Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

Ю. Г. Дуткевич

О ПОЛНОМ ВЕРХНЕМ УГЛЕ ВОКРУГ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

**Посвящается
В. А. Залгаллеру**

А. Д. Александров [1–3] определил в двумерном метрическом пространстве *верхний угол* и *сектор* между двумя кривыми, *верхний угол* сектора, а также *полный верхний угол* вокруг точки.

В настоящей работе изучается вопрос о зависимости величины полного верхнего угла вокруг точки на плоскости Минковского от формы "единичной окружности" – центрально-симметричной выпуклой кривой Φ, определяющей метрику Минковского ρ_Φ.

Частично результаты работы были анонсированы в [4].

§1. Свойства полного верхнего угла в метрике Минковского ρ_Φ

Верхний угол между кривыми L и M, выходящими из точки O, в двумерном метрическом пространстве с метрикой ρ определяется так: берутся точки $X \in L \setminus \{O\}$, $Y \in M \setminus \{O\}$ и на евклидовой плоскости рассматривается треугольник ABC со сторонами

$$AB = \rho(O,X), \quad AC = \rho(O,Y), \quad BC = \rho(X,Y).$$

Положим $\gamma(X,Y) := \angle BAC$. *Верхним углом* между L и M в точке O называется верхний предел

$$\alpha(L,M) := \overline{\lim_{X,Y\to O}} \gamma(X,Y).$$

1.0. Пусть на евклидовой плоскости введена декартова система координат xOy, с ней согласованы полярные координаты (r,ϕ). Пусть Φ имеет центр в O и задается уравнением $r = r(\phi)$. Длину отрезка PQ в евклидовой метрике будем обозначать PQ, а в метрике ρ_Φ – $\|PQ\|$.

1.1. В силу однородности метрики ρ_Φ верхний угол $\alpha(l,l')$ между прямолинейными лучами l и l', исходящими из O, можно вычислить так: пусть $\{X\} = l \cap \Phi$. Тогда, очевидно,

$$\alpha(l,l') = \sup_{Y \in l'} \gamma(X,Y).$$

1.2. Пусть лучи $l_0, l_1, \ldots, l_n$ с вершиной O в полярных координатах заданы уравнениями $\varphi = \varphi_i$, где $0 = \phi_0 < \phi_1 < \ldots < \phi_n < 2\pi$.

Рассмотрим сумму

$$S(\{l_i\}, n, \Phi) := \alpha(l_0,l_1) + \alpha(l_1,l_2) + \ldots + \alpha(l_{n-1},l_n) + \alpha(l_n,l_0). \quad (1)$$

Полный верхний угол $\theta(\Phi)$ вокруг O в ρ_Φ вычисляется по формуле

$$\theta(\Phi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S(\{l_i\}, n, \Phi),$$

где верхний предел берется по всевозможным упорядоченным наборам лучей $\{l_i\}$ (или углов ϕ_i).

Теорема 1. *Если кривая Φ' получена невырожденным аффинным преобразованием из кривой Φ, то*

$$\theta(\Phi') = \theta(\Phi), \quad (2)$$

т.е. полный верхний угол плоскости Минковского с метрикой ρ_Φ вокруг точки есть аффинный инвариант кривой Φ.

Доказательство очевидно. •

Это наблюдение иногда позволяет упростить вычисления $\theta(\Phi)$ за счет удачного аффинного преобразования исходной фигуры Φ. Простой пример: вместо параллелограмма Φ можно рассматривать его аффинный образ – квадрат.

1.3. "Самопериметр". Обозначим через $p(\Phi)$ "самопериметр" фигуры Φ, т.е. ее периметр, измеренный в метрике ρ_Φ.

