Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

И. О. Калинин

О КОГОМОЛОГИЯХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Множество вещественных точек $\mathbb{R}A$ вещественного алгебраического многообразия A является множеством неподвижных точек инволюции комплексного сопряжения conj, действующей в множестве $\mathbb{C}A$ его комплексных точек. Сопоставление с многообразием A топологического пространства $\mathbb{R}A$ и топологического пространства с инволюцией $(\mathbb{C}A, \mathrm{conj})$ функториально. В настоящей работе изучается кольцо (сингулярных) когомологий $H^*(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2)$ при помощи определенной техники эквивариантной алгебраической топологии.

0.0.1. Одно из эффективных средств для вычисления кольца $H^*(FX, \mathbb{F}_2)$ для пространства с инволюцией X и множества неподвижных точек FX – эквивариантные когомологии Бореля $H^*_G(X)$ и спектральная последовательность Бореля–Серра, сходящаяся к $H^*_G(X)$ (см. [2]). В работе автора [5] для конечных клеточных пространств X с инволюцией был построен стабильный вариант спектральной последовательности Бореля–Серра – последовательность ${}^rH^*(X)$ сходящаяся к $H^*(FX, \mathbb{F}_2)$. Точнее, построены (см. предложение 2.1):

- спектральная последовательность ${}^rH^*(X)$, для которой ${}^2H^*(X) = H^1(C_2, H^*(X, \mathbb{F}_2))$;
- возрастающая фильтрация
$$0 = \mathcal{F}_{-1}(X) \subset \mathcal{F}_0(X) \subset \cdots \subset H^*(FX, \mathbb{F}_2);$$
- изоморфизм
$$\varphi^i : \mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}} H^*(FX, \mathbb{F}_2) = \mathcal{F}_i(X)/\mathcal{F}_{i-1}(X) \to {}^\infty H^i(X).$$

В работах [6–8] последняя спектральная последовательность называется спектральной последовательностью Калинина, фильтрация $\{\mathcal{F}_i(X)\}$ – фильтрацией Калинина, изоморфизм φ^{-1} —

Частично поддержано РФФИ (грант 01-01-01014).

изоморфизмом Виро (геометрическое описание изоморфизма φ^{-1} появилось у О. Я. Виро задолго до работы [5]).

Для вещественного алгебраического многообразия A, для любой конечной абелевой группы M с инволюцией существует канонический однородный изоморфизм

$$H^*_{\mathrm{et}}(A, M) \to H^*_G(\mathbb{C}A; M)$$

между этальными когомологиями и эквивариантными когомологиями Бореля. По-видимому, впервые это было показано в работе [14]. Поэтому спектральную последовательность ${}^rH^*(\mathbb{C}A)$ можно рассматривать и как стабильный вариант спектральной последовательности Хохшильда–Серра. Совпадение этальных и эквивариантных когомологий играет важную роль в доказательстве ключевого предложения 4.8.

0.0.2. Вычисление кольца когомологий $H^*(\mathbb{R}A)$ при помощи спектральной последовательности разбивается на две части: вычисление члена ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$ и переход от ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$ к кольцу $H^*(\mathbb{R}A)$.

В данной работе первая задача решается для достаточно широкого класса пространств с инволюцией и вещественных алгебраических многообразий. Что позволяет, например, вычислить $\dim(H^*(\mathbb{R}A;\mathbb{F}_2))$ (см. теоремы 1.7 и 5.10) и, в некоторых случаях, этальные когомологии $H^*_{\mathrm{et}}(A;\mathbb{F}_2)$. К сожалению, даже обладая полной информацией о кольце ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$, почти ничего нельзя сказать даже о количестве компонент пространства, т.е. о группе $H^0(\mathbb{R}A;\mathbb{F}_2)$.

Вторая задача, переход от кольца ${}^\infty H^*(\mathbb{C})$ к кольцу $H^*(\mathbb{R}A;\mathbb{F}_2)$, не решена даже в простых случаях (квинтики в $\mathbb{P}^3$). Она сводится к изучению фильтрации $\{\mathcal{F}_i(\mathbb{C}A)\}$ кольца когомологий $H^*(\mathbb{R};\mathbb{F}_2)$, которая устроена довольно сложно, например, подгруппы $\mathcal{F}_i(\mathbb{C}A)$ не обязательно согласованы с градуировкой группы $H^*(\mathbb{R}A;\mathbb{F}_2)$. Тем не менее, в настоящей работе эта задача полностью решена для ряда вещественных алгебраических многообразий (см. п. 1.2). Более того, вводится класс пространств с инволюцией, так называемые *эффективные* пространства, для которых кольцо (и даже алгебра над алгеброй Стинрода) $H^*(\mathbb{R}A;\mathbb{F}_2)$ эффективно вычисляется при помощи алгебры ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$.

