Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

А. В. Чирина

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ОТ ПАРАМЕТРА МАСШТАБА ФУНКЦИЙ ОТ ВЫБОРКИ ИЗ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Введение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.), $\overline{X}$ – их выборочное среднее. Пусть задана функция $r(s)\colon (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Определим статистику T_n следующим образом.

$$T_n = T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{X}}\right). \tag{1}$$

Очевидно, что при любом $\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{X}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r\left(\frac{X_i}{\overline{X}}\right) + \beta\cdot\left(\frac{X_i}{\overline{X}} - 1\right)\right), \tag{2}$$

т.е. функции $r(s)$ и $r(s) + \beta\cdot(s-1)$ при любом $\beta \in \mathbb{R}$ определяют одну и ту же статистику вида (1).

Ясно также, что при любом $\gamma > 0$

$$T_n(\gamma X_1, \dots, \gamma X_n) = T_n(X_1, \dots, X_n). \tag{3}$$

Статистики вида (1) часто применяются для построения свободных от параметра масштаба критериев для проверки гипотез о виде распределения. Свойства таких статистик неплохо изучены: можно сослаться, например, на [11], где доказаны закон больших чисел и центральная предельная теорема для нескольких классов статистик, в которых неизвестный параметр заменен его оценкой. Однако о больших уклонениях статистик такого вида до сих пор почти ничего не было известно (исключение составляет, пожалуй, лишь случай $r(s) = -s^p$, $p > 1$, детально изученный в [13]). Очевидно, что случайные величины $X_i/\overline{X}$, $i = 1, \dots, n$ зависимы, и именно это затрудняет вычисление больших уклонений.

Мы будем изучать грубую (логарифмическую) асимптотику вероятностей больших уклонений статистики T_n при некоторых ограничениях на функцию $r(s)$ в случае, когда каждая из с.в. X_i имеет Г-распределение (в частности, экспоненциальное). В силу (3) можем, не умаляя общности, считать, что параметр масштаба равен 1 и, т.о., каждая из с.в. X_i имеет плотность

$$f(s) = \frac{s^\alpha e^{-s}}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad \alpha > -1, \quad s > 0.$$

Статистики вида (1) естественно применять для проверки гипотез о принадлежности X_i к $\Gamma(1+\alpha)$-распределению, когда параметр масштаба неизвестен. При $\alpha = 0$ имеем класс критериев экспоненциальности, состоятельность которых против тех или иных альтернатив зависит от выбора $r(s)$. В частности, если $r(s)$ вогнута (выпукла), то, в силу теоремы 4.8 гл. 2 из [2] и теорем из [11], критерий, основанный на T_n, состоятелен против всех альтернатив с возрастающей (соответственно, убывающей) функцией интенсивности (ВФИ, УФИ) отказов. Такие критерии для $r(s) = \ln s$ и $r(s) = -s^2$ предлагались, например, в [8] и [15]. Статистики, состоятельные против всех альтернатив и представимые в виде супремумов семейств статистик вида (1), изучались в [7] и [5]. Зная большие уклонения статистик вида (1), можно находить бахадуровские точные наклоны и асимптотическую эффективность по Бахадуру соответствующих критериев (см. [4]), а также строить на основе этих статистик локально асимптотически оптимальные (ЛАО) по Бахадуру критерии для отдельных параметрических семейств альтернатив, локально эквивалентные критериям отношения правдоподобия, но более простые в вычислительном отношении.

Нас интересует вычисление функции уклонений

$$k(a) := \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a), \quad a > 0,$$

а также асимптотики $k(a)$ при $a \to 0$. Для вычисления $k(a)$ мы воспользуемся теоремой Плашки–Штайнебаха [10]:

Предложение 1. *Пусть $\{W_n\}_{n=1,2\dots}$ – последовательность вещественнозначных случайных величин на вероятностном пространстве с мерой $\mathbf{P}$, удовлетворяющих следующим условиям:*

(i) $m_n(t) = \int e^{tW_n} d\mathbf{P} < \infty$ *для* $\forall t \in [0,\ T_1),\ T_1 > 0;$

(ii) $\Psi_n(t)/n \to c_0(t) \in \mathbb{R}$ *для* $\forall t \in (T_0, T_1)$, $0 \le T_0 < T_1$, *где* $\Psi_n(t) = \ln\, m_n(t)$.

Тогда для любой последовательности $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2 \ldots$, *где* $a_n \to a \in A = \{c_0'(h) \mid c_0'(h)$ *существует, непрерывна справа и строго монотонна при* $h \in (T_0, T_1)\}$, *выполнено* $[\mathbf{P}(W_n > na_n)]^{1/n} \to \inf\limits_{t \ge 0} \{\exp[c_0(t) - ta]\}$.[1]

Ключевую роль для применения этой теоремы к последовательности статистик T_n играет функция

$$\varphi(\mu) := \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{E} e^{n\mu T_n}.$$

Вычислению функции $\varphi(\mu)$ посвящен раздел 2, а ее исследованию – раздел 3, где сформулирована теорема о вычислении $k(a)$. Этот результат удается несколько уточнить в случае ограниченной $r(s)$, что и сделано в разделе 4. В разделе 5 рассматриваются примеры применения полученных результатов к критериям экспоненциальности и равномерности.

2. Вычисление функции $\varphi(\mu)$

Зафиксируем $\alpha > -1$. Прежде всего докажем одно важное асимптотическое неравенство – асимптотический аналог неравенства Бернштейна для статистик вида (1).

Лемма 1. *Пусть задана последовательность функций* $R_n(s_1, \ldots, s_n)\colon (0, +\infty)^n \to \mathbb{R}$, *таких, что при любом* n, *если* $s_i' \geqslant s_i$, $i = 1, \ldots, n$, *то* $R_n(s_1', \ldots, s_n') \geqslant (\leqslant) R_n(s_1, \ldots, s_n)$ *(такую функцию будем называть, соответственно, "возрастающей" или "убывающей"). Определим по этой последовательности функций интервал* Λ, *равный* $(0, 1]$, *если все* R_n *"убывают", и* $[1, +\infty)$, *если все* R_n *"возрастают". Тогда*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(R_n\left(\frac{X_1}{\overline{\overline{X}}}, \ldots, \frac{X_n}{\overline{\overline{X}}}\right) > a\right) \leqslant \\ \leqslant \inf_{\lambda\in\Lambda} \bigl\{(1+\alpha)(\lambda - 1 - \ln\lambda) + \qquad (4) \\ + \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(R_n\left(\frac{X_1}{\lambda(1+\alpha)}, \ldots, \frac{X_n}{\lambda(1+\alpha)}\right) > a\right)\bigr\}. \end{aligned}$$

[1] Сохранены обозначения оригинала, никак не связанные с обозначениями настоящей статьи.