Теорема 2. *Для любой центрально-симметричной выпуклой кривой Φ имеет место неравенство*

$$\theta(\Phi) \geqslant \max\{2\pi, p(\Phi)\}. \quad (3)$$

Доказательство. Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в Φ можно вписать многоугольник $M_1 M_2 \ldots M_k$ с

$$\sum_{i=1}^{k} \|M_i M_{i+1}\| > p(\Phi) - \varepsilon \quad (4)$$

(здесь и ниже $M_{k+1} = M_1$). Кроме того,

$$\theta(\Phi) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha(OM_i, OM_{i+1}) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \|M_i M_{i+1}\| > p(\Phi) - \varepsilon. \tag{5}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и того, что, как легко видеть,

$$\theta(\Phi) \geqslant 2\pi, \tag{6}$$

получаем утверждение теоремы. •

Отсюда следует, например, что если Φ – квадрат, то $\theta(\Phi) \geqslant 8 > 2\pi$. (По теореме Ю. Г. Решетняка [5] имеем $6 \leqslant p(\Phi) \leqslant 8$, причем равенство в правом неравенстве выполняется для параллелограмма.) Точное же значение $\theta(\Phi)$, если Φ – квадрат, найдено ниже (теорема 4).

§2. Коэффициент искажения угла k_Φ

Определение. Пусть лучи l и l' в полярных координатах заданы, соответственно, уравнениями

$$\phi = \phi_0 = \text{const}, \ \ \phi = \phi_0 + \delta, \ \ \delta > 0.$$

Коэффициентом искажения угла в направлении l (определяемом углом ϕ_0) в метрике ρ_Φ назовем величину

$$k_\Phi(\phi_0) := \lim_{\delta \to 0} \frac{\alpha(l, l')}{\delta}, \tag{7}$$

если этот предел существует.

Теорема 3.

$$k_\Phi(\phi) = \sup_{\psi \in (0;\pi)} \left\{ \left(\frac{r(\phi)}{r(\phi + \psi) \sin \psi} \right)^2 - \left(\operatorname{ctg} \psi - \frac{r'(\phi)}{r(\phi)} \right)^2 \right\}^{1/2}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $X := (r(\phi_0), \phi_0)$, точка $Y \in l'$ и $\psi := \pi - \angle OXY$. Тогда

$$XY = r(\phi_0) \frac{\sin \delta}{\sin(\psi - \delta)}, \quad OY = r(\phi_0) \frac{\sin \psi}{\sin(\psi - \delta)}. \tag{9}$$

Отсюда

$$\|OX\| = 1,$$
$$\|OY\| = \frac{OY}{r(\phi_0+\delta)} = \frac{r(\phi_0)\sin\psi}{r(\phi_0+\delta)\sin(\psi-\delta)}, \qquad (10)$$
$$\|XY\| = \frac{XY}{r(\phi_0+\psi)} = \frac{r(\phi_0)\sin\delta}{r(\phi_0+\psi)\sin(\psi-\delta)}.$$

Положим

$$T(\phi_0,\psi) := \lim_{\delta\to 0}\frac{\gamma(X,Y)}{\delta}.$$

Тогда, согласно (7),

$$k_\Phi(\phi_0) = \sup_{\psi\in(0;\pi)} T(\phi_0,\psi). \qquad (11)$$

Осталось воспользоваться формулами (10):

$$\gamma^2(X,Y) \sim 2(1-\cos\gamma(X,Y)) = \frac{\|XY\|^2 - (\|OX\|-\|OY\|)^2}{\|OX\|\|OY\|}$$

$$= \frac{r(\phi_0)r(\phi_0+\delta)\sin^2\delta}{r^2(\phi_0+\psi)\sin\psi\sin(\psi-\delta)} - \frac{(r(\phi_0+\delta)\sin(\psi-\delta) - r(\phi_0)\sin\psi)^2}{r(\phi_0)r(\phi_0+\delta)\sin\psi\sin(\psi-\delta)}$$

$$\sim \frac{r^2(\phi_0)}{r^2(\phi_0+\psi)\sin^2\psi}\delta^2 - \frac{(r(\phi_0)\cos\psi - r'(\phi_0)\sin\psi)^2}{r^2(\phi_0)\sin^2\psi}\delta^2. \qquad (12)$$

(Здесь под $r'(\phi_0)$ понимается при необходимости односторонняя производная, например, правая, существующая ввиду выпуклости Φ.) •

