambda, \phi|\cdot)$ этого процесса удовлетворяет уравнению (2) с произвольной невырожденной положительно определенной непрерывной матрицей (a^{ij}) коэффициентов при вторых производных, для которой выполнено условие нормировки (4). Мы будем учитывать представление этой матрицы в виде $(a^{ij}(x)) = \overline{M}_x^T \overline{M}_x$, где $\overline{M}_x \equiv (\overline{M}_x^{ij})$ – некоторая матрица невырожденного линейного преобразования, $\overline{M}_x^T$ – транспонированная матрица $\overline{M}_x$.

Для выбранной точки x преобразуем все точечные множества исходного пространства $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R}^d$ в соответствии с отображением $p \mapsto y = N_x p \equiv M_x(p - x)$, где M_x – матрица, обратная к $\overline{M}_x$ $(\overline{M}_x = M_x^{-1})$. Отображение N_x индуцирует отображение функционального пространства $\mathcal{D}$ в себя, которое мы обозначим той же буквой. Таким образом, по определению, $(N_x\xi)(t) = N_x(\xi(t))$ $(\xi \in \mathcal{D},\, t \geq 0)$. При этом $\sigma_{N_x G}(N_x\xi) = \sigma_G(\xi)$, $\pi_{\sigma_{N_x G}}(N_x\xi) = N_x \pi_{\sigma_G}(\xi)$ (здесь использовано обозначение $\pi_\tau(\xi) \equiv \xi(\tau)$ на множестве $\{\tau < \infty\}$, τ – марковский момент). Для заданного полумарковского семейства мер (P_p) отображение N_x индуцирует семейство мер $(P_p^{N_x})$, где $P_{N_x p}^{N_x}(N_x S) = P_p(S)$ $(S \in \mathcal{F})$, а вместе с ним – семейство полумарковских переходных и переходных производящих функций:

$$F_{N_x G}^{N_x}(A \times N_x S \,|\, N_x p) = F_G(A \times S \,|\, p),\ f_{N_x G}^{N_x}(\lambda,\, N_x S \,|\, N_x p) = f_G(\lambda,\, S \,|\, p).$$

Очевидно, что линейное отображение пространства состояний в себя сохраняет полумарковское свойство процесса и диффузионный тип процесса. Обозначим $\overline{u}(p) \equiv u(N_x^{-1} p)$. Из предыдущего равенства мер следует равенство функционалов

$$f_{N_x G}^{N_x}(\lambda, \overline{\phi} |\, N_x p) = f_G(\lambda, \phi |\, p).$$

При этом функционал $f_{G_1}^{N_x}(\lambda, \phi_1 |\, \cdot)$ удовлетворяет преобразованному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \widetilde{a}^{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{d} \widetilde{b}^i D_i u - \widetilde{c}\, u = 0, \tag{12}$$

на множестве G_1 со значением ϕ_1 на границе этого множества. В этом уравнении имеем $\widetilde{c}(x) = \overline{c}(x)$. Значения других коэффициентов уравнения вытекают из правил дифференцирования. При этом

$$D_i u(p) = \sum_{k=1}^{d} D_k \overline{u}(N_x p)\, M_x^{ki}, \quad D_{ij} u(p) = \sum_{kl} D_{kl} \overline{u}(N_x p)\, M_x^{ki} M_x^{lj}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{d} b^i(p) D_i u(p) = \sum_{ik} M_x^{ki}\, \overline{b}^i (N_x p) D_k \overline{u}(N_x p).$$

$$\sum_{ij} a^{ij}(p) D_{ij} u(p) = \sum_{kl} D_{kl} \overline{u}(N_x p) \sum_{ij} \overline{a}^{ij}(N_x p) M_x^{ki} M_x^{lj}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{b}^k = \sum_{i=1}^{d} M_x^{ki} \overline{b}^i, \quad \widetilde{a}^{kl} = \sum_{ij} M_x^{ki} M_x^{lj} \overline{a}^{ij}. \tag{13}$$

При этом

$$\widetilde{a}^{kl}(\mathbf{0}) = \sum_{ij} M_x^{ki} M_x^{lj} a^{ij}(x) = \sum_{ij} M_x^{ki} M_x^{lj} \sum_{m=1}^{d} \overline{M}_x^{mi} \overline{M}_x^{mj}$$

$$= \sum_{m=1}^{d} \delta^{km}\delta^{lm} = \delta^{kl}.$$

Таким образом, проведенное в теореме 1 исследование асимптотики при малых значениях параметра применимо к плотности точки первого выхода $h_G^{N_x}(\lambda, p|\, y)$ преобразованного процесса. Нам требуется найти асимптотику для исходного процесса. Заменяя переменные в интеграле, получаем

$$\int\limits_{\partial G} \phi(p)\, h_G(\lambda, p|\, x)\, dS(p) = \int\limits_{N_x \partial G} \phi(N_x^{-1}p)\, \frac{h_G(\lambda, N_x^{-1}p|\, x)}{J_G^{N_x}(N_x^{-1}p)}\, dS(p),$$