В частности, взяв $R_n(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r(s_i)$, *где* $r(s)$ *не убывает (не возрастает) на* $(0, +\infty)$, *получим*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r\left(\frac{X_i}{\overline{X}}\right) > a\right) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\lambda\in\Lambda} \inf_{\mu\geqslant 0} \big\{-\mu a + (1+\alpha)(\lambda - 1 - \ln\lambda) +$$
$$+ \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu r\left(\frac{X_1}{\lambda(1+\alpha)}\right)\right)\big\}. \tag{5}$$

Доказательство. Как известно, если н.о.р.с.в. X_i, $i = 1, \dots, n$ имеют $\Gamma(1, \alpha)$-распределение, то случайная величина $\overline{X}$ и случайный вектор $(\frac{X_1}{\overline{X}}, \dots, \frac{X_n}{\overline{X}})$ независимы. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\left(\frac{X_1}{\overline{X}}, \dots, \frac{X_n}{\overline{X}}\right) > a,\ \frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\left(\frac{X_1}{\overline{X}}, \dots, \frac{X_n}{\overline{X}}\right) > a\ \right) \cdot\ \mathbf{P}\left(\frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right)$$

и, следовательно,

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(R\left(\frac{X_1}{\overline{X}}, \dots, \frac{X_n}{\overline{X}}\right) > a\right) =$$
$$= n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(R\left(\frac{X_1}{\overline{X}}, \dots, \frac{X_n}{\overline{X}}\right) > a,\ \frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right) -$$
$$- n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right). \tag{6}$$

Из теоремы Чернова [6] легко выводится равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right) = (1+\alpha)(\ln\lambda - \lambda + 1), \quad \forall\ \lambda \in \Lambda. \tag{7}$$

С другой стороны, в силу "монотонности" R_n имеем для любого $\lambda \in \Lambda$

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(R\left(\frac{X_1}{\overline{X}}, \dots \frac{X_n}{\overline{X}}\right) > a,\ \frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right) \leqslant$$
$$\leqslant n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(R\left(\frac{X_1}{\lambda(1+\alpha)}, \dots \frac{X_n}{\lambda(1+\alpha)}\right) > a,\ \frac{\overline{X}}{\lambda(1+\alpha)} \in \Lambda\right) \leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}\ln \mathbf{P}\left(R\left(\frac{X_1}{\lambda(1+\alpha)},\dots \frac{X_n}{\lambda(1+\alpha)}\right) > a\right). \tag{8}$$

Комбинируя (6), (7) и (8) и переходя к пределу по n, из произвольности $\lambda \in \Lambda$ получаем (4). $\square$

Выясним теперь, когда можно в (5) заменить неравенство равенством, а верхний предел – обычным пределом. Пусть $\Lambda = [1,+\infty)$, если $r(s)$ возрастает, и $\Lambda = (0,1]$, если $r(s)$ убывает на положительной полуоси (может быть, нестрого). Введем следующие ограничения на функцию $r(s)$:

$$\int\limits_0^{+\infty} r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)s^\alpha e^{-s}\ ds = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} r^2\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)s^\alpha e^{-s}\ ds\ < +\infty, \tag{10}$$

и существует такое положительное μ_0, что

$$\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s+\mu_0 r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\right)\ ds\ < +\infty. \tag{11}$$

Для невозрастающей функции $r(s)$ предположим также, что при любом $\mu \in (0,\mu_0)$

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\left\{(1+\alpha)(\lambda-1)+\ln\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda s+\mu_0 r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\right)ds\right\} \tag{12}$$

достигается при строго положительных $\quad \lambda = \lambda(\mu)$

и что существует такое положительное $\lambda_0 < 1$, что

$$\int\limits_0^{+\infty} r^2\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)s^\alpha \exp(-\lambda_0 s)\ ds\ < +\infty. \tag{13}$$

Для $\mu \in [0,\mu_0)$, $\lambda \in \Lambda$ определим функцию

$$\psi(\mu,\ \lambda) = (\lambda-1)(1+\alpha)+\ln\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda s+\mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\right)ds-\ln\Gamma(1+\alpha).$$

Лемма 2. *Если выполнено условие* (11), *то функция* $\psi(\mu,\ \lambda)$ *конечна при* $\mu \in [0, \mu_0)$, $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\psi(\mu,\ 1)$ конечна при любом $\mu \in [0, \mu_0)$:

$$0 < \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\Big(-s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds =$$

$$= \int\limits_{\{s:\ r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)<0\}} s^\alpha \exp\Big(-s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\{s:\ r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)>0\}} s^\alpha \exp\Big(-s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{s:\ r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)<0\}} s^\alpha \exp(-s) ds +$$

$$+ \int\limits_{\{s:\ r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)>0\}} s^\alpha \exp\Big(-s + \mu_0 r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds < +\infty.$$

Для произвольного $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим два случая.

1. Пусть $r(s)$ – неубывающая функция. Тогда $\Lambda = [1, +\infty)$ и для любого $\lambda \in \Lambda$

$$0 < \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\Big(-\lambda s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\Big(-s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds < +\infty.$$

2. Пусть $r(s)$ – невозрастающая функция. Тогда

$$0 < \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\Big(-\lambda s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 s^\alpha \exp\Big(-\lambda s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\,ds +$$

$$+ \int\limits_1^{+\infty} s^\alpha \exp\Big(-\lambda s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{1-\lambda} \int\limits_0^1 s^\alpha \exp\Big(-s + \mu r\Big(\frac{s}{1+\alpha}\Big)\Big)\,ds +$$

$$+ \int\limits_1^{+\infty} s^\alpha \exp\Big(-\lambda s + \mu r\Big(\frac{1}{1+\alpha}\Big)\Big)\,ds < +\infty.$$

Из конечности и положительности интегралов следует конечность функции $\psi(\mu,\ \lambda)$. $\square$

Очевидно,

$$\psi(\mu,\ \lambda) = \ln \mathbf{E} \exp\Big(\mu r\Big(\frac{X_1}{1+\alpha}\Big) + (\lambda - 1)(1 + \alpha - X_1)\Big),$$

т.е. функцию $\psi(\mu,\ \lambda)$ можно рассматривать как логарифм двумерной производящей функции моментов (п.ф.м.) случайного вектора

$$\Big(r\Big(\frac{X_1}{1+\alpha}\Big),\ 1 + \alpha - X_1\Big)$$

с аргументами $(\mu,\ \lambda - 1)$, если $\lambda \geqslant 1$, или как логарифм двумерной п.ф.м. случайного вектора

$$\Big(r\Big(\frac{X_1}{1+\alpha}\Big),\ X_1 - 1 - \alpha\Big)$$

с аргументами $(\mu,\ 1 - \lambda)$, если $\lambda \leqslant 1$. Приведем без доказательства некоторые важные свойства $\psi(\mu,\ \lambda)$.

Предложение 2. 1. $\psi(\mu,\ \lambda)$ *непрерывна на* $[0, \mu_0) \times \Lambda$ *(в граничных точках непрерывность односторонняя по соответствующей переменной).*

2. $\psi(0,\ \lambda) = (1 + \alpha)(\lambda - 1 - \ln \lambda)$*;* $\psi(0,\ 1) = 0$.

3. *При $\mu \in (0, \mu_0)$, $\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}$ все чистые и смешанные производные функции $\psi(\mu,\ \lambda)$ по μ и λ существуют, непрерывны и могут быть получены с помощью дифференцирования под знаком интеграла.*
4. *Существуют первые и вторые частные производные в точках $(0,\ \lambda)$, где $\lambda \in \Lambda$, $\lambda > \lambda_0$ для убывающей функции $r(s)$ (правосторонние по μ) и в точках $(\mu,\ 1)$, где $\mu \in [0, \mu_0)$ (правосторонние по λ для возрастающей $r(s)$ и левосторонние для убывающей $r(s)$). Эти производные непрерывны (соответственно, справа или слева) и также могут быть вычислены с помощью дифференцирования под знаком интеграла.*
5. $$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right|_{(\mu=0,\lambda=1)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right|_{(\mu=0,\lambda=1)} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2}\right|_{(\mu=0,\lambda=1)} = \sigma^2, \quad \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}\right|_{(\mu=0,\lambda=1)} = 1+\alpha, \quad \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda\ \partial \mu}\right|_{(\mu=0,\lambda=1)} = -\tau,$$
где
$$\sigma^2 = \mathbf{E} r^2\left(\frac{X_1}{1+\alpha}\right), \quad \tau = \mathbf{E} X_1 r\left(\frac{X_1}{1+\alpha}\right).$$
6. *Функция $\psi(\mu,\ \lambda)$ строго выпукла в $(0,\ \mu_0) \times \Lambda \setminus \{1\}$, т.е. имеет в этой области положительно определенную матрицу вторых производных. Матрицы односторонних вторых производных в точках $(0, \lambda)$ и $(\mu, 1)$ также положительно определены. В частности, $\sigma^2(1+\alpha) - \tau^2 > 0$.*

Для $\mu \in [0, \mu_0)$ определим функцию
$$\varphi(\mu) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \psi(\mu,\ \lambda). \tag{14}$$

Сформулируем и докажем основной результат этого раздела.