0.1. Соглашения. Все когомологии, если не указано противное, берутся с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$. Через C_2 будем обозначать циклическую группу порядка 2. Пространства с инволюцией, эквивариантные отображения пространств с инволюцией, пары пространств с инволюцией и т.д. для краткости будем называть, соответственно, C_2-пространствами, C_2-отображениями, C_2-парами и т.д.

Пусть M – $\mathbb{Z}$-градуированная группа, $\Omega \subset \mathbb{R}$, положим

$$M^\Omega = \bigoplus_{i \in \Omega \cap \mathbb{Z}} M^i.$$

В частности, если $\Omega \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, то группа M^Ω – тривиальна.

0.2. Благодарности. Автор считает своим долгом выразить горячую благодарность Н. Ю. Нецветаеву за помощь в работе над статьей.

§1. Основные результаты

1.1. Эффективные пространства. C_2-пространство X будем называть *эффективным*, если справедливо $\mathcal{F}_i(X) = \mathrm{Sq}\, H^{\leq i/2}(FX)$, где $\mathrm{Sq} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \ldots$ – тотальная операция Стинрода. *Эффективная* C_2-пара определяется аналогично. Разумеется, для таких пространств и пар градуированная группа ${}^\infty H^*(-)$ нетривиальна только в четных размерностях. Для эффективных пространств проблема перехода от ${}^\infty H^*(X)$ к $H^*(FX)$ имеет каноническое решение: в предложении 3.2 построен естественный изоморфизм $\psi_X : H^*(FX) \to {}^\infty H^*(X)$, который переводит группу $H^i(FX)$ в группу ${}^\infty H^{2i}(X)$. Изоморфизм ψ_X является изоморфизмом колец и в некотором смысле изоморфизмом алгебр над алгеброй Стинрода:

Предложение 1.1. *Пусть X – эффективное пространство, $x \in H^*(FX)$. Тогда*

$$\psi_X(\mathrm{Sq}^i x) = \mathrm{Sq}^{2i} \psi_X(x).$$

То, что действие операций Sq в кольце $H^*(X)$ индуцирует действие этих операций в члене ${}^r H^*(X)$, показано в работе [6] (ср. предложение 2.4). Там же установлена связь между действиями квадратов Стинрода на кольцах $H^*(FX)$ и ${}^\infty H^*(X)$ произвольного пространства с инволюцией, которая выглядит существенно сложнее указанной в предложении 1.1. В силу этого предложения для важного частного случая эффективного M-пространства (пространство с инволюцией называется *M-пространством*, если $H^*(X) = {}^\infty H^*(X)$, см. п. 3.1) алгебры $H^*(FX)$ и $H^*(X)$ над алгеброй Стинрода изоморфны (изоморфизм удваивает степени, и действию Sq^i на $H^*(FX)$ соответствует действие Sq^{2i} на $H^*(X)$, а операции Sq^{2i+1} действуют на $H^*(X)$ тривиально).

Класс эффективных пространств замкнут по отношению к многим топологическим конструкциям (см. §3). Отметим также, что когомологии эффективных "кусков" пространства с инволюцией не смешиваются (теорема 3.7 и следствие 3.7) и для эффективного M-пространства существует простая функториальная формула для когомологий факторпространства с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$.

1.1.1. Примеры эффективных пространств. Рассмотрим вещественное алгебраическое многообразие A (возможно, особое). Следуя Фултону [9] будем говорить, что A *допускает вещественное "клеточное разбиение"*, если существует фильтрация замкнутыми (по Зарисскому) вещественными подмногообразиями

$$0 = A_{-1} \subset A_0 \subset \ldots \subset A_r = A$$

такая, что $A_i \setminus A_{i-1}$ – вещественное аффинное пространство для каждого i.

