Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

О. А. Иванов

ФОРМА ИНДЕКСА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА СКЛЕИВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Посвящаю моему отцу

Пусть $M = \bigcup_i M_i$ – замкнутое ориентированное $4k$-мерное многообразие, являющееся объединением компактных многообразий $M_1, \dots, M_n$, попарные пересечения которых

$$X_{ij} = M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j, \quad i \neq j,$$

открыто-замкнуты в ∂M_i и ∂M_j. Всюду в дальнейшем считаем, что ориентация на M_i индуцирована ориентацией на M.

Пусть

$$L = H_{2k}(M)/\operatorname{Tors}, \quad L_i = H_{2k}(M_i)/\operatorname{Tors}, \quad i = 1, \dots, n,$$

– решетки индекса пересечения многообразий M и M_i, соответственно. Формы индекса пересечения на них будем обозначать b и b_i. Предполагается, что формы b_i невырожденны, что равносильно следующему геометрическому утверждению: образ граничного гомоморфизма

$$\partial_i \colon H_{2k}(M_i, \partial M_i) \to H_{2k-1}(\partial M_i)$$

лежит в кручении группы $H_{2k-1}(\partial M_i)$.

Через $\overline{b}_i$ обозначим принимающую рациональные значения форму на группе $L_i^{\#} := \operatorname{Hom}(L_i, \mathbb{Z})$; для простоты считаем, что $L_i \subset L_i^{\#}$. Форма $\overline{b}_i$ индуцирует на факторгруппе $D_i := L_i^{\#}/L_i$ форму β_i со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, называемую *дискриминантной формой* решетки L_i.

Пусть η_i – форма коэффициентов зацепления на группе $H_{2k-1}(\partial M_i)$; рассмотрим также ее подгруппы

$$H_i := \partial(H_{2k}(M_i)) \quad \text{и} \quad T_i := \partial(\operatorname{Tors} H_{2k}(M_i)).$$

Как известно, группы H_i и T_i являются ортогональными дополнениями друг друга относительно формы η_i, $H_i/T_i \cong D_i$ и, более того, дискриминантная форма β_i является фактором формы η_i (ср. [1, 2]).

Пусть $X := \bigcup_i \partial M_i \subset M$. Положим $G := \operatorname{Tors} H_{2k-1}(X)$. Таким образом, можно считать, что $H_i \subset G$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\sigma\colon \bigoplus_i D_i \cong \bigoplus_i H_i/T_i \to \sum_i H_i \Big/ \sum_i T_i.$$

Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения, анонсированного в [3].

Теорема 3. *Решетка L индекса пересечения многообразия M совпадает с прообразом группы $B = \ker\sigma$ при гомоморфизме факторизации $\bigoplus_i L_i^{\#} \to \bigoplus_i D_i$.*

Доказательство. Оно следует идеям работы [1]. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{2k}(M) \arrow[r] & H_{2k}(M,X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H_{2k-1}(X) \\
& \bigoplus_i H_{2k}(M_i,\partial M_i) \arrow[r, "\bigoplus_i \partial_i"] & \bigoplus_i H_{2k-1}(\partial M_i), \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

верхняя строка которой – отрезок последовательности пары. Ее коммутативность означает, что сужение $\partial|_{H_{2k}(M_i,\partial M_i)}$ является композицией гомоморфизма ∂_i и естественного включения.

Применяя к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tors} H_{2k}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i \operatorname{Tors} H_{2k}(M_i,\partial M_i) \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d] & G \arrow[d, equal] \\
H_{2k}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i H_{2k}(M_i,\partial M_i) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & G \\
L \arrow[r] & \bigoplus_i L_i^{\#} &
\end{tikzcd}$$

лемму из §2 работы [2], получаем

$$\bigoplus_i L_i^{\#}/L \cong \operatorname{im}\partial/\operatorname{im}\partial' = \sum_i H_i \Big/ \sum_i T_i.$$

Теперь утверждение теоремы следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \bigoplus_i L_i^{\#} \arrow[r] \arrow[d] & \sum_i H_i \Big/ \sum_i T_i \arrow[r] & 0 \\
& & \bigoplus_i D_i \arrow[r, equal] & \bigoplus_i H_i/T_i \arrow[u, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

и геометрической интерпретации индекса пересечения. □

Замечание. В работе [3] была предложена другая схема доказательства основного результата, намеченная при рассмотрения "модельного примера". Однако в общем случае она неприменима, поскольку на многообразии X, "разрезающем" M на $M_1, \ldots, M_n$, нет канонической ориентации, а потому нет и канонической формы коэффициентов зацепления.

Литература

1. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *Билинейные формы на конечных группах и формы пересечения многообразий.* — В кн.: "Геометрия и анализ", Сб. науч. тр. Кемерово, 1991, с. 3–8.
2. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *Кобордизмы конечных квадратичных форм и склеивание ориентированных многообразий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **208** (1993), 115–132.
3. О. А. Иванов, *О форме пересечений результата склеивания нескольких многообразий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **267** (2000), 143–145.

Ivanov O. A. The intersection form of a manifold glued from several manifolds.

A proof of the result announced in the author's previous paper (Zap. Nauchn. Semin. POMI, **268**, 2000) is given.

С.-Петербургский государственный университет

E-mail: Oleg.Ivanov@pobox.spbu.ru

Поступило 26 декабря 2000 г.