Теорема 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – н.о.р.с.в., каждая из которых имеет плотность $s^\alpha e^{-s}/\Gamma(1+\alpha)$, и пусть монотонная функция $r(s)$ удовлетворяет условиям (9)–(13). Тогда для любого $\mu \in [0,\ \mu_0)$*
$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{X}}\right)\right) = \varphi(\mu),$$
где $\varphi(\mu)$ определяется формулой (14).

Доказательство. Следующие две леммы дают оценки сверху и снизу.

Лемма 3. *Для любого* $\mu \in [0,\ \mu_0)$

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) \leqslant \varphi(\mu).$$

Доказательство. Рассуждаем так же, как при доказательстве леммы 1. При любом $\lambda \in \Lambda$ верна цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\ln \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=0}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) \leqslant \\
&\leqslant \ln \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{\overline{X}\in\Lambda\}} \cdot \exp \mu \sum_{i=0}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) - \ln \mathbf{P}(\overline{X} \in \Lambda) \leqslant \\
&\leqslant \ln \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{\overline{X}\in\Lambda\}} \cdot \exp \mu \sum_{i=0}^{n} r\left(\frac{X_i}{\lambda}\right)\right) - \ln \mathbf{P}(\overline{X} \in \Lambda) \leqslant \\
&\leqslant \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=0}^{n} r\left(\frac{X_i}{\lambda}\right)\right) - \ln \mathbf{P}(\overline{X} \in \Lambda) = \\
&= n \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu r\left(\frac{X_1}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) - \ln \mathbf{P}(\overline{X} \in \Lambda).
\end{aligned}$$

Для доказательства леммы домножим первую и последнюю части неравенства на n^{-1}, перейдем к пределу по n, воспользовавшись (7), и возьмем инфимум по $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Лемма 4. *Для любого* $\mu \in [0,\ \mu_0)$

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) \geqslant \varphi(\mu).$$

Доказательство. Зафиксируем $\mu \in [0,\ \mu_0)$. Пусть $Z_1^{(\mu)}, \ldots, Z_n^{(\mu)}$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет плотность

$$g_\mu(s) = s^\alpha \exp\left(-s + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\int_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right)\right)^{-1};$$

пусть $\overline{Z^{(\mu)}}$– их выборочное среднее. Заметим, что при $\lambda \in \Lambda$

$$\psi(\mu,\ \lambda) = \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu r\left(\frac{X_1}{1+\alpha}\right)\right) + \\ + \ln \mathbf{E} \exp\left((\lambda-1)(1+\alpha-Z_1^{(\mu)}\ )\right). \tag{15}$$

Далее,

$$\mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) = \\ = \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} \left(r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\right) - r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{1+\alpha}\right)\right)\right) \cdot \\ \cdot \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{1+\alpha}\right)\right) = \\ = \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} \left(r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\right) - r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{1+\alpha}\right)\right)\right) \cdot \\ \cdot \left(\mathbf{E} \exp\left(\mu r\left(\frac{X_1}{1+\alpha}\right)\right)\right)^n.$$

По неравенству Чебышева,

$$\mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} \left(r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\right) - r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{1+\alpha}\right)\right)\right) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}\left(r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\right) - r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{1+\alpha}\right) \geqslant 0\right).$$

Из монотонности $r(s)$ и положительности $Z_i^{(\mu)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ вытекает

$$\mathbf{P}\left(r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\right) - r\left(\frac{Z_i^{(\mu)}}{1+\alpha}\right) \geqslant 0\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\frac{1+\alpha}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}} \in \Lambda\right).$$

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{N}$ и при любом $\mu \in [0,\ \mu_0)$

$$n^{-1} \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu \sum_{i=1}^{n} r\left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X}}}\right)\right) \geqslant \\ \geqslant \ln \mathbf{E} \exp\left(\mu r\left(\frac{X_1}{1+\alpha}\right)\right) + n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1+\alpha}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}} \in \Lambda\right). \tag{16}$$

Правая часть (16) имеет предел, для вычисления которого можно воспользоваться теоремой Чернова [6]. Рассмотрим случаи неубывающей и невозрастающей $r(s)$.

Если $r(s)$ – неубывающая функция, то

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}\left(\frac{1+\alpha}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\in\Lambda\right)= \\ &=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}\left(1+\alpha-Z_1^{(\mu)}\geqslant 0\right)= \\ &=\inf_{\nu\geqslant 0}\ln \mathbf{E}\exp\left(\nu\left(1+\alpha-Z_1^{(\mu)}\right)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

После замены $\nu=\lambda-1$, комбинируя (15), (16) и (17), получим требуемое. Для невозрастающей $r(s)$ имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}\left(\frac{1+\alpha}{\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}}\in\Lambda\right)= \\ &=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}\left(\overline{\overline{Z^{(\mu)}}}-(1+\alpha)\geqslant 0\right)= \\ &=\inf_{\nu\geqslant 0}\ln \mathbf{E}\exp\left(\nu\left(Z_1^{(\mu)}-(1+\alpha)\right)\right)= \\ &=\inf_{1-\lambda\geqslant 0}\ln \mathbf{E}\exp\left((1-\lambda)\left(Z_1^{(\mu)}-(1+\alpha)\right)\right). \end{aligned}$$

Последний инфимум достигается при $\lambda>0$. Это следует из равенства (15), логарифмической выпуклости по λ п.ф.м. $\mathbf{E}\exp\left((1-\lambda)(\ Z_1^{(\mu)}-(1+\alpha))\right)$ и условия (12). Таким образом, и в этом случае утверждение леммы верно. □

Из лемм 3 и 4 вытекает утверждение теоремы 1. □

3. Исследование функции $\varphi(\mu)$. Вычисление функции уклонений

Лемма 5. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то для любого* $\mu\in(0,\ \mu_0)$ *инфимум в* (14) *достигается при некотором* $\lambda(\mu)$, *лежащем строго внутри интервала* Λ, *в то время как* $\lambda(0)=1$.

Доказательство. При $\mu=0$ утверждение очевидно. Пусть $\mu\in(0,\ \mu_0)$. Так как функция $\psi(\mu,\ \lambda)$ строго выпукла по λ, инфимум на любом интервале достигается в единственной точке (конечной или бесконечной). Воспользуемся леммой 2 и вычислим производную функции $\psi(\mu,\ \lambda)$ по λ в точке $(\mu,\ 1)$. Имеем

$$\int_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s+\mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda}\psi(\mu,\ \lambda)\Big|_{(\mu,1)} =$$

$$= \int_0^{+\infty} s^\alpha(1+\alpha-s)\exp\left(-s+\mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(s^{1+\alpha}\exp(-s)\right)'\exp\left(\mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds =$$

$$= s^{1+\alpha}\exp\left(-s+\mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right)\Big|_0^{+\infty} -$$

$$- \int_0^{+\infty} s^{1+\alpha}\exp(-s) d\exp\mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right) =$$

$$= -\int_0^{+\infty} s^{1+\alpha}\exp(-s) d\exp\mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right).$$

Ясно, что последний интеграл строго положителен, когда $r(s)$ – неубывающая функция, и строго отрицателен, когда $r(s)$ – невозрастающая функция. Поэтому для неубывающей

$$r(s)\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi(\mu,\ \lambda)\Big|_{(\mu,1)} < 0,$$