где $J_G^{N_x}(p)$ – коэффициент изменения размера элемента поверхности ∂G при отображении $p \mapsto y = N_x p$, зависящий от положения и ориентации этого элемента в пространстве (аналог якобиана), т.е.

$$J_G^{N_x}(p) \sim \frac{|N_x \Delta S|}{|\Delta S|} = \frac{|M_x(\Delta S - x)|}{|\Delta S - x|} \sim J_{G-x}^{M_x}(p-x) \quad (\operatorname{diam} \Delta S \to 0),$$

где $p \in \Delta S \subset \partial G$, $|\Delta S|$ – лебегова мера множества ΔS, определенная на спрямляемой поверхности. В частности, при $N_x p \equiv R(p-x)$ (умножение вектора $(p-x)$ на скаляр R) имеем $J_G^{N_x}(p) = R^{d-1}$ (см. формулу (13)). Точное значение этого коэффициента для N_x общего вида нам здесь не понадобится, так как в нашем распоряжении имеется исследованная нами плотность, равная подынтегральному отношению

$$h_{N_x G}^{N_x}(\lambda, p|\, \mathbf{0}) \equiv \frac{h_G(\lambda, N_x^{-1}p|\, x)}{J_G^{N_x}(N_x^{-1}p)}.$$

Полагая $G = G_R \equiv N_x^{-1} R G_0 = R\overline{M}_x G_0 + x$ и $p = R\overline{M}_x y + x$, где $\mathbf{0} \in G_0$ и $y \in \partial G_0$, мы получаем

$$h_{G_R}(\lambda, p|\, x) = J_{G_R}^{N_x}(p)\, h_{N_x G_R}^{N_x}(\lambda, N_x p|\, \mathbf{0})$$

$$= J_{\overline{M}_x R G_0}^{M_x}(\overline{M}_x R y)\, h_{RG_0}^{N_x}(\lambda, Ry|\, \mathbf{0}) = J_{\overline{M}_x G_0}^{M_x}(\overline{M}_x y)\, h_{RG_0}^{N_x}(\lambda, Ry|\, \mathbf{0}).$$

Умножая члены равенства на R^{d-1} мы получаем формулу

$$\widetilde{h}^{R}_{G_R}(\lambda, p|\, x) = J^{M_x}_{\overline{M}_x G_0}(\overline{M}_x y)\, \widetilde{h}^{N_x,R}_{G_0}(\lambda, y|\, \mathbf{0}), \tag{14}$$

где, согласно теореме 1, плотность $\widetilde{h}^{N_x,R}_{G_0}(\lambda, y|\, \mathbf{0})$ имеет асимптотическое разложение (6) с соответствующей заменой параметров

$$(a^{ij}, b^i, c, G, p) \mapsto (\widetilde{a}^{ij}, \widetilde{b}^i, \widetilde{c}, G_0, y).$$

Мы воспользуемся этой формулой для нахождения асимптотики интеграла от функции ϕ относительно плотности $h_G(\lambda, p|\, x)$ при $G \downarrow x$. Мы имеем

$$\int\limits_{\partial G_R} \phi(p)\, h_{G_R}(\lambda, p|\, x)\, dS(p) = \int\limits_{\partial N_x G_R} \overline{\phi}(p)\, h^{N_x}_{N_x G_R}(\lambda, p|\, \mathbf{0})\, dS(p)$$
$$= \int\limits_{\partial R G_0} \overline{\phi}(p)\, h^{N_x}_{R G_0}(\lambda, p|\, \mathbf{0})\, dS(p) = \int\limits_{\partial G_0} \overline{\phi}(Rp)\, h^{N_x}_{R G_0}(\lambda, Rp|\, \mathbf{0})\, R^{d-1}\, dS(p)$$
$$= \int\limits_{\partial G_0} \overline{\phi}(Rp)\, \widetilde{h}^{N_x,R}_{G_0}(\lambda, p|\, \mathbf{0})\, dS(p). \tag{15}$$

Пусть $\phi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(S)$. Формула Тейлора второго порядка для функции $\phi(N_x^{-1} Rp)$ при $R \to 0$ имеет вид

$$\overline{\phi}(Rp) \equiv \phi(N_x^{-1} Rp) = \phi(x) + R \sum_{ik} D_i \phi(x) \overline{M}^{ik}_x p^k$$
$$+ \frac{R^2}{2} \sum_{ij} \sum_{kl} D_{ij} \phi(x) \overline{M}^{ik}_x \overline{M}^{jl}_x p^k p^l + R^{2+\alpha}\, Z_x(p),$$