Следствие. *Для любой центрально-симметричной выпуклой кривой Φ имеет место равенство*

$$\theta(\Phi) = \int_0^{2\pi} k_\Phi(\phi)d\phi, \qquad (13)$$

где $k_\Phi(\phi)$ задается формулой (17). •

Замечание. Как известно,

$$\frac{r'(\phi)}{r(\phi)} = \operatorname{ctg}\mu,$$

где μ – угол между (полу)касательной к кривой $r = r(\phi)$ и полярным радиусом (см. [6, с. 19]), поэтому

$$T^2(\phi,\psi) = \left(\frac{r(\phi)}{r(\phi+\psi)\sin\psi}\right)^2 - (\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{ctg}\mu)^2.$$

Для вычисления полного верхнего угла бывает полезна следующая несложная лемма.

Лемма. *Пусть $[AB], [CD] \subset \Phi$ – параллельные прямолинейные отрезки. Если $(r(\phi), \phi) \in [AB]$, а $(r(\phi+\psi), \phi+\psi) \in [AB] \cup [CD]$, то*

$$T(\phi,\psi) = 0. \quad \bullet$$

§3. Случай, когда Φ – квадрат

Теорема 4. *Если Φ – евклидов параллелограмм, то*

$$\theta(\Phi) = 4\pi.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно рассмотреть случай, когда Φ – квадрат.

Пусть Φ – квадрат $A_1A_2A_3A_4$ с центром в начале координат и сторонами, лежащими на прямых $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Середины его сторон обозначим M_1, M_2, M_3, M_4. Ясно, что $\theta(\Phi) = 8\alpha$, где $\alpha := \alpha(OM_1, OA_2)$.

Для точки $X(r(\phi),\phi) \in [M_1A_2]$ имеем $\phi \in [0; \pi/4]$ и

$$r(\phi) = \frac{1}{\cos\phi}.$$

Найдем $\sup\limits_{\psi\in[0;\pi)} T(\phi,\psi)$.

Если

$$Y(r(\phi+\psi), \phi+\psi) \in [XA_2] \cup [A_3X'] \subset [A_1A_2] \cup [A_3A_4]^1,$$

то по лемме из §2

$$T(\phi,\psi) = 0 \quad \text{если} \quad \phi \in [0; \pi/4] \quad \text{и} \quad \psi \in [0; \pi/4 - \phi] \cup [3\pi/4 - \phi; \pi).$$

[1] Здесь, как и в остальных примерах, X' обозначает точку, симметричную X относительно центра O фигуры Φ.

Если $Y \in [A_2A_3]$, т.е. $\phi+\psi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$, то $r(\phi+\psi) = \operatorname{cosec}(\phi+\psi)$ и

$$T^2(\phi,\psi) = \left(\frac{\sin(\phi+\psi)}{\cos\phi\sin\psi}\right)^2 - \left(\frac{\cos(\phi+\psi)}{\cos\phi\sin\psi}\right)^2 = -\frac{\cos 2(\phi+\psi)}{\cos^2\phi\sin^2\psi}. \quad (14)$$

Так как $T^2(\phi,\psi)|_{\phi+\psi=\pi/4} = T^2(\phi,\psi)|_{\phi+\psi=3\pi/4} = 0$, а

$$\frac{\partial T^2(\phi,\psi)}{\partial\psi} = 2\,\frac{\cos(2\phi+\psi)}{\cos^2\phi\sin^3\psi},$$

то $\sup\limits_{\psi\in[0;\pi]} T^2(\phi,\psi)$ достигается при условии

$$\cos(2\phi+\psi) = 0.$$

Так как при этом $\frac{\pi}{2} - \psi \leqslant 2\phi+\psi \leqslant \frac{3\pi}{2} - \psi < \frac{3\pi}{2}$, то $2\phi+\psi = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\psi = \frac{\pi}{2} - 2\phi$.