а для невозрастающей

$$r(s)\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi(\mu,\ \lambda)\Big|_{(\mu,1)} > 0.$$

Таким образом,

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\psi(\mu,\ \lambda) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}+}\psi(\mu,\ \lambda) = \inf_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1\}}\psi(\mu,\ \lambda). \tag{18}$$

Для невозрастающей $r(s)$ утверждение леммы вытекает из (18) и условия (12). Для неубывающей $r(s)$ докажем, что при любом $\mu \in (0,\ \mu_0)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\psi(\mu,\ \lambda) = +\infty \tag{19}$$

и, следовательно, $\lambda(\mu) < +\infty$. Возьмем какое-нибудь положительное $\delta < 1+\alpha$.

$$\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s + (\lambda-1)(1+\alpha-s) + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{1+\alpha-\delta} s^\alpha \exp\left(-s + (\lambda-1)(1+\alpha-s) + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{1+\alpha-\delta} s^\alpha \exp\left(-s + \delta(\lambda-1) + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds =$$

$$= \int\limits_0^{1+\alpha-\delta} s^\alpha \exp\left(-s + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \cdot \exp\lambda\delta \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, имеем функцию $\lambda(\mu) : [0,\ \mu_0) \mapsto \Lambda$, заданную уравнением

$$\left.\frac{\partial\psi(\mu,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right|_{(\mu,\ \lambda(\mu))} = 0. \tag{20}$$

Так как

$$\frac{\partial^2\psi(\mu,\ \lambda)}{\partial\lambda^2} > 0 \tag{21}$$

при всех μ и λ, можно воспользоваться теоремой о неявной функции.

Лемма 6. *Функция $\lambda(\mu)$ в интервале $(0,\ \mu_0)$ непрерывна и имеет все производные. В нуле функция $\lambda(\mu)$ непрерывна справа и имеет правостороннюю производную:*

$$\lambda'(0+) = \frac{\tau}{1+\alpha}. \tag{22}$$

Доказательство. Непрерывность и гладкость $\lambda(\mu)$ при положительных μ прямо вытекает из предложения 2, неравенства (21) и теоремы о неявной функции. Для доказательства непрерывности и дифференцируемости в нуле выберем положительную сходящуюся к нулю последовательность $\{\mu_l\}$ таким образом, чтобы существовал конечный или бесконечный предел

$$\lambda^* = \lim_{l\to\infty} \lambda(\mu_l).$$

Оценим $\varphi(\mu_l) \equiv \psi(\mu_l,\ \lambda(\mu_l))$ сверху. Для любого l

$$\varphi(\mu_l) < \psi(\mu_l,\ 1).$$

Но по лемме 2, функция $\psi(\mu,\ 1)$ непрерывна справа в нуле. Перейдем к пределу:

$$\limsup_{l\to\infty} \varphi(\mu_l) \leqslant \lim_{l\to\infty} \psi(\mu_l,\ 1) = \psi(0,\ 1) = 0. \tag{23}$$

Для оценки снизу рассмотрим три случая.

1. $r(s) \uparrow,\ \lambda(\mu_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$
2. $r(s) \downarrow,\ \lambda(\mu_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
3. $\lambda(\mu_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^*,\ 0 < \lambda^* < +\infty.$

В первом случае для любой пары $\varepsilon > 0,\ M > 0$ существует такое натуральное L, что для любого $l > L$ верны неравенства $\mu_l < \varepsilon,\ \lambda(\mu_l) > M$. Возьмем такое $\delta > 0$, что $1+\alpha-2\delta > 0$. Имеем

$$\ln \int_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-s + (\lambda(\mu_l)-1)(1+\alpha-s) + \mu_l r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant$$

$$\geqslant \ln \int_{1+\alpha-2\delta}^{1+\alpha-\delta} s^\alpha \exp\left(-s + (\lambda(\mu_l)-1)(1+\alpha-s) + \mu_l r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant$$

$$\geqslant \delta(M-1) + \min\left(0, \varepsilon r\left(\frac{1+\alpha-2\delta}{1+\alpha}\right)\right) + \ln \int_{1+\alpha-2\delta}^{1+\alpha-\delta} s^\alpha \exp(-s) ds.$$

Из произвольности M и ε имеем $\varphi(\mu_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, что противоречит (23). Таким образом, первый случай невозможен.

Во втором случае для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $L \in \mathbb{N}$, что для любого $l > L$ $\mu_l < \varepsilon$ и $\lambda(\mu_l) < \varepsilon$. Пусть s_0 таково, что для любого $s > s_0$ выполнено $r(s/(1+\alpha)) < 0$. Введем в рассмотрение функцию $q(s) = -s + r(s/(1+\alpha))$. Так как $q(s)$ строго убывает и стремится к $-\infty$ при $s \to +\infty$ (как сумма двух убывающих функций, одна из которых убывает строго и стремится к $-\infty$), существует обратная к ней функция $q^{-1}(t)$, причем $q^{-1}(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Имеем

$$\ln \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda(\mu_l)s + \mu_l r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant$$

$$\geqslant \ln \int\limits_{s_0}^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda(\mu_l)s + \mu_l r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant \ln \int\limits_{s_0}^{+\infty} s^\alpha \exp \varepsilon q(s) ds \geqslant$$

$$\geqslant \ln \int\limits_{s_0}^{q^{-1}(-1/\varepsilon)} s^\alpha \exp \varepsilon q(s) ds \geqslant -1 + \ln \int\limits_{s_0}^{q^{-1}(-1/\varepsilon)} s^\alpha ds \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Слагаемое $(\lambda-1)(1+\alpha)$ в этом случае ограничено и на результат не влияет. Таким образом, и второй случай входит в противоречие с (23) и, следовательно, невозможен.

Рассмотрим третий случай. Так как $\psi(\mu,\ \lambda)$ непрерывна,

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(\mu_l) = \lim_{l\to\infty} \psi(\mu_l,\ \lambda(\mu_l)) = \psi(0,\ \lambda^*) = (1+\alpha)(\lambda^* - 1 - \ln \lambda^*) \geqslant 0.$$

Это неравенство не противоречит (23) только в том случае, когда $\lambda^* = 1$.

Итак, мы доказали, что $\lambda(\mu) \underset{\mu\to 0+}{\longrightarrow} 1$, т.е. $\lambda(\mu)$ непрерывна справа в нуле. Отсюда, а также из предложения 2, неравенства (21) и теоремы о неявной функции вытекает существование правосторонней производной в нуле, которая определяется формулой (22). $\square$

Лемма 7. *Функция $\varphi(\mu)$ непрерывна, строго выпукла и имеет все производные внутри $(0,\ \mu_0)$. В нуле $\varphi(\mu)$ непрерывна справа и имеет первую и вторую правосторонние производные, причем*

$$\varphi(0+) = \varphi'(0+) = 0, \quad \varphi''(0+) = \sigma^2 - \frac{\tau^2}{1+\alpha}.$$

Доказательство. Непрерывность и гладкость $\varphi(\mu) \equiv \psi(\mu,\ \lambda(\mu))$ вытекают из непрерывности и гладкости $\psi(\mu,\ \lambda)$ и $\lambda(\mu)$. Вычислим $\varphi'(\mu)$ и $\varphi''(\mu)$, пользуясь теоремой о неявной функции и учитывая (20) и (21).

$$\varphi'(\mu) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu} + \lambda'(\mu)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)\Big|_{(\mu,\ \lambda(\mu))} = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\Big|_{(\mu,\ \lambda(\mu))};$$

$$\varphi''(\mu) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \lambda'(\mu)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu}\right)\Big|_{(\mu,\ \lambda(\mu))} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right)^{-1}\right)\Big|_{(\mu,\ \lambda(\mu))} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2\right)\Big|_{(\mu,\ \lambda(\mu))}.$$