Теорема 1.2. *Пусть A – вещественное алгебраическое многообразие, допускающее вещественное "клеточное разбиение". Тогда пространство $\mathbb{C}A$ с инволюцией комплексного сопряжения является эффективным M-пространством.*

Из этой теоремы следует, что проективные пространства, грассманианы, многообразия флагов и произведения этих пространств являются эффективными.

Следующий пример показывает, что существует много эффективных пространств неалгебраического происхождения.

Предложение 1.3. *Пусть X – конечное клеточное пространство, $t : X \times X \to X \times X$ – переставляющая инволюция. Тогда*

(1) *$(X \times X, t)$ – эффективное GM-пространство (пространство с инволюцией Y называется GM-пространством, если ${}^2H^*(Y) = {}^\infty H(Y)$, (см. п. 3.1);*
(2) *$\psi_{X\times X}(x) = \overline{x \times x}$ для $x \in H^*(X)$, где $\overline{x \times x}$ – образ класса $x \times x \in H^*(X \times X)$ в группе $H^1(C_2, H^*(X \times X)) = {}^2H^*(X \times X)$.*

1.2. Лефшецевы подмногообразия эффективных пространств.

Пусть B – проективное вещественное многообразие, для которого пространство $\mathbb{C}B$ является эффективным GM-пространством. В силу сказанного выше, нам известно как кольцо $H^*(\mathbb{R}B)$, так и действие алгебры Стинрода на нем.

Для замкнутого вещественного подмногообразия A многообразия B ситуация с вычислением $H^*(\mathbb{R}A)$ гораздо сложнее. При определенных ограничениях на A удается сделать содержательные оценки (см. предложение 1.4), а иногда и вычислить член ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$ спектральной последовательности, что позволяет сосчитать размерность $\mathbb{F}_2$-модуля $H^*(\mathbb{R}A)$ (см. теорему 1.7) и в некоторых случаях получить информацию о действии инволюции на кольце $H^*(\mathbb{C}A)$ (см. теорему 1.8).

Задача перехода от ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$ к $H^*(\mathbb{R}A)$, как указывалось ранее, не решена даже в простейших случаях. Хотя некоторую надежду дает предложение 1.6, в котором для некоторого, возможно довольно большого (см. п. 1.2.2), класса вещественных алгебраических многообразий вводится дополнительная естественная градуировка модуля ${}^\infty H^*(\mathbb{C}A)$.

1.2.1. Функторы $H^*(\mathbb{R}-)$, $H^*(\mathbb{C}-)$ и ${}^r H(-)$, примененные к вложению $\mathrm{in}_{B/A} : A \to B$, индуцирует гомоморфизмы $\mathbb{R}\,\mathrm{in}^*_{B/A}$, $\mathbb{C}\mathrm{in}^*_{B/A}$ и ${}^r\,\mathrm{in}_{B/A}$ соответствующих объектов.

Предложение 1.4. *Пусть пара (B, A) удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *$\mathbb{C}B$ – эффективное GM-пространство;*
(2) *A – неособое n-мерное многообразие;*
(3) *$H^{\le n}(\mathbb{C}B, \mathbb{C}A) = 0$.*

Тогда:

(1) $\dim(H^1(C_2, H^*(\mathbb{C}A)) - 4\dim(\mathrm{Ker}^{<n/2}(\mathbb{R}\,\mathrm{in}^*_{B/A}))$
$\le \dim(H^*(\mathbb{R}A))$
$\le \dim(H^1(C_2, H^*(\mathbb{C}A)) - 2\dim(\mathrm{Ker}^{<n/2}(\mathbb{R}\,\mathrm{in}^*_{B/A}))$;
(2) *для всех i подгруппы $\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(\mathbb{C}A)$ градуированной группы $H^*(\mathbb{R}A)$ однородны, где Sq^{-1} – обратный к Sq автоморфизм.*

В качестве следствия получается простой критерий вырождения спектральной последовательности инволюции, несколько усиливающий результаты В. А. Краснова.

Следствие 1.5. *Пусть пара (B, A) удовлетворяет условиям предложения 1.4. Тогда $\mathbb{C}A$ – GM-пространство в том и только в том случае, если* $\operatorname{Ker}^{<n/2}(\mathbb{R}\,\mathrm{in}^*_{B/A}) = 0$*;*

1.2.2. Две гипотезы о строении фильтрации $\{\mathcal{F}_i\}$ когомологий вещественных точек неособых проективных многообразий. Обозначим через $\mathcal{A}$ полную подкатегорию категории вещественных алгебраических многообразий, состоящую из многообразий, для которых справедлив п. 2 предложения 1.4.