Подставляя в (14), получаем

$$k^2(\phi) = \sup_{\psi\in[0;\pi]} T^2(\phi,\psi) = \frac{1}{\cos^2\phi\cos 2\phi}.$$

Поэтому

$$\alpha = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\cos\phi\sqrt{\cos 2\phi}} = \frac{\pi}{2}. \quad \bullet$$

§4. Случай, когда Φ – “срезанная окружность”

Теорема 5. *Пусть Φ – это евклидова окружность, у которой две дуги, стягивающие вертикальные центральные углы величиной 2μ $(0 \leqslant \mu \leqslant \frac{\pi}{2})$, заменены хордами (“срезанная окружность”). Тогда*

$$\theta(\Phi) = 2\pi(1+\sin\mu).$$

Доказательство. Пусть Φ состоит из дуг AB и CD окружности $x^2+y^2=1$, лежащих в полосе $|x| \leqslant m \in (0;1]$, и хорд BC и AD этой окружности, лежащих на прямых $x = \pm m$. В евклидовой метрике $\angle COE = \mu := \arccos m$. Обозначим величину верхнего угла сектора COE в метрике ρ_Φ через α, а сектора COF – через β. Тогда

$$\theta(\Phi) = 4(\alpha+\beta).$$

Полярный радиус точки $X(r,\phi)\in\Phi$ равен

$$r(\phi)=\begin{cases} \dfrac{m}{\cos\phi}=\dfrac{\cos\mu}{\cos\phi}, & \text{если } X\in[BC],\\ \dfrac{m}{-\cos\phi}, & \text{если } X\in[AD],\\ 1, & \text{если } X\in\overset{\frown}{AB}\cup\overset{\frown}{CD}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству следующих двух утверждений.

Утверждение 1. $\alpha=\frac{\pi}{2}\sin\mu$.

Доказательство. Пусть $X(r,\phi)\in[EC]$, т.е. $\phi\in[0;\mu]$.

Если $Y(r,\phi+\psi)\in[XC]\cup[DX']$, т.е. $\psi\in[0;\mu-\phi]\cup[\pi-\mu-\phi;\pi]$, то $T(\phi,\psi)=0$ по лемме из §2.

Если же $Y(r,\phi+\psi)\in\overset{\frown}{CD}$, т.е. $\psi\in[\mu-\phi,\pi-\mu-\phi]$, то

$$T^2(\phi,\psi)=\frac{m^2-\cos^2(\phi+\psi)}{\cos^2\phi\sin^2\psi},$$

причем на концах промежутка будет $T(\phi,\psi)=0$. Следовательно, при фиксированном $\phi\in[0,\mu]$ супремум $\sup\limits_{\psi\in[\mu-\phi;\pi-\mu-\phi]}T^2(\phi,\psi)$ достигается при $\partial_\psi(T^2(\phi,\psi))=0$, т.е.

$$\cos(\phi+\psi)\cos\phi-m^2\cos\psi=0,$$

откуда следует, что при $\phi\in[0;\mu]$

$$k_\Phi(\phi)=\sup_{\psi\in[\mu-\phi;\pi-\mu-\phi]}T(\phi,\psi)=\frac{m\sqrt{1-m^2}}{\cos\phi\sqrt{\cos^2\phi-m^2}}$$

и

$$\alpha=\int_0^\mu k_\Phi(\phi)d\phi=\frac{\pi}{2}\sin\mu.\quad\bullet$$

Утверждение 2. $\beta=\pi/2$.

Доказательство. Пусть $X(r,\phi)\in\overset{\frown}{CF}$, т.е. $\mu\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Если $Y(r,\phi+\psi)\in\overset{\frown}{XD}\cup\overset{\frown}{AX'}$, т.е. $\psi\in[0;\pi-\mu-\phi]\cup[\pi+\mu-\phi;\pi]$, то $T(\phi,\psi)=1$.