Теперь $\varphi'(0)$ и $\varphi''(0)$ можно вычислить по п. 5 предложения 2. Выпуклость следует из п. 6 того же предложения. □

Заметим, что, поскольку $\varphi'(\mu)$ возрастает и непрерывна на $[0,\ \mu_0)$, существует предел $a_0 = \lim\varphi'(\mu)$ при $\mu \to \mu_0$ (конечный или бесконечный), и для любого $a \in [0, a_0)$ существует такое $\mu \in [0,\ \mu_0)$, что $\varphi'(\mu) = a$, т.е. существует гладкая функция $p(a)$: $[0,\ a_0) \mapsto [0,\ \mu_0)$,обратная к $\varphi'(\mu)$, причем $p(0) = 0$. Заметим, что

$$\tilde{k}(a) \equiv \inf_{\mu\geqslant 0}(-a\mu + \varphi(\mu)) = -ap(a) + \varphi(p(a)),\ \forall a \in [0,\ a_0).$$

Легко видеть, что $\tilde{k}(0) = 0$, $\tilde{k}'(0+) = -p(0) = 0$ и $\tilde{k}''(0+) = -1/\varphi''(0)$.

Из теоремы 1 и леммы 7 следует, что для последовательности статистик вида (1) при Г-распределенных X_i, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ выполнены условия предложения 1. Таким образом, верна

Теорема 2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – н.о.р.с.в., каждая из которых имеет плотность $s^\alpha e^{-s}/\Gamma(1+\alpha)$, и пусть монотонная функция $r(s)$ удовлетворя ет условиям (9)–(13). Пусть $\{T_n\}$ – последовательность статистик вида (1), построенная по случайным величинам $\{X_i\}$ и функции $r(s)$. Определим a_0 как выше. Тогда для любого $a \in [0,\ a_0)$ существует*

$$k(a) \equiv \lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\mathbf{P}(T_n > a) = \inf_{\mu\geqslant 0}(-a\mu + \varphi(\mu)) \equiv \tilde{k}(a), \qquad (24)$$

где $\varphi(\mu)$ вычисляется по формуле (14). *При этом $k(a)$ непрерывна на $[0,\ \mu_0)$ и*

$$\lim_{a\to 0+} a^{-2}k(a) = -\frac{1+\alpha}{2(\sigma^2(1+\alpha)-\tau^2)}, \tag{25}$$

где σ^2 и τ определены как в п. 5 предложения 2.

4. Случай ограниченной функции $r(s)$

Теорема 2 позволяет вычислить функцию уклонений статистики T_n в некоторой окрестности нуля. Однако в некоторых случаях (например, при вычислении больших уклонений статистики типа супремума) необходимо уметь вычислять значения функции уклонений на всей (или почти всей) положительной полупрямой. В данном разделе эта задача частично решается для ограниченной функции $r(s)$.

Пусть существует такое $\rho \in (0,\ +\infty)$, что для $\forall s > 0\ \ |r(s)| < \rho$. Тогда справедлива следующая

Лемма 8. *Функция $r(s)$ удовлетворяет условиям* (10)–(13) *при любом $\alpha > -1$, причем μ_0 можно считать равным $+\infty$.*

Доказательство. Условия (10), (11) и (13), очевидно, выполнены. Докажем (12).

Пусть – невозрастающая функция, $|r(s)| < \rho < +\infty,\ \mu > 0,\ 0 < \lambda < 1$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda s + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds \geqslant \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda s - \mu\rho\right) ds =$$

$$= e^{-\mu\rho}\Gamma(1+\alpha)\lambda^{-(1+\alpha)} \underset{\lambda\to 0+}{\longrightarrow} +\infty, \text{ что и доказывает (12).}$$

□

В дальнейшем будем считать, что выполнено также (9).

Заметим, что

$$\varphi'(\mu) = \left(\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha \exp\left(-\lambda s + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds\right)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right) s^\alpha \exp\left(-\lambda s + \mu r\left(\frac{s}{1+\alpha}\right)\right) ds\bigg|_{(\mu,\ \lambda(\mu))} \leqslant \rho, \tag{26}$$

поэтому $a_0 \equiv \lim\limits_{\mu\to+\infty} \varphi'(\mu) \leqslant \rho$. Ясно, что для любого $a > a_0$ $\inf\limits_{\mu\geqslant 0}(-a\mu + \varphi(\mu)) = -\infty$.

Но тогда, по лемме 1, для любого $a > a_0$

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) \leqslant \inf_{\mu\geqslant 0}(-a\mu + \varphi(\mu)) = -\infty.$$

С другой стороны, по теореме 2, при $0 \leqslant a < a_0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) > -\infty.$$

Лемма 9. *Верны следующие импликации.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) = -\infty \;\Rightarrow\; a \geqslant a_0$;
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) > -\infty \;\Rightarrow\; a \leqslant a_0$;
3. $a < a_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) > -\infty$;
4. $a > a_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) = -\infty$.

Иными словами, функции $k(a)$ и $\tilde{k}(a)$ (принимающие значения в $[-\infty, 0]$) совпадают при всех $a \geqslant 0$, кроме, может быть, $a = a_0$.[2]

В частности, если для некоторого a при всех достаточно больших n $\mathbf{P}(T_n > a) = 0$, то $a \geqslant a_0$.

Следующие три леммы позволяют найти a_0 для некоторых классов монотонных ограниченных функций $r(s)$. В доказательствах мы будем использовать следующий известный факт:

Предложение 3. *Если н.о.р.с.в. $X_1, \ldots, X_n$ имеют $\Gamma(1+\alpha)$-распределение, то вектор случайных величин $(U_1, \ldots, U_{n-1}) \equiv (X_1/\overline{X}, \ldots, X_{n-1}/\overline{X})$ имеет распределение Дирихле с плотностью*

$$h(t_1, \ldots,\, t_{n-1}) = \frac{\Gamma(n + n\alpha)}{n^{n\alpha+n-1}\Gamma^n(1+\alpha)} \prod_{i=1}^{n-1} t_i^\alpha \Big(n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\Big)^\alpha,$$

сосредоточенное на симплексе

$$\Delta_{n-1} = \{(t_1, \ldots, t_{n-1}) : \sum_{i=1}^{n-1} t_i \leqslant n, \quad t_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n-1\}$$

[2] Поведение $k(a)$ при $a = a_0$ и $\tilde{k}(a_0) > -\infty$ требует отдельного исследования.

Лемма 10. *Если $r(s)$ – ограниченная невозрастающая функция, непрерывная справа в нуле, то $a_0 = r(0)$.*

Доказательство. Так как $r(s)$ не возрастает, $r(0) \geqslant r(s)$ для любого $s > 0$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ $T_n \leqslant r(0)$ и, следовательно, по п. 1 леммы 9 $a_0 \leqslant r(0)$. По п. 2 той же леммы, чтобы получить противоположное неравенство, достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое неравенство

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i > r(0) - \varepsilon\right) > C(\varepsilon) + o(1), \quad n \to \infty,$$

где $C(\varepsilon) > -\infty$ и $C(\varepsilon)$ зависит от ε, но не от n.