где $Z_x(p)$ – функция, ограниченная относительно меры $|\cdot|_{2,G}$ в окрестности точки x. С другой стороны, согласно формуле (6),

$$\widetilde{h}^{N_x,R}_{G_0}(\lambda, p|\, \mathbf{0}) = K_{G_0}(\mathbf{0}, p)$$
$$+ \int\limits_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0}, p_1) \Big(2R \sum_i \widetilde{b}^i(\mathbf{0}) D^{(1)}_i K_{G_0}(p_1, p)$$
$$+ R\, \widetilde{X}_{G_0}(p_1, p) - 2R^2 \widetilde{c}(\mathbf{0}) K_{G_0}(p_1, p) + R^2 \widetilde{Y}_{G_1}(p_1, p) \Big)\, dV(p_1)$$
$$+ o(R^2) \int\limits_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0}, p)\, dV(p),$$

равномерно по всем $G_0 \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$ (слабая асимптотика), где формулы для $\widetilde{X}_{G_0}$, $\widetilde{Y}_{G_0}$ получаются из соответствующих формул для X_G, Y_G (см. теорему 1) с помощью подстановки $(a^{ij}, b^i, G) \mapsto (\widetilde{a}^{ij}, \widetilde{b}^i, G_0)$. В соответствии с разложением ядра $\widetilde{h}_{G_0}^{N_x,R}$ искомый интеграл распадается на 4 части. Первая часть:

$$\int_{\partial G_0} K_{G_0}(\mathbf{0},p)\,\overline{\phi}(Rp)\,dS(p) = \phi(x)$$

$$+\frac{R^2}{2}\int_{\partial G_0} K_{G_0}(\mathbf{0},p)\Big(\sum_{ij}\sum_{kl} D_{ij}\phi(x)\overline{M}_x^{ik}\overline{M}_x^{jl}p^k p^l + 2R^\alpha\, Z_x(p)\Big)\,dS(p)$$

$$= \phi(x) + \frac{R^2}{2}\sum_{ij}\sum_{k} D_{ij}\phi(x)\overline{M}_x^{ik}\overline{M}_x^{jk}2\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p)$$

$$+R^{2+\alpha}\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,\Delta Z_x(p)\,dV(p)$$

$$= \phi(x) + \Big(\frac{R^2}{2}\sum_{ij} a^{ij}(x)\,D_{ij}\phi(x) + o(R^2)\Big)\,2\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p),$$

где мы использовали формулу

$$\int_{\partial G_0} K_{G_0}(y,p)\,f(p)\,dS(p) = \int_{G_0} Q_{G_0}(y,p)\,\Delta f(p)\,dV(p), \qquad (16)$$

справедливую для любой дважды дифференцируемой функции f (см. [2, 6] и др.), а также равенство $a^{ij}(x) = \sum_k \overline{M}_x^{ik}\overline{M}_x^{jk}$.
Вторая часть:

$$\int_{\partial G_0} \overline{\phi}(Rp)\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\Big(2R\sum_{j=1}^{d}\widetilde{b}^j(\mathbf{0})D_j^{(1)}K_{G_0}(p_1,p)$$

$$+R\,\widetilde{X}_{G_0}(p_1,p)\Big)\,dV(p_1)\,dS(p)$$

$$= \int_{\partial G_0}\Big(R\sum_{ik} D_i\phi(x)\overline{M}_x^{ik}p^k + R^2 Z_x^{(1)}(p)\Big)$$

$$\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\Big(2R\sum_{j=1}^{d}\widetilde{b}^j(\mathbf{0})D_j^{(1)}K_{G_0}(p_1,p)$$

$$+R\,\widetilde{X}_{G_0}(p_1,p)\Big)\,dV(p_1)\,dS(p)$$

$$=2R^2\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\sum_{ik}D_i\phi(x)\overline{M}_x^{ik}\sum_{j=1}^{d}\widetilde{b}^j(\mathbf{0})D_j^{(1)}$$

$$\left(\int_{\partial G_0} K_{G_0}(p_1,p)\,p^k\,dS(p)\right)\,dV(p_1)$$

$$+2R^3\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\int_{\partial G_0} Z_x^{(1)}(p)\Big(\sum_{j=1}^{d}\widetilde{b}^j(\mathbf{0})D_j^{(1)}K_{G_0}(p_1,p)$$

$$+\widetilde{X}_{G_0}(p_1,p)\Big)\,dS(p)\,dV(p_1)$$

$$=\Big(R^2\sum_{ij}\widetilde{b}^j(\mathbf{0})D_i\phi(x)\overline{M}_x^{ij}+o(R^2)\Big)\,2\int_{G_0}Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\,dV(p_1)$$

$$=\Big(R^2\sum_{i}b^i(x)D_i\phi(x)+o(R^2)\Big)\,2\int_{G_0}Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\,dV(p_1),$$

где $|Z_x^{(1)}(p)|_{2,G_0}<\infty$ равномерно по $G_0\in\mathfrak{A}^\circ(\beta)$, использована формула (13) (первая), а также ортогональность ядер $D_i^{(1)}K_{G_0}(p_1,p)$ и $\widetilde{X}_{G_0}(p_1,p)$ на границе G_0 по отношению к единице.