Если $Y(r, \phi+\psi) \in [AD]$, т.е. $\psi \in [\pi-\mu-\phi, \pi+\mu-\phi]$, то

$$T^2(\phi,\psi) = \frac{\cos^2(\phi+\psi) - m^2\cos^2\psi}{m^2\sin^2\psi},$$

причем при $\psi_{1,2} := \pi \pm \mu - \phi$ будет $T(\phi, \psi_{1,2}) = 1$. Поэтому при фиксированном $\phi \in [\mu, \frac{\pi}{2}]$ супремум $\sup\limits_{\psi \in [\psi_1;\psi_2]} T(\phi,\psi)$ достигается при $\partial_\psi(T^2(\phi,\psi)) = 0$, т.е.

$$-\cos(\phi+\psi)\cos\phi + m^2\cos\psi = 0.$$

Следовательно, при $\phi \in [\mu, \frac{\pi}{2}]$ имеем

$$k_\Phi(\phi) = \sup_\psi T(\phi,\psi) = \frac{\sin\phi}{\sqrt{m^2 - \cos^2\phi}}$$

и

$$\beta = \int\limits_\mu^{\pi/2} k_\Phi(\phi)d\phi = \frac{\pi}{2}. \quad \bullet$$

При "сжатии" плоскости к оси x с коэффициентом $\lambda \in (0;1)$ ("растяжении" при $\lambda > 1$) срезанная окружность перейдет в "простой[1] срезанный эллипс". Он характеризуется числом λ (отношением длин осей эллипса) и углом $\nu = \angle C'OE$, причем $\operatorname{tg}\nu = \lambda \operatorname{tg}\mu$. Поэтому из доказанной теоремы вытекает:

Следствие. *Пусть Φ – "простой срезанный эллипс". Тогда*

$$\theta(\Phi) = 2\pi\left(1 + \frac{\sin\nu}{\sqrt{\sin^2\nu + \lambda^2\cos^2\nu}}\right). \quad \bullet$$

§5. Случай, когда Φ – "скругленный ромб"

Пусть из точек $F(b,0)$, $G(-b,0)$, $b>1$, проведены касательные к окружности $x^2+y^2=1$; A, B, C, D – точки касания. Кривая Φ состоит из прямолинейных отрезков $[FA]$, $[FB]$, $[GC]$, $[GD]$ и дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ этой окружности. Положим

$$\beta := \angle BFO, \quad \gamma := \angle FOB = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

[1] "Простой", когда срезающие хорды параллельны одной из осей эллипса.

Фигуру Φ назовем "скругленным ромбом" с углом 2β. Φ (с точностью до подобия) однозначно определяется параметром $\beta \in (0;\pi/2)$.

Теорема 6. *Пусть Φ – скругленный ромб с углом 2β. Тогда*

$$\theta(\Phi) = 4\pi - 4\beta.$$

Доказательство. Обозначим через α_1 (соотв., α_2) величину верхнего угла сектора FOB (соотв., BOH) в метрике ρ_Φ. Ясно, что

$$\theta(\Phi) = 4(\alpha_1 + \alpha_2).$$

В полярных координатах Φ задается функцией

$$r(\phi) = \begin{cases} \sec(\gamma-\phi), & \text{если } \phi \in [0;\gamma], \\ 1, & \text{если } \phi \in [\gamma;\pi-\gamma], \\ \sec(\phi-\frac{\pi}{2}-\beta), & \text{если } \phi \in [\pi-\gamma;\pi], \\ \sec(\pi+\gamma-\phi), & \text{если } \phi \in [\pi;\pi+\gamma], \\ 1, & \text{если } \phi \in [\pi+\gamma;2\pi-\gamma], \\ \sec(\phi-2\pi+\gamma), & \text{если } \phi \in [2\pi-\gamma;2\pi], \end{cases}$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству следующих двух утверждений.

Утверждение 1. $\alpha_1 = \pi - 2\beta$.

Доказательство. Пусть $X(r(\phi),\phi) \in [FB]$. Тогда $r(\phi) = \sec(\gamma-\phi)$. Зафиксируем ϕ и найдем $k_\Phi(\phi)$.

1а) Если $Y(r(\phi+\psi),\phi+\psi) \in [XB] \cup [GX'] \subset [FB] \cup [GD]$, то по лемме будет $T^2(\phi,\psi) = 0$.