Возьмем такое $\delta > 0$, что $r(\delta) > r(0) - \varepsilon/2$, и такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho/N < \varepsilon/2$. Тогда для любого $n > N$ $\mathbf{P}(T_n > \varepsilon) \geqslant \mathbf{P}((U_1, \ldots, U_{n-1}) \in Q_{n-1}(\delta))$, где $Q_{n-1}(\delta)$ – $(n-1)$-мерный куб с ребром δ:

$$Q_{n-1}(\delta) = \{(t_1, \ldots, t_{n-1})\colon 0 \leqslant t_i \leqslant \delta,\ i = 1, \ldots, n-1\};$$

$$Q_{n-1}(\delta) \subset \Delta_{n-1} \quad \text{при} \quad \delta \leqslant 1.$$

Оценим

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}((U_1, \ldots, U_{n-1}) \in Q_{n-1}) =$$

$$= n^{-1} \ln \frac{\Gamma(n + n\alpha)}{n^{n\alpha + n - 1}\Gamma^n(1+\alpha)} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta t_1^\alpha \ldots t_{n-1}^\alpha \left(n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\right)^\alpha dt_1 \ldots dt_{n-1}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \frac{\Gamma(n + n\alpha)}{n^{n\alpha + n - 1}\Gamma^n(1+\alpha)} =$$

$$= (1+\alpha)(\ln(1+\alpha) - 1) - \ln\Gamma(1+\alpha) > -\infty. \tag{27}$$

Далее, в кубе $Q_{n-1}(\delta) n(1-\delta) \leqslant n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i \leqslant n$, поэтому при $\alpha \geqslant 0$ $\bigl(n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i\bigr)^\alpha \geqslant (n(1-\delta))^\alpha$, а при $\alpha < 0$ $\bigl(n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i\bigr)^\alpha \geqslant n^\alpha$, причем $\lim n^{-1} \ln(n(1-\delta))^\alpha = \lim n^{-1} \ln n^\alpha = 0$.

Наконец,

$$\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta t_1^\alpha \ldots t_{n-1}^\alpha dt_1 \ldots dt_{n-1} = \frac{\delta^{(n-1)(1+\alpha)}}{(1+\alpha)^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$n^{-1}\ln \mathbf{P}(T_n > r(0)-\varepsilon) \geqslant (1+\alpha)(\ln(1+\alpha)-1) - \ln\Gamma(1+\alpha)+$$
$$+(1+\alpha)\ln\delta - \ln(1+\alpha) + o(1),\ \ n\to\infty,$$

что и требовалось. □

Для неубывающих $r(s)$ столь общий результат получить не удалось. В двух следующих леммах исследуются частные случаи, часто встречающиеся в приложениях.

Лемма 11. *Если $r(s)$ – неубывающая, ограниченная и вогнутая (выпуклая вверх) на $\mathbb{R}^+$ функция, то $a_0 = r(1)$.*

Доказательство. Заметим, что T_n есть выпуклая комбинация $r(U_i)$, $i=1,\ldots,n$, где $U_i \equiv X_i/\overline{X}$, и что $\sum_{i=1}^n U_i = n$. Так как $r(s)$ вогнута, имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r(U_i) \leqslant r\left(\sum_{i=1}^n \frac{U_i}{n}\right) = r(1)$$

и, следовательно, $a_0 \leqslant r(1)$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$n^{-1}\ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i > r(1)-\varepsilon\right) > C(\varepsilon) + o(1), \quad n\to\infty.$$

Возьмем $\delta > 0 : r(\delta) > r(1)-\varepsilon/2$ и $N\in\mathbb{N} : \rho/N < \varepsilon/2$. При $n > N$ $\mathbf{P}(T_n > r(1)-\varepsilon) \geqslant \mathbf{P}((U_1,\ldots,U_{n-1})\in Q_{n-1}(1-\delta,1))$, где

$$Q_{n-1}(1-\delta,1) = \{(t_1,\ldots,t_{n-1}):\ 1-\delta\leqslant t_i\leqslant 1,\ i=1,\ldots,n-1\} \subset \Delta_{n-1}$$

при $\delta\leqslant 1$. Оценим

$$\mathbf{P}((U_1,\ldots,U_{n-1})\in Q_{n-1}(1-\delta,1)) =$$

$$n^{-1}\ln\frac{\Gamma(n+n\alpha)}{n^{n\alpha+n-1}\Gamma^n(1+\alpha)}\int\limits_{1-\delta}^{1}\cdots\int\limits_{1-\delta}^{1} t_1^{\alpha}\ldots t_{n-1}^{\alpha}\big(n-\sum_{i=1}^{n-1} t_i\big)^{\alpha}dt_1\ldots dt_{n-1},$$

подобно предыдущему случаю.

В кубе

$$Q_{n-1}(1-\delta,1)\ \ 1\leqslant n-\sum_{i=1}^{n-1} t_i \leqslant n$$

поэтому при $\alpha \geqslant 0$ $(n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i)^\alpha \geqslant 1$, а при $\alpha < 0$ $(n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i)^\alpha \geqslant n^\alpha$.

Далее,

$$\int_{1-\delta}^{1} \cdots \int_{1-\delta}^{1} t_1^\alpha \dots t_{n-1}^\alpha dt_1 \dots dt_{n-1} = \left(\frac{1-(1-\delta)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right)^{n-1}.$$

Комбинируя полученные оценки с (27), получим требуемое. $\square$

Замечание 1. В обеих леммах оценку сверху для a_0 можно получить, не привлекая вероятностные соображения, как оценку частного интегралов в формуле (26) (в лемме 11 – с помощью неравенства Йенсена). Получить нижнюю оценку чисто аналитическими методами автору не удалось.

Лемма 12. *Если* $r(s) = \mathbb{I}_{\{s>x\}} - (1 - F_\alpha(x(1+\alpha)))$, *где* $x > 0$, *а* $F_\alpha(x)$ *– функция распределения, соответствующая* $\Gamma(1+\alpha)$*-закону, то* $a_0 = \min(1/x,\ 1) - F_\alpha(x(1+\alpha))$.

Доказательство. Ясно, что $T_n \leqslant 1$ с вероятностью 1. Пусть $0 < a < 1$. Событие $\{n^{-1} \sum \mathbb{I}_{\{U_i > x\}} > a\}$ происходит тогда и только тогда, когда для не менее чем $[na]+1$ случайных величин U_i выполняется неравенство $U_i > x$. Рассмотрим два случая.

При $x < 1$ для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > 1/\varepsilon$

$$\mathbf{P}(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{U_i > x\}} > 1 - \varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(U_i > x,\ i = 1, \dots, n-1) \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{P}(1 > U_i > x,\ i = 1, \dots, n-1) =$$
$$= \frac{\Gamma(n + n\alpha)}{n^{n\alpha + n - 1} \Gamma^n(1+\alpha)} \left(\frac{1 - x^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right)^{n-1}.$$

Логарифмируя, умножая на n^{-1} и подставляя оценку (27), получим требуемое.

Если $x \geqslant 1$, то неравенство $U_i > x$ может выполняться для не более чем $m \equiv [n/x]$ случайных величин U_i, т.к. все U_i неотрицательны и их сумма равна n. Отсюда сразу следует оценка сверху: $F_\alpha(x(1+\alpha)) + a_0 \leqslant n^{-1}[n/x] \leqslant 1/x$. Возьмем любое $\varepsilon \in (0,\ 1/x)$, любое $\delta \in (0,\ 1)$, и пусть $m_\varepsilon = [n(1/x - \varepsilon)] + 1$. Для достаточно больших n $1 < m_\varepsilon < n - 1$. Рассмотрим куб

$$Q_{n-1}(\varepsilon\delta,\ m_\varepsilon) = \{(t_1, \dots, t_{n-1}) : x < t_i < x + \delta\varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant m_\varepsilon;$$

$$0 < t_i < \varepsilon\delta,\ m_\varepsilon + 1 \leqslant i \leqslant n-1\}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{P}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{U_i > x\}} > 1/x - \varepsilon) \geqslant$$

$$\geq \mathbf{P}((U_1, \ldots, U_{n-1}) \in Q_{n-1}(\varepsilon\delta,\ m_\varepsilon)). \tag{28}$$

Проверим, что $Q_{n-1}(\varepsilon\delta,\ m_\varepsilon) \subset \Delta_{n-1}$: для всех $(t_1, \ldots, t_n) \in Q_{n-1}(\varepsilon\delta,\ m_\varepsilon)$ верно