Третья часть:

$$\int_{\partial G_0}\overline{\phi}(Rp)\int_{G_0}Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\Big(-2R^2\widetilde{c}(\mathbf{0})K_{G_0}(p_1,p)$$

$$+R^2\widetilde{Y}_{G_1}(p_1,p)\Big)\,dV(p_1)\,dS(p)$$

$$=\int_{\partial G_0}(\phi(x)+RZ_x^{(2)}(p))$$

$$\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\Big(-2R^2\widetilde{c}(\mathbf{0})K_{G_0}(p_1,p)$$

$$+R^2\widetilde{Y}_{G_1}(p_1,p)\Big)\,dV(p_1)\,dS(p)$$

$$=(-R^2\widetilde{c}(\mathbf{0})\,\phi(x)+o(R^2))\,2\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p_1)\,dV(p_1)$$

$$=(-R^2c(x)\,\phi(x)+o(R^2))\,2\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p),$$

где $|Z_x^{(2)}(p)|_{2,G_0}<\infty$ равномерно по $G_0\in\mathfrak{A}^\circ(\beta)$, а также использована ортогональность ядра $\widetilde{Y}_{G_0}(p_1,p)$ на границе G_0 по отношению к единице.

Четвертая часть:

$$\int_{\partial G_0}\overline{\phi}(Rp)o(R^2)\,dS(p)\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p)=o(R^2)\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p)$$

равномерно по $G_0\in\mathfrak{A}^\circ(\beta)$, где использована равномерная ограниченность лебеговой меры поверхности всех таких G_0. Из предыдущих формул следует равномерное по всем $G_0\in\mathfrak{A}^\circ(\beta)$ разложение

$$\int_{\partial G_R}\phi(p)\,h_{G_R}(\lambda,p|\,x)\,dS(p)=\phi(x)+R^2\Big(\frac{1}{2}\sum_{ij}a^{ij}(x)D_{ij}\phi(x)$$

$$+\sum_i b^i(x)D_i\phi(x)-c(x)\,\phi(x)\Big)\,2\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p)$$

$$+o(R^2)\int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0},p)\,dV(p). \qquad (17)$$

О коэффициентах уравнения. Используя формулу (17), мы докажем, что коэффициенты a^{ij} и b^i не зависят от λ, где параметр λ является параметром преобразования Лапласа. Пусть ϕ – непрерывная ограниченная положительная функция: $\phi(p)=$

$1 + M\,(p^i - x^i)$, – в некоторой окрестности точки x, где M – некоторая величина, отличная от нуля, значения которой мы зададим ниже. Подставляя в формулу (17) эту функцию, мы получаем, что функция $\epsilon \equiv \left(\int_{\partial G_R} \phi(p)\, h_{G_R}(\lambda, p|\, x)\, dS(p) - \phi(x)\right)/R^2$ равна $(M\, b^i(x) - c(x) + o(1))\, C_{G_0}$, где $C_{G_0} > 0$. Предположив, что $b^i(x)$ зависит от λ, мы приходим к противоречию: с одной стороны, ϵ как неубываюшая функция от преобразования Лапласа не возрастает на всей полуоси; с другой стороны, за счет выбора M правую часть можно сделать возрастаюшей на накотором отрезке. Пусть теперь $\phi(p) = 1 + M\,(p^i - x^i)(p^j - x^j)$. В этом случае $\epsilon = (M\, a^{ij}(x) - c(x) + o(1))\, C_{G_0}$. Точно так же убеждаемся в том, что $a^{ij}(x)$ не зависит от λ. Таким образом, зависимость решения уравнения (12) от λ определяется зависимостью коэффициента c от $\lambda : c = c(\lambda, x)$.

Важный частный случай: $c(\lambda, x) = \lambda\, \gamma(x)$ $(\gamma(x) > 0)$, – соответствует диффузионному марковскому процессу. В этом случае уравнение (2) получается в результате применения преобразования Лапласа к обратному уравнению Колмогорова, которому при любой непрерывной функции ϕ удовлетворяет функция

$$u(x,t) \equiv \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x_1) F_G([0,t) \times dx_1|\, x).$$

Из формулы (17) видно, что подходящим нормирующим делителем для среднего приращения значения функции ϕ относительно меры $f_{G_R}(\lambda, dp|\, x)$ является величина, пропорциональная $R^2 \int_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0}, p)\, dV(p)$, например,

$$n_{G_R}(\lambda_0, x) \equiv \frac{1}{\lambda_0}(1 - f_{G_R}(\lambda_0, \mathbb{X}|\, x)) = \Big(\frac{R^2 c(\lambda_0, x)}{\lambda_0} + o(R^2)\Big)\, 2 \int\limits_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0}, p)\, dV(p)$$