1б) Если $Y \in \overset{\frown}{BC}$, т.е. $\phi+\psi \in (\frac{\pi}{2}-\beta;\frac{\pi}{2}+\beta)$, то $r(\phi+\psi) = 1$ и по (16) будет

$$T^2(\phi,\psi) = \frac{\sin^2(\gamma-\phi-\psi)}{\cos^2(\gamma-\phi)\sin^2\psi}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial \psi} = \frac{2\sin(\phi+\psi-\gamma)\sin(\gamma-\phi)}{\cos^2(\gamma-\phi)\sin^3\psi}. \tag{16}$$

Здесь $\psi \in (\frac{\pi}{2}-\beta-\phi, \frac{\pi}{2}+\beta-\phi)$, и на концах этого интервала будет

$$T^2(\phi,\frac{\pi}{2}-\beta-\phi) = 0, \quad T^2(\phi,\frac{\pi}{2}+\beta-\phi) = \frac{\sin^2 2\gamma}{\cos^2(\gamma-\phi)\sin(\gamma+\phi)}. \tag{17}$$

Поскольку $\psi \in (0;\pi)$, $\gamma - \phi > 0$, $\phi + \psi - \gamma > 0$, то все сомножители в (16) положительны, следовательно, $\partial_\psi(T^2) > 0$, а $T^2(\phi,\psi)$, как функция ψ (при фиксированном ϕ), возрастает и достигает максимума при $\phi + \psi = \dfrac{\pi}{2} + \beta$.

1в) Если $Y \in [CG]$, т.е. $\phi + \psi \in (\frac{\pi}{2} + \beta; \pi)$ и $r(\phi+\psi) = -\sec(\phi + \psi + \gamma)$, то из (8) следует, что

$$T^2(\phi,\psi) = \frac{-\sin 2\gamma \sin(2\phi + 2\psi)}{\sin^2\psi \cos^2(\gamma - \phi)},$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial \psi} = \frac{2\sin 2\gamma \sin(2\phi + \psi)}{\cos^2(\gamma - \phi)\sin^3\psi}. \tag{18}$$

На левом конце интервала $\psi \in (\pi - \gamma - \phi; \pi - \phi)$ имеем

$$T^2(\phi,\psi)|_{\psi = \pi - \gamma - \phi + 0} = \frac{\sin^2 2\gamma}{\sin^2(\gamma + \phi)\cos^2(\gamma - \phi)},$$

т.е. такое же значение, что и в 1б), а $T^2(\phi,\psi)|_{\psi=\pi-\phi-0} = 0$.

Здесь $\psi \in (\pi - \gamma - \phi; \pi - \phi)$, поэтому знак $\partial_\psi(T^2)$ совпадает со знаком $\sin(2\phi + \psi)$, но

$$\sin(2\phi+\psi)|_{\psi=\pi-\gamma-\phi} = \sin(\pi - \gamma - \phi) > 0,$$

$$\sin(2\phi+\psi)|_{\psi=\pi-\phi} = \sin(\pi + \phi) < 0,$$

т.е. функция $T^2(\phi,\psi)$ при фиксированном ϕ на интервале $\psi \in [\pi - \gamma - \phi, \pi - \phi]$ имеет максимум при $\psi_0 = \pi - 2\phi$.

Объединяя случаи 1а)–1в), видим, что функция $T^2(\phi,\psi)$ (при фиксированном ϕ) при $\phi + \psi \in (0;\pi)$ непрерывно дифференцируема и имеет максимум при $\psi = \psi_0 = \pi - 2\phi$, так что $k^2(\phi) = \sup\limits_{\phi+\psi\in(0;\pi)} T^2(\phi,\psi_0)$ и при $0 < \phi < \gamma$ будет

$$k_\Phi(\phi) = \frac{\sqrt{\sin 2\gamma}}{\cos(\gamma - \phi)\sqrt{\sin 2\phi}},$$

т.е.

$$\alpha_1 = \sqrt{\sin 2\gamma}\int\limits_0^\phi \frac{d\phi}{\cos(\gamma-\phi)\sqrt{\sin 2\phi}} = 2\gamma = \pi - 2\beta. \quad \bullet$$

Утверждение 2. $\alpha_2 = \beta$.

Доказательство. Пусть $X \in \overset{\frown}{BC}$. Тогда $r(\phi) = 1$ и $r'(\phi) = 0$. Найдем $T(\phi, \psi)$.