Автор предполагает, что каждое неособое проективное вещественное многообразие принадлежит подкатегории $\mathcal{A}$.

На когомологиях многообразий из подкатегории $\mathcal{A}$ существует интересная дополнительная структура. Следующее предложение – очевидное следствие естественности фильтрации $\mathcal{F}_*$.

Предложение 1.6. *Пусть $A \in \mathcal{A}$. Тогда для каждого i на группе ${}^{\infty}H^i(\mathbb{C}A)$ существует естественная мультипликативная градуировка ${}^{\infty}H^i(\mathbb{C}A) = \bigoplus_{j\geq 0} H^{ij}(A)$, для которой группа $\bigoplus_{i\geq 0} H^{ij}(A)$ изоморфна группе $H^j(\mathbb{R}A)$.*

Пока об этой дополнительной градуировке известно очень мало. Автору, например, неизвестно, всегда ли тривиально умножение в подкольце $\bigoplus_{i\geq 0} H^{i0}(A)$, изоморфном градуированному кольцу $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(H^0(\mathbb{R}A))$, ассоциированному с фильтрацией, индуцированной на подкольце $H^0(\mathbb{R}A)$ из кольца $H^*(\mathbb{R}A)$. Более подробно об этой градуировке и различных переформулировках и усилениях этих гипотез см. [10].

1.3. Множество нулей сечения обильного расслоения над эффективным пространством. Следующие утверждения требуют вычисления члена ${}^{\infty}H^*(\mathbb{C}A)$ спектральной последовательности, которое удается осуществить только при дополнительных ограничениях на пару (B, A).

Пусть B – неособое $(n+k)$-мерное многообразие, ξ – вещественное алгебраическое векторное расслоение размерности k над B. Пусть s – сечение расслоения ξ, трансверсальное нулевому сечению, пусть A является множеством нулей сечения s. Как очевидно, A – неособое вещественное проективное многообразие размерности n.

1.3.1. Условия. Будем рассматривать четверки (B, ξ, s, A), удовлетворяющие следующим ограничениям:

(1) $\mathbb{C}B$ – эффективное GM-пространство;
(2) расслоение ξ содержит Вещественное подрасслоение η с четным классом Эйлера и либо класс Эйлера расслоения $\mathbb{C}(\xi/\eta)$ четен, либо η – линейное вещественное алгебраическое расслоение.
(3) $H^{\leq n}(\mathbb{C}B, \mathbb{C}A) = 0$.

Заметим, что класс $c_k(\xi)$ четен, и что, как известно, условие (3) выполняется для обильных расслоений (см., например, [9, 11]).

1.3.2. Основные результаты.

Теорема 1.7. *Пусть четверка* (B, ξ, s, A) *удовлетворяет условиям* 1.3.1 *и пусть* $c_k(\xi) \equiv 0 \pmod 4$. *Тогда*

$$\dim(H^*(\mathbb{R}A)) = \dim(H^1(C_2, H^*(\mathbb{C}A))) - 4\dim(\operatorname{Ker}^{<n/2}(\mathbb{R}\operatorname{in}^*_{B/A})).$$

Аналогичное утверждение, справедливое для $c_k(\xi)$, не делящегося на 4, формулируется намного более громоздко (см. теорему 5.10).

Следующая теорема описывает действие инволюции conj на подгруппе $\mathbb{C}in^*_{B/A}(H^n(\mathbb{C}B))$ группы $H^n(\mathbb{C}A)$ и содержательна только для четного n.

Теорема 1.8. *Пусть четверка* (Y, ξ, s, X) *удовлетворяет условиям* 1.3.1 *и пусть* $c_k(\xi) \equiv 0 \pmod 4$. *Тогда следующая последовательность точна*

$$0 \to \operatorname{Ker}^{n/2}(\mathbb{R}\operatorname{in}^*_{B/A}) \xrightarrow{\psi^{n/2}_{\mathbb{C}B}} H^1(C_2, H^n\mathbb{C}B) \xrightarrow{2\operatorname{in}_{B/A}} H^1(C_2, H^n\mathbb{C}A).$$

1.4. Применение теорем 1.7 и 1.8. Условия 1.3.1 выполняются в следующих трех интересных случаях: полные пересечения в проективных пространствах и в многообразиях, допускающих вещественное “клеточное разложение”, и детерминантные многообразия или, в более общем случае, многообразия r-вырождения морфизма вещественных алгебраических векторных расслоений при некоторых ограничениях на базу и морфизм.