при любом $\lambda_0 > 0$. Согласно теореме 1 и ее уточнению в соответствии с формулой (14), для любого $\beta > 1$ предел

$$A_\lambda^{\lambda_0}(\phi|\, x) \equiv \lim_{R \to 0} \frac{f_{G_R}(\lambda, \phi|\, x) - \phi(x)}{n_{G_R}(\lambda, x)}$$

существует равномерно по всем $G_0 \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$, где G_0 – окрестность точки $\mathbf{0}$ и $G_R = R\,\overline{M}_x G_0 + x$. Благодаря равномерности, для любой последовательности $G \downarrow x$ предел $A_\lambda^{\lambda_0}(\phi|\,x)$ существует, если существует такое $\beta > 1$, что все нормированные G (т.е. множества $(1/\mathcal{R}(G-x))(G-x)+x$) принадлежат $\mathfrak{A}^\circ(\beta)$. Соответствующий оператор $A_\lambda^{\lambda_0}$ мы называем *лямбда-характеристическим оператором второго рода.* Его значение для $\phi \in \mathcal{C}^2(S)$:

$$A_\lambda^{\lambda_0}\phi = \frac{\lambda_0}{c(\lambda_0,\cdot)}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} a^{ij} D_{ij}\phi + \sum_i b^i D_i\phi - c(\lambda,\cdot)\,\phi\right).$$

Для анализа лямбда-характеристического оператора Дынкина нам потребуется асимптотика математического ожидания времени первого выхода из малой окрестности начальной точки траектории, т.е.

$$m_G(x) = -\frac{\partial}{\partial\lambda} f_G(\lambda, \mathbb{X}|\,x)\Big|_{\lambda=0}.$$

Учитывая дальнейшие применения, мы рассмотрим плотность $m_G(p|\,x)$, равную правой части предыдущего выражения с заменой $f_G(\lambda, \mathbb{X}|\,x)$ на $h_G(\lambda, p|\,x)$.

4. Характеристический оператор Дынкина

Предположим, что при всех $p \in S$ существует производная

$$\gamma(p) \equiv \frac{\partial}{\partial\lambda}\, c(\lambda, p)\Big|_{\lambda=0} < \infty.$$

Тогда для любой непрерывной на S функции ϕ существует производная

$$m_G(\phi|\,x) \equiv \int\limits_{\partial G} \phi(p)\, m_G(p|\,x)\, dS(p) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\, f_G(\lambda, \phi|\,x))\Big|_{\lambda=0}.$$

Для нахождения частного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет плотность $m_G(\phi|\,x)$, мы используем дифференцирование уравнения (2) по λ при $\lambda = 0$. Возможность этой операции обосновывается теоремой Арцела, для применения которой достаточно монотонной сходимости к пределам отношений $(c(\lambda, p) - c(0, p))/\lambda$ и $(f_G(\lambda, \phi|\,p) - f_G(0, \phi|\,p))/\lambda$, которая следует из неотрицательности вторых производных по λ от функций $-c(\lambda, p)$

и $f_G(\lambda, \phi|\, p)$. В результате дифференцирования мы получаем частное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} a^{ij} D_{ij} m + \sum_{i} b^i D_i m + \gamma\, f_G(0, \phi|\,\cdot) = 0, \tag{18}$$

которому удовлетворяет $m_G(\phi|\, x)$ $(x \in G)$. Краевое значением $m_G(\phi|\, x) = 0$ при $x \in \partial G$ вытекает из интерпретации этой функции как интеграла от произведения $\sigma_G\, \phi(\pi_{\sigma_G})$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и кроме того для любого* $p \in S$ $c(0,p) = 0$, $(\forall \lambda > 0)$ $c(\lambda, p) > 0$, $c(+\infty, p) = +\infty$, *первая производная от этой функции по* λ *в нуле (т.е величина* $\gamma(p)$*) конечна и положительна, причем функция* γ *непрерывна на* S. *Тогда справедлива слабая асимптотика плотности* $\widetilde{m}_G^R(p|\,\mathbf{0}) \equiv R^{d-1} m_{RG}(Rp|\,\mathbf{0})$ *при* $R \to 0$:

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_G^R(p|\,\mathbf{0}) = 2R^2\,\gamma(\mathbf{0}) \int\limits_G Q_G(\mathbf{0}, p_1)\, K_G(p_1, p)\, dV(p) \\ + o(R^2) \int\limits_G Q_G(\mathbf{0}, p)\, dV(p)\end{aligned} \tag{19}$$

равномерно по всем $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$.