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i \leqslant m_\varepsilon(x + \delta\varepsilon) + (n - 1 - m_\varepsilon)\delta\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \left(n\left(\frac{1}{x} - \varepsilon\right) + 1\right)(x + \delta\varepsilon) + \left(n\left(1 - \frac{1}{x} + \varepsilon\right) - 1\right)\delta\varepsilon =$$

$$= n(1 - \varepsilon(x - \delta)) + x < n$$

при достаточно больших n, причем

$$n > n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i > 1 \quad \text{при больших} \quad n. \tag{29}$$

Оценим

$$\int \cdots \int_{Q_{n-1}(\delta\varepsilon,\ m_\varepsilon)} t_1^\alpha \ldots t_{n-1}^\alpha dt_1 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \underbrace{\int_x^{x+\delta\varepsilon} \cdots \int_x^{x+\delta\varepsilon}}_{m_\varepsilon} \underbrace{\int_0^{\delta\varepsilon} \cdots \int_0^{\delta\varepsilon}}_{n-1-m_\varepsilon} t_1^\alpha \ldots t_{n-1}^\alpha dt_1 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \frac{((x + \delta\varepsilon)^{1+\alpha} - x^{1+\alpha})^{m_\varepsilon} (\delta\varepsilon)^{(n-1-m_\varepsilon)(1+\alpha)}}{(1+\alpha)^{n-1}} =$$

$$= \left(\frac{\min((x+\delta\varepsilon)^{1+\alpha} - x^{1+\alpha},\ (\delta\varepsilon)^{1+\alpha})}{1+\alpha}\right)^{n-1}. \tag{30}$$

Комбинируя оценки (27)–(30), получим требуемое. $\square$

5. Примеры. Связь с равномерным распределением

Мы опускаем бо́льшую часть вычислений и приводим лишь окончательные результаты.

1. В [8] и [14] для проверки принадлежности к $\Gamma(1+\alpha)$-закону при фиксированном α (в частности, для проверки экспоненциальности) построены оптимальные свободные от параметра масштаба критерии, основанные на статистиках вида (1) с $r_\pm(s) = \pm(\ln s + \ln(1+\alpha) - \Gamma'(1+\alpha)/\Gamma(1+\alpha))$ (т.н. статистики Морана). Случай $\alpha = 0$ изучался в [3], где функция $\varphi(\mu)$ была построена с помощью формулы Стирлинга. В общем случае удобнее воспользоваться теоремой 2. Для $r_+(s)$ имеем

$$\psi(\mu,\ \lambda) = (\lambda-1)(1+\alpha) - (1+\alpha+\mu)\ln\lambda +$$
$$+\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu)}{\Gamma(1+\alpha)} - \mu\frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Инфимум достигается при $\lambda(\mu) = \frac{1+\alpha+\mu}{1+\alpha}$ и равен

$$\varphi(\mu) = \mu\left(1 + \ln(1+\alpha) - \frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + \ln\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu)}{\Gamma(1+\alpha)} -$$
$$-(1+\alpha+\mu)\ln(1+\alpha+\mu) + (1+\alpha)\ln(1+\alpha).$$

Функция уклонений в этом случае аналитична в окрестности нуля и равна

$$k(a) = \inf_{\mu\geqslant 0}(-a\mu + \varphi(\mu)) = -\frac{1+\alpha}{2(\sigma^2(1+\alpha)-\tau^2)}a^2(1+o(1)),\ \ a\to 0,$$

где

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma''(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} - \left(\frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2,\quad \tau = 1 + (1+\alpha)\ln(1+\alpha).$$

Пользуясь свойствами гамма-функции и ее производной, можно доказать, что $k(a)$ конечна тогда и только тогда, когда

$$a < \ln(1+\alpha) - \frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Для $r_-(s)$ верна та же асимптотика $k(a)$ в нуле.

2. $r(s)=(2+\alpha)/(1+\alpha)-s^2$. В частности, при $\alpha=0$ получим критерий, основанный на характеризации экспоненциального распределения в классе распределений с возрастающей интенсивностью отказов равенством среднего и дисперсии (см., например, [1]).

$$\psi(\mu,\ \lambda)=\mu\frac{2+\alpha}{1+\alpha}+\ln\mathbf{E}\exp\left((1-X)(\lambda-1-\alpha)-\mu\left(\frac{X}{1+\alpha}\right)^2\right),$$

причем при любом $\mu>0$ и при любом $\lambda<1$ (в том числе и при $\lambda<0$) функция $\psi(\mu,\ \lambda)$ конечна, поэтому условие (12) требует проверки. Выполнение этого условия равносильно существованию такого $\mu_0>0$, что для любого положительного $\mu<\mu_0$

$$\left.\frac{\partial\psi(\mu,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right|_{(\mu,\ 0)}<0,$$

а это неравенство, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\mu<\mu_0\equiv\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\right)^2.$$

Можно доказать, что

$$a_0=\lim_{\mu\to\mu_0-}\varphi'(\mu)=$$
$$=\lim_{\mu\to\mu_0-,\ \lambda\to 0+}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}=\frac{2+\alpha}{1+\alpha}-(1+\alpha)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2. \quad (31)$$

В частности, при экспоненциальности ($\alpha=0$) имеем $\mu_0=1/\pi$ и $a_0=2-\pi/2$. Таким образом, теорема 2 позволяет доказать следующее утверждение.

Для любого положительного $a<a_0$, где a_0 определено формулой (31),

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\ln\mathbf{P}(T_n>a)\equiv k(a)=$$
$$=\inf_{\mu>0,\ 0<\lambda<1}\left\{-a\mu+\mu\frac{2+\alpha}{1+\alpha}+\right.$$
$$\left.+\ln\mathbf{E}\exp\left((1-X)(\lambda-1-\alpha)-\mu\left(\frac{X}{1+\alpha}\right)^2\right)\right\},$$

при этом

$$\lim_{a\to 0+} a^{-2}k(a) = -\frac{(1+\alpha)^3}{4(2+\alpha)}.$$

Ясно, что при $a \geqslant \frac{2+\alpha}{1+\alpha}$ выполнено $\mathbf{P}(T_n > a) = 0$ и, следовательно, $k(a) = -\infty$. Теорема 2 не позволяет судить о значениях (и даже о существовании) функции уклонений для $a \in [a_0,\ \frac{2+\alpha}{1+\alpha})$.

Из теоремы 1.1. в [13] вытекает более сильное утверждение: для любого $a > 0$, $a < \frac{2+\alpha}{1+\alpha}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{P}(T_n > a) = \sup_{c\geqslant 0}\inf_{t\geqslant 0} \ln \mathbf{E}\exp\left(t\left(\frac{cX - b(X^2+c^2)}{2}\right)\right),$$

$$\text{где}\quad b = \left(\sqrt{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} - a\right)^{-1}.$$

Асимптотика функции уклонений в нуле в настоящей статье вычислена впервые. Можно доказать, что при $\alpha = 0$ статистика T_n является ЛАО по Бахадуру для проверки экспоненциальности против альтернатив с линейной интенсивностью отказов.

3. Пусть X_i имеют экспоненциальное распределение, т.е. $\alpha = 0$.

