Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

А. М. Гурин

ОДНО СВОЙСТВО ИНДУЦИРОВАННОГО УПАКОВКОЙ КОМПАКТНЫХ ТЕЛ НОРМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА МНОГОГРАННИКИ

Введение

В 18-й проблеме Гильберта [1] есть следующее предложение: "как можно более плотным образом расположить в пространстве бесконечное множество одинаковых тел заданной формы, например, шаров заданного радиуса или правильных тетраэдров с данным ребром (или в предписанном положении), т.е. расположить так, чтобы отношение заполненной части пространства к незаполненной было по возможности наибольшим". Перечень размерностей евклидовых пространств, где проблема Гильберта полностью решена или найдена максимальная плотность заполнения пространства равными шарами в виде решетчатой упаковки, приведен в [2].

§1. Непополнимые упаковки компактных тел

Разместим в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ компактные тела $\{B_i\}$ так, чтобы никакие два тела не имели общих внутренних точек. Полученное заполнение пространства назовем его *упаковкой*.

Пусть диаметры тел из упаковки $\mathcal{B} = \{B_i\}$ равномерно ограничены сверху, а их обьемы – отделены от нуля:

$$\operatorname{diam}(B_i) \leqslant d, \quad \operatorname{Vol}(B_i) \geqslant V.$$

Назовем упаковку B_0-*непополнимой* (или просто *непополнимой*), если ее нельзя пополнить никаким транслятом некоторого тела B_0. (Например, если $B_0 \in \mathcal{B}$, упаковка непополнима, если ее нельзя пополнить ни одним телом из упаковки.)

Исследования, описанные в данной публикации, оказались возможными частично благодаря Гранту No. U22000 Международного Научного Фонда.

Непополнимыми упаковками могут быть упаковки повторяющихся тел из конечного набора компактных тел. Например, плотнейшая упаковка равных шаров. Но плотность непополнимой упаковки скорее всего будет меньше плотности плотнейшей упаковки, полученной из того же набора компактных тел, что и непополнимая упаковка.

§2. Индуцированное разбиение пространства

Будем говорить, что разбиение пространства на многогранные области *индуцировано* непополнимой упаковкой $\mathcal{B}$, если это – разбиение на области Вороного–Дирихле D_i, ассоциированное с системой точек $\{x_i\}$, выбранных в телах B_i из $\mathcal{B}$: $x_i \in B_i$. Напомним, что области Вороного–Дирихле представляют собой выпуклые многогранники, прилегающие друг к другу по целым граням:

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x\, x_i| \leqslant |x\, x_j|,\ \forall j \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{j \neq i} U(x_i, x_j),$$

где $U(x_i, x_j)$ – замкнутое полупространство, заданное условием

$$U(x_i, x_j) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x\, x_i| \leqslant |x\, x_j|\}.$$

Структура индуцированного разбиения вообще говоря зависит от способа выбора отмеченных точек в телах упаковки.

§3. Оценка числа граней у областей Вороного–Дирихле

Будем говорить, что два выпуклых многогранника *комбинаторно эквивалентны*, если между множествами их граней (всех размерностей, включая вершины и ребра) существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение инцидентности граней. Очевидно, что многогранники комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие, переводящее наборы вершин, принадлежащих одной грани, также в наборы вершин, принадлежащих одной грани.

В [3] была анонсирована

Теорема. *Любое индуцированное разбиение n-мерного евклидова пространства, занятого непополнимой упаковкой компактных* *тел B_i, содержит лишь конечное число комбинаторно различных областей Вороного–Дирихле.*

Доказательство. 1) $\exists R > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \exists i$: $B_i \subset B_R(x)$. (Через $B_R(x)$ обозначается шар радиусом R с центром в точке x.) Достаточно положить

$$R := R_J(d_0) + d = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d_0 + d,$$

где $R_J(d_0)$ – радиус шара Юнга, в который помещается всякое тело диаметра d_0. (Вместо $R_J(d_0)$ можно взять радиус минимального шара, содержащего тело B_0. Если B_0 – одно из тел упаковки $\mathcal{B}$, то $d_0 \leqslant d$ и $R < d(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$.)

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $B_R(x) \cap \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \neq \varnothing$.

3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_R(x_i) = \mathbb{R}^n$.

4) $D_i \subset B_R(x_i)$.

5)

$$D_i = \bigcap_{x_j \in B_{2R}(x_i)} U(x_i, x_j).$$

6) $x_j \in B_{2R}(x_i) \implies B_j \subset B_{2R+d}(x_i)$.

7)

$$\alpha_{n-1}(D_i) \leqslant \frac{\operatorname{Vol} B_{2R+d}}{V} < \frac{\operatorname{Vol} B_{(3+\sqrt{2})d}}{V},$$

где $\alpha_{n-1}(D_i)$ – количество $(n-1)$-мерных граней многогранника D_i. (Последнее неравенство справедливо при том предположении, что B_0 – одно из тел упаковки $\mathcal{B}$.)

8) Поскольку количество граней старшей размерности у многогранников D_i ограничено, то ограничены и количества граней остальных размерностей, и, очевидно, количество комбинаторных типов многогранников D_i также ограничено.

Теорема доказана. •

Заключение

Условиям, принятым здесь, которым удовлетворяют тела непополнимой упаковки $\mathcal{B}$, удовлетворяют также и сферы r-малое точечной системы Делоне–Александрова [4]. Аналогом требования непополнимости в условиях системы точек Делоне–Александрова является требование на R-большое. Следовательно, аналогичная теорема справедлива для областей Вороного–Дирихле, построенных в системе точек Делоне–Александрова.

Условия непополнимости и R-большое являются необходимыми и достаточными, так как при отсутствии этих требований возможно построить многогранник типа многогранника А. А. Борисенко [5] с любым наперед заданным числом граней.

Благодарность. Автор благодарит В. А. Залгаллера, В. В. Макеева, А. И. Медяника и Н. Ю. Нецветаева за полезные замечания в ходе подготовки рукописи статьи к печати. Термин "непополнимые" упаковки предложил В. А. Залгаллер.

Литература

1. D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen, Vol.* 3. 1935, pp. 290–329.
2. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы.* Т. 1, М., Мир, 1990.
3. А. М. Гурин, *Свойства плотных упаковок выпуклых тел в* $\mathbb{R}^n$ *и на сфере.* — В кн.: Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам геометрии и анализа. М, Науч. изд. ТВП, 1994, с. 31–32.
4. Б. Н. Делоне, Н. Н. Падуров, А. Д. Александров, *Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей.* ГТТИ, 1934.
5. А. А. Борисенко, *О сферическом изображении кратчайшей на выпуклой поверхности.* — Укр. геом. сб. **10** (1970), 11–12.

Gurin A. M. A property of the normal subdivision of space into polyhedra induced by a packing of compact bodies.

The notion of densest packing of compact bodies, as introduced by Hilbert, is generalized to the notion of noncompletable packing of compact bodies. The bodies in the packing are equipped by marked points. Conditions on the arrangement of the marked points in the packing generalize those for the Delone–Aleksandrov point system. It is proved that in the Euclidean n-space the number of combinatorially distinct Voronoi–Dirichlet regions corresponding to the marked points is finite.

Физико-технический институт
низких температур им. Б. И. Веркина

Поступило 23 июля 2001 г.

E-mail: gurin@ilt.kharkov.ua