Доказательство в основных чертах повторяет доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{0} \in G$ и $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$ при некотором $\beta > 1$, а также ϕ_R – функция вида $\phi_R(Rp) = \phi(p)$. Используя функцию Грина, стандартным методом из уравнения (18) мы получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned}m_{RG}(\phi_R|\, Rx) = \Psi_R(Rx) + \int\limits_{RG} Q_{RG}(Rx, p)\, (2\mathcal{L}^0 \\ - \Delta) m_{RG}(\phi_R|\, p)\, dV(p),\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\Psi_R(Rx) \equiv 2 \int\limits_{RG} Q_{RG}(Rx,p)\,\gamma(p)\,f_{RG}(0,\phi_R|\,p)\,dV(p)$$

$$= 2R^2 \int\limits_G Q_G(x,p)\,\gamma(Rp)\,\widetilde{f}^R_G(0,\phi|\,p)\,dV(p) \equiv R^2\,\Psi^R(x),$$

$$\widetilde{f}^R_G(0,\phi|\,p) = f_{RG}(0,\phi_R|\,Rp), \qquad \mathcal{L}^0 u = \frac{1}{2}\sum_{ij} a^{ij} D_{ij} u + \sum_i b^i D_i u.$$

С другой стороны,

$$m_{RG}(\phi_R|\,Rx) \equiv \int\limits_{\partial RG} \phi_R(p)\,m_{RG}(p|\,Rx)\,dS(p)$$

$$= \int\limits_{\partial G} \phi_(p)\,m_{RG}(Rp|\,Rx)\,dS(p)\,R^{d-1}\,dS(p)$$

$$= \int\limits_{\partial G} \phi_(p)\,\widetilde{m}^R_G(p|\,x)\,dS(p) \equiv \widetilde{m}^R_G(\phi|\,x),$$

откуда уравнение (20) переходит в уравнение

$$\widetilde{m}^R_G(\phi|\,x) = R^2\,\Psi^R(x) + \int\limits_G Q_G(x,p)\,(2\mathcal{L}^0_R - \Delta_R)\widetilde{m}^R_G(\phi|\,p)\,dV(p),$$

где

$$\mathcal{L}^0_R u = \frac{1}{2}\sum_{ij} \overline{a}^{ij} D_{ij} u/R^2 + \sum_i \overline{b}^i D_i u/R, \qquad \Delta_R u = \Delta u/R^2,$$

где $\overline{u}(p) = u(Rp)$. Замечая, что оператор $\mathcal{M}^0_R \equiv R(2\mathcal{L}^0_R - \Delta_R)$ ограничен ($|\mathcal{M}^0_R u|_{2,G} \leqslant C_0\,|u|_{2,G}$, $C_0 = C_0(d,\Lambda_1,\Lambda_2,\beta)$) и что $|\widetilde{m}^R_G(\phi|\,\cdot)|_{2,G} < \infty$ равномерно по всем $G \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$ и всем равномерно ограниченным $\phi \in \mathcal{C}^2(S)$, убеждаемся, что

$$\widetilde{m}^R_G(\phi|\,\mathbf{0}) = R^2\,\Psi^R(\mathbf{0}) + o(R^2)\int\limits_G Q_G(\mathbf{0},p)\,dV(p).$$

В свою очередь $\gamma(Rp) = \gamma(\mathbf{0}) + o(R)/R$ и согласно промежуточному результату при доказательстве теоремы 1,

$$\widetilde{f}^R_G(0,\phi|\,p) = \int\limits_{\partial G} K_G(p,p_1)\,\phi(p_1)\,dS(p_1) + o(R)/R.$$

Отсюда

$$\Psi^R(\mathbf{0}) = 2\gamma(\mathbf{0}) \int\limits_G Q_G(\mathbf{0}, p_1) \int\limits_{\partial G} K_G(p_1, p)\, \phi(p)\, dS(p)\, dV(p)$$
$$+ \frac{o(R)}{R} \int\limits_G Q_G(\mathbf{0}, p)\, dV(p),$$

откуда следует доказательство теоремы. •

Точно так же, как в случае переходных производящих функций (формула (14)), получаем формулу для произвольной точки $x \in S$ и произвольной матрицы коэффициентов при вторых производных: $(a^{ij}) = \overline{M}_x^T \overline{M}_x$:

$$m_G(p|\, x) = J_G^{N_x}(p)\, m_{N_x G}^{N_x}(N_x p|\, \mathbf{0}).$$

Полагая $G = G_R \equiv N_x^{-1} R G_0 = R\overline{M}_x G_0 + x$ и $p = R\overline{M}_x y + x$, где $\mathbf{0} \in G_0$ и $y \in \partial G_0$, мы получаем

$$m_{G_R}(p|\, x) = J_{\overline{M}_x G_0}^{M_x}(\overline{M}_x y)\, m_{RG_0}^{N_x}(Ry|\, \mathbf{0}).$$

Умножая члены равенства на R^{d-1} мы получаем формулу

$$\widetilde{m}_{G_R}^R(p|\, x) = J_{\overline{M}_x G_0}^{M_x}(\overline{M}_x y)\, \widetilde{m}_{G_0}^{N_x, R}(y|\, \mathbf{0}), \tag{21}$$

где, согласно теореме 2, плотность $\widetilde{m}_{G_0}^{N_x,R}(y|\, \mathbf{0})$ имеет асимптотическое разложение (19) с соответствующей заменой параметров

$$(a^{ij}, b^i, G, p) \mapsto (\widetilde{a}^{ij}, \widetilde{b}^i, G_0, y),$$

где $\widetilde{a}^{ij}$, $\widetilde{b}^i$ определены формулами (13).