Пусть $r_\pm(s,\ x) = \pm(\mathbb{I}_{\{s>x\}} - e^{-x})$, где $x > 0$. Рассмотрим статистики

$$T_n^\pm(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r_\pm\left(\frac{X_i}{\overline{X}},\ x\right).$$

Вычисляя $\psi_\pm(\mu,\ \lambda,\ x)$, по теореме 2 и леммам 10 и 12 получаем

$$k_+(a,\ x) \equiv \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{P}(T_n^+ > a) = \inf_{\mu>0,\ \lambda>1}\{-\mu(a + e^{-x}) + \lambda - 1 - \ln\lambda -$$
$$-\lambda x + \ln(e^\mu + e^{\lambda x} - 1)\},\quad 0 < a < \min(1,\ 1/x) \tag{32}$$

и

$$k_-(a,\ x) \equiv \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{P}(T_n^- > a) = \inf_{\mu>0,\ 0<\lambda<1}\{-\mu(a - e^{-x}) + \lambda - 1 - \ln\lambda -$$
$$-\lambda x + \ln(e^{-\mu} + e^{\lambda x} - 1)\},\quad 0 < a < 1. \tag{33}$$

При этом

$$\lim_{a\to 0+} a^{-2}k_\pm(a,\ x) = -(2e^{-2x}(e^x - x^2 - 1))^{-1}. \tag{34}$$

В [7] вводится свободная от параметра статистика для проверки экспоненциальности (т.н. статистика Лильефорса), которая может быть представлена в виде

$$T_n = \sup_{x \geqslant 0} |T_n^+(x)|.$$

Используя (32)–(34), автору удалось вычислить большие уклонения и значения бахадуровской эффективности для статистики Лильефорса. Эти результаты сейчас готовятся к печати. Здесь мы приведем без доказательства следующее утверждение.

Для достаточно малых $a > 0$

$$k(a) \equiv \lim_{n = \to \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n > a) = \max \left(\sup_{x \geqslant 0} k_+(a,\ x),\ \sup_{x \geqslant 0} k_-(a,\ x) \right),$$

где функции $k_+(a,\ x)$ и $k_-(a,\ x)$ вычисляются по формулам (32) и (33). При этом функция $k(a)$ непрерывна в окрестности нуля и имеет в нуле асимптотику

$$k(a) = -\left(2 \sup_{x \geqslant 0} \left(e^{-2x} \left(e^x - x^2 - 1 \right) \right) \right)^{-1} a^2 (1 + o(1)), \quad a \to 0+.$$

4. Пусть снова $\alpha = 0$ и пусть $r_\pm(s) = \pm(1/2 - e^{-s})$. По теореме 2 и леммам 10 и 11, имеем

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(T_n^\pm > a) = -24a^2(1 + o(1)), \quad a \to 0+.$$

Можно доказать, что эти статистики, а также двусторонняя статистика $T_n = |T_n^+| = \max(T_n^+,\ T_n^-)$, как и статистика Джини [9], являются ЛАО по Бахадуру для альтернативы Макегама (односторонние статистики – соответственно, для альтернатив с положительным или отрицательным параметром).

5. Пусть $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ – н.о.р.с.в., $\mathbf{P}(0 \leq Z_j \leq 1) = 1,\ j = 1, \ldots, n$. Пусть $0 = Z_{(0)} \leq Z_{(1)} \leq \ldots \leq Z_{(n-1)} \leq Z_{(n)} = 1$ – соответствующие порядковые статистики, а $Y_j = Z_{(j)} - Z_{(j-1)}, j = 1, \ldots, n$ – спейсинги. Известно, что распределение случайного вектора $\{nY_j\}_{j=1}^n$ при Z_j, равномерно распределенных на $[0, 1]$, совпадает с распределением случайного вектора $\{X_j / \overline{X}\}_{j=1}^n$, где X_j – независимые случайные величины, имеющие одно и то же экспоненциальное распределение. В [12] предлагаются статистики L_n для проверки равномерности на $[0,\,1]$:

$$L_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} r(nY_j).$$

Теорема 2 позволяет вычислять большие уклонения статистик L_n с монотонной функцией $r(s)$, удовлетворяющей условиям (9)–(13) при $\alpha = 0$. В частности, рассмотрим $r_1(s) = \ln s + C$; $r_2(s) = 2 - s^2$; $r_3(s) = |s-1| - 2e^{-1}$. Последняя функция не монотонна, но, по (2), ее можно заменить монотонной (и даже ограниченной) $|s-1|-(s-1)-2e^{-1}$. Мы приведем здесь лишь коэффициенты при a^2 в нуле для соответствующих функций уклонений

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}(T_{1,n} > a) = -\left(2\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\right)^{-1} a^2(1+o(1)), \quad a \to 0+;$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}(T_{2,n} > a) = -\frac{1}{8}a^2(1+o(1)), \quad a \to 0+;$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}(T_{3,n} > a) = -\frac{e^2}{8(2e-5)}a^2(1+o(1)), \quad a \to 0+\,.$$

Подобным же образом можно вычислять большие уклонения симметричных статистик, основанных на т.н. неперекрывающихся (non-overlapping) спейсингах высших порядков. В [16] такая задача решена для случая, когда порядок спейсингов стремится к бесконечности вместе с объемом выборки. Теорема 2 позволяет находить большие уклонения в случае, когда порядок спейсингов фиксирован.

Литература

1. Т. А. Азларов, Н. А. Володин, *Характеризационные задачи, связанные с показательным распределением.* Изд-во Фан Узб. ССР (1982).
2. Р. Барлоу, Ф. Прошан, *Математическая теория надежности.* "Советское радио", М. (1969).
3. А. В. Чирина, *Асимптотическая эффективность и локальная оптимальность по Бахадуру критерия экспоненциальности, основанного на статистике Морана.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **294**, 245–259 (2002).
4. R. R Bahadur, *Some limit theorem in statistics.* SIAM, Philadelphia (1971).
5. L. Baringhaus, and N. Henze, *Tests of fit for exponentiality based on a characterization via the mean residual life function. Statistical Papers*, **41**, 225–236 (2000).

6. H. Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on sums of observations.* Ann. Math. Stat., **23**, No. 4, 493–507 (1952).
7. H. Liliefors, *On the Kolmogorov–Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown. J. Amer. Stat. Ass.*, **64**, 387–389 (1969).
8. P. Moran, *The random division of an interval.* II. *J. Royal Stat. Soc.*, Ser. B, **13**, No. 1, 147–150 (1951).
9. Ya. Yu. Nikitin, A. V. Tchirina, *Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic.* J. Ital. Stat. Soc., **5**, No. 1, 163–175 (1996).
10. D. Plachky, J. Steinebach, *A theorem about probabilities of large deviations with an application to queuing theory.* Periodica Mathematica Hungarica, **6**, No. 4, 343–345 (1975).
11. R. H. Randles, *On the asymptotic normality of statistics with estimated parameters.* Ann. Stat., **10**, No. 2, 462–474 (1982).
12. J. Sethuraman, J. S. Rao, *Pitman efficiencies of tests based on spacings.* Nonparametric Techniques in Statistical Inference, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1970), pp. 405–416.
13. Q.-M. Shao, *Self-normalized large deviations* Ann. Probab., **25**, 285–328 (1997).
14 G. R. Shorack, *The best test of exponentiality against gamma alternatives.* J. Am. Stat. Ass., **67**, No. 337, 213–214 (1972).
15. M. A. Stephens, *On the W test for exponentiality with origin known.* Technometrics, **20**, 33–35 (1978).
16. X. Zhou, and S. R. Jammalamadaka, *Bahadur efficiencies of spacings tests for goodness of fit.* Ann. Inst. Stat. Math., **41**, No. 3, 541–553 (1989).

Tchirina A. V. Large deviations for a class of scale-free statistics under Gamma distribution.

We study large deviations for sums of functions from Gamma-distributed random values normalized by their sample mean. In particular, large deviations are worked out for several well-known scale-free exponentiality tests such as Moran test and Liliefors test. We also obtain some new results concerning a class of goodness-of-fit tests for the uniform distribution based on spacings.

СПбГЭТУ “ЛЭТИ”
email:antch@mail.ru

Поступило 29 сентября 2003 г.