2а) Если $Y \in \overset{\frown}{XC} \subset \overset{\frown}{BC}$ или если $Y \in \overset{\frown}{DX'} \subset \overset{\frown}{DA}$, то $r(\phi+\psi) = 1$ и формула (8) дает $T(\phi) = 1$.

2б) Если $Y \in [CG]$, то $r(\phi + \psi) = \sec(\phi + \psi - \frac{\pi}{2} - \beta)$. Из (8) получаем

$$T^2(\phi, \psi) = -\frac{\cos(\phi + 2\psi - \beta)}{\sin^2 \psi},$$

поэтому

$$T^2(\phi, \psi)|_{\phi+\psi=\pi/2+\beta} = 1, \qquad T^2(\phi, \psi)|_{\phi+\psi=\pi} = -\frac{\cos 2\beta + \cos 2\phi}{2 \sin^2 \psi},$$

$$\frac{\partial T^2(\phi, \psi)}{\partial \psi} = \frac{\cos(\phi - \beta) \cos(\phi + \psi - \beta)}{\sin^3 \psi}.$$

Поскольку $\cos(\phi - \beta) > 0 > \cos(\phi + \psi - \beta)$, то $T(\phi, \psi)$ при фиксированном ϕ есть убывающая функция от ψ при $\phi + \psi \in (\frac{\pi}{2} + \beta; \pi)$, и ее максимум равен $T^2(\phi, \psi)|_{\phi+\psi=\pi/2+\beta} = 1$.

2в) Если $Y \in [GD]$, то $r(\phi + \psi) = \sec(\frac{3\pi}{2} - \beta - \phi - \psi)$ и

$$T^2(\phi, \psi) = -\frac{\cos(\phi + 2\psi + \beta)\ \cos(\phi + \beta)}{\sin^2 \psi}.$$

Значения $T^2(\phi, \psi)$ на концах отрезка $[GD]$ будут

$$T^2(\phi, \psi)|_G = -\frac{\cos 2\beta + \cos 2\phi}{2 \sin^2 \phi}, \quad T^2(\phi, \psi)|_D = 1.$$

Поскольку $\cos(\phi + \beta) < 0$ и $\cos(\phi + \psi + \beta) < 0$, то $\partial_\psi(T^2) > 0$ при $Y \in [GD]$, т.е. $\max\limits_{Y \in [GD]} T^2(\phi, \psi) = 1$.

Из 2а)–2в) следует, что при $\phi \in (\frac{\pi}{2} - \beta; \frac{\pi}{2} + \beta)$

$$k_\Phi(\phi) = \sup_{\psi \in (0;\pi)} T(\phi, \psi) = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \int\limits_{\pi/2-\beta}^{\pi/2} d\phi = \beta. \quad \bullet$$

Литература

1. А. Д. Александров, *Основы внутренней геометрии поверхностей.* — Докл. АН СССР **60**, № 9 (1948), 1483–1486.
2. А. Д. Александров, *Кривые в многообразиях ограниченной кривизны.* — Докл. АН СССР **63**, № 4 (1948), 349–352.
3. А. Д. Александров, В. А. Залгаллер, *Двумерные многообразия ограниченной кривизны.* — Труды МИАН им. В.А. Стеклова **63** (1962).
4. Ю. Г. Дуткевич, *О полном верхнем угле вокруг точки на плоскости в метрике Минковского.* — В кн.: Всесоюзная конференция по геометрии "в целом". Тезисы докладов. Новосибирск, СО АН СССР, 1987.
5. Ю. Г. Решетняк, *Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых.* — УМН **8**, № 6 (1953), 125–126.
6. С. П. Фиников, *Курс дифференциальной геометрии.* М., ГИТТЛ, 1953.

Dutkevich Yu. G. On the complete upper angle about a point on the Minkowski plane.

The dependence of the complete upper angle in the sense of A. D. Aleksandrov about a point on the Minkowski plane on the form of the "unit circle" (the centrally symmetric convex curve Φ determining the Minkowski metric ρ_Φ) is studied. The complete upper angle is computed in three cases: if Φ is a square, a "cut circle," or a "rounded rhombus."

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 мая 2001 г.