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что

$$m_{G_R}(x) \equiv \int\limits_{\partial G_R} m_{G_R}(p|\, x)\, dS(p) = m_{RG_0}^{N_x}(\mathbf{0})$$
$$\equiv \int\limits_{\partial RG_0} m_{RG_0}^{N_x}(p|\, \mathbf{0})\, dS(p) = (2R^2\gamma(x) + o(R^2)) \int\limits_{G_0} Q_{G_0}(\mathbf{0}, p)\, dV(p).$$

Отсюда, согласно формуле (17), для любого $\beta > 1$ существует предел

$$A_\lambda(\phi|\, x) = \lim_{R\to 0} \frac{f_{G_R}(\lambda, \phi|\, x) - \phi(x)}{m_{G_R}(x)}$$

равномерно по всем $G_0 \in \mathfrak{A}^\circ(\beta)$. Благодаря равномерности, для любой последовательности $G \downarrow x$ предел $A_\lambda(\phi|\,x)$ существует, если существует такое $\beta > 1$, что все нормированные G (т.е. множества $(1/\mathcal{R}(G-x))(G-x)+x$) принадлежат $\mathfrak{A}^\circ(\beta)$. Соответствующий оператор A_λ мы называем *ламбда-характеристическим оператором Дынкина*. Его значение для $\phi \in \mathcal{C}^2(S)$:

$$A_\lambda \phi = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} a^{ij} D_{ij}\phi + \sum_i b^i D_i \phi - c(\lambda,\cdot)\,\phi\right).$$

5. Окрестности эллипсоидальной формы

Приведенные в теореме 1 коэффициенты разложения плотности распределения точки первого выхода получают конкретное значение при известном аналитическом выражении ядер Q_G, K_G. Пусть $G = B \equiv B(\mathbf{0},1)$ – единичный шар. Тогда в условиях теоремы 1 при $R \to 0$ справедливо слабое асимптотическое разложение плотности первого выхода из малой сферической окрестности начальной точки процесса:

$$\begin{aligned}\widetilde{h}^R_B(\lambda,p|\,\mathbf{0}) = \frac{1}{\omega_d}\Big(1 + R\Big(\sum_{i=1}^d b^i(\mathbf{0})\pi_i(p) + X(\mathbf{0},p)\Big)\\ -R^2\Big(\frac{c(\lambda,\mathbf{0})}{d} + Y(\mathbf{0},p)\Big) + o(R^2)\Big),\end{aligned} \tag{22}$$

где функция X ортогональна любой постоянной и любой линейной функции на границе, функция Y ортогональна любой постоянной функции на границе, $\omega_d = 2\pi^{(d/2)}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичного шара в d-мерном пространстве ($d \geqslant 2$). При этом

$$X(\mathbf{0},p) = \sum_k \pi_k(p)\Big(\sum_{ij} D_k a^{ij}\,\pi_i(p)\pi_j(p) - \frac{1}{d+2}\sum_i (D_k a^{ii} + 2D_i a^{ik})\Big)$$

и для однородного в пространстве процесса

$$Y(0,p) = \Big(\sum_i b^i\,\pi_i(p)\Big)^2 - \frac{1}{d}\sum_i (b^i)^2,$$

где $\|p\| = 1$. Вывод последней формулы можно найти в работе [7] (где эта формула содержит опечатку).

Для произвольной начальной точки и матрицы коэффициентов общего вида $(a^{ij}(x)) = \overline{M}_x^T \overline{M}_x$ наиболее простой вид имеет асимптотическое разложение для плотности точки первого выхода из малой эллипсоидальной окрестности начальной точки. Имеем

$$\widetilde{h}^R_{RE_x+x}(\lambda, R\overline{M}_x y + x \mid x) = J^{M_x}_{E_x}(\overline{M}_x y)\, \widetilde{h}^{N_x, R}_B(\lambda, y \mid \mathbf{0}),$$

где $E_x = \overline{M}_x B$ – эллипсоид, форма которого зависит от матрицы старших коэффициентов, и, согласно формуле (22),

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}^{N_x, R}_B(\lambda, y \mid \mathbf{0}) &= \frac{1}{\omega_d}\,\Big(1 + R\Big(\sum_{i=1}^d \widetilde{b}^i(\mathbf{0})\pi_i(y) + \widetilde{X}(\mathbf{0}, y)\Big) \\
&\qquad - R^2\Big(\frac{\widetilde{c}(\lambda, \mathbf{0})}{d} + \widetilde{Y}(\mathbf{0}, y)\Big) + o(R^2)\Big) \\
&= \frac{1}{\omega_d}\,\Big(1 + R\Big(\sum_{ik} b^k(x) M_x^{ik} \pi_i(y) + \widetilde{X}(\mathbf{0}, y)\Big) \\
&\qquad - R^2\Big(\frac{c(\lambda, x)}{d} + \widetilde{Y}(\mathbf{0}, y)\Big) + o(R^2)\Big),
\end{aligned}$$

где $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ получаются из X и Y заменой $(a^{ij}, b^i) \mapsto (\widetilde{a}^{ij}, \widetilde{b}^i)$, при которой сохраняются свойства ортогональности этих ядер.

Условные плотности. Рассмотрим условные плотности первого выхода относительно фиксированной точки первого выхода из эллипсоидальных окрестностей, определенные почти наверное относительно меры Лебега на поверхности единичной сферы. Во-первых, это отношение

$$\begin{aligned}
h_{RE_x+x}(\lambda \mid x, R\overline{M}_x y + x) &\equiv \frac{h_{RE_x+x}(\lambda, R\overline{M}_x y + x \mid x)}{h_{RE_x+x}(0, R\overline{M}_x y + x \mid x)} \\
&= 1 - \frac{R^2}{d}\, c(\lambda, x) + o(R^2).
\end{aligned}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned}
m_{RE_x+x}(x, R\overline{M}_x y + x) &\equiv \frac{m_{RE_x+x}(R\overline{M}_x y + x \mid x)}{h_{RE_x+x}(0, R\overline{M}_x y + x \mid x)} \\
&= \frac{R^2}{d}\, \gamma(x) + o(R^2).
\end{aligned}$$

Интересно отметить, что главные члены асимптотического разложения функций $1-h_{RE_x+x}(\lambda|\,x, R\overline{M}_x y+x)$ и $m_{RE_x+x}(x, R\overline{M}_x y+x)$ пропорциональны R^2 и не зависят от точки первого выхода. Этот факт используется при построении стохастического интеграла по следу полумарковского процесса диффузионного типа [9].

Коэффициент преобразования размера. Рассмотрим невырожденное линейное отображение $M : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, задаваемое матрицей $M = (M^{ij})$, и область G, для которой в точке $p \in \partial G$ определена внешняя нормаль к поверхности: $n = n(p)$. Пусть M_{ij} – алгебраическое дополнение элемента M^{ij}. Тогда коэффициент преобразования размера элемента ΔS поверхности тела G выражается формулой

$$\frac{|M\Delta S|}{|\Delta S|} \sim J_G^M(p) = \sqrt{\sum_{k=1}^d \Big(\sum_{j=1}^d n^j M_{kj}\Big)^2}. \tag{23}$$

Доказательство этой формулы можно найти, например, в книге [8 с. 232].

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion.* — Facts and Formulae. Birkhäuser Verlag, (1996).
2. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* — М., Наука, (1989).
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов, том И.* — М.: Наука, (1971).
4. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* — М. Физматгиз, (1963).
5. А. Н. Колмогоров, *Об аналитических методах в теории вероятностей.* — Успехи матем. наук, **5** (1938), 5–41.
6. С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики.* — М. ТТЛ, (1954).
7. Б. П. Харламов, *Плотность распределения точки первого выхода диффузионного процесса из малой окрестности его начальной точки. Теория вероятностей и ее применения.* — Наука, М., **45** 3, (2000), 536–554.
8. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* — СПб: Наука, (2001).
9. Б. П. Харламов, *Абсолютная непрерывность мер в классе полумарковских процессов диффузионного типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **294** (2002), 216–244.

Harlamov B. P. Characteristic operator of a diffusion process.

Semi-Markov processes of diffusion type in the d-dimensional space ($d > 1$) are considered. The transition generating function of such a process is assumed to satisfy the second order differential equation of elliptical type. Using methods of differential equation theory, especially that of Dirichlet problem, the transition generating function for a small neighborhood of the initial point of the process is investigated. The asymptotic expansions on a small scale parameter are obtained both for the first exit point distribution density, and for the first exit time expectation, when the trajectory of the process leaves a small neighborhood of the initial point. The characteristic operator of E.B. Dynkin determined by a decreasing sequence of neighborhoods is proved to exist.

Институт проблем машиноведения РАН,
СПб, В.О. Большой пр. 61
E-mail: harlamov@random.ipme.ru

Поступило 12 июля 2003 г.