1.4.1. Полные пересечения в проективных пространствах. Пусть A – полное пересечение мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ в $\mathbb{P}^N$ порядка $d = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$. Заметим, что многообразие A – множество нулей сечения s расслоения $\xi = \mathcal{O}(d_1) \bigoplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_k)$, соответствующего уравнениям, задающим это многообразие, и A неособо тогда и только тогда, когда s трансверсально нулевому сечению расслоения ξ. Если d четно, нетрудно видеть, что четверка $(\mathbb{C}P^N, \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(d_i), s, A)$ удовлетворяет условиям 1.3.1 и что числа $\dim(\mathrm{Ker}\,(F\,\mathrm{in}^*_{\mathbb{P}^N/A}))$ и $\dim(\mathrm{Ker}\,({}^2\,\mathrm{in}_{\mathbb{P}^N/A}))$ легко выражаются через обычные для вещественной алгебраической геометрии инварианты.

Для подмножества $S \subset \mathbb{R}P^N$ положим

$$l(S) = \max\{-1, i \mid \mathrm{in}^* : H^i(\mathbb{R}P^N) \to H^i(S) \text{ – ненулевой}\},$$

где $\mathrm{in} : S \subset \mathbb{R}P^N$ – включение. Если $A \subset \mathbb{P}^N$ – вещественное проективное многообразие, положим $l(A) = l(\mathbb{R}A)$. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{Ker}\,(F\,\mathrm{in}^*_{\mathbb{P}^N/A}) = \langle t^{l(A)+1} \rangle,$$

где t – образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^N)$. Ясно, что если степень $\deg A$ нечетна, то $l(A) = \dim A$. Инвариант $l(A)$ был введен в [12], в работе О. Я. Виро [13] для вещественных проективных гиперповерхностей он называется *рангом* гиперповерхности.

Обозначим через h образующую группы $H^2(\mathbb{C}P^N)$ и положим

$$\delta_h(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно или } \mathrm{in}^*\, h^{n/2} \in \mathrm{Im}\,(1 + \mathrm{conj}^*) \text{ в } H^n(\mathbb{C}A), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как нетрудно видеть,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,({}^2\,\mathrm{in}_{\mathbb{C}P^N/A})) = 1 - \delta_h(A).$$

Теоремы 1.7, 5.10 и 1.8 в случае полных пересечений принимают следующий вид.

Теорема 1.9. *Пусть A – неособое вещественное проективное полное пересечение степени d и размерности n.*

(1) *Если $l(A) \geq n/2 - 1$ (в частности, если d нечетно), то*

$$\dim(H^*(\mathbb{R}A)) = \dim(H^1(C_2, H^*(\mathbb{C}A))),$$

т.е. $\mathbb{C}A$ – GM-пространство;

(2) *если $l(A) < n/2 - 1$, то*

$$\frac{\dim(H^1(C_2, H^*(\mathbb{C}A))) - \dim(H^*(\mathbb{R}A))}{2} =$$

$$\begin{cases} 2([(n-1)/2] - l(A)) & \text{если } d \equiv 0 \pmod 4; \\ 2[(n/2 - l(A))/2] & \text{если } d \equiv 2 \pmod 4, n \text{ четно}; \\ (n-1)/2 - l(A) & \text{если } d \equiv 2 \pmod 4, n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x.)

Теорема 1.10. *Пусть A – неособое вещественное полное пересечение порядка d и размерности n.*

(1) *Пусть $d \equiv 2 \pmod 4$. Тогда*

$$\delta_h(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } l(A) \equiv n/2 - 1 \pmod 2 \text{ и } l(A) < n/2; \\ 1, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

(2) *Пусть $d \equiv 0 \pmod 4$. Тогда*

$$\delta_h(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } l(A) < n/2; \\ 1, & \text{если } l(A) \geq n/2. \end{cases}$$

Эти теоремы для проективных полных пересечений формируются так же, как и для гиперповерхностей (см. теоремы B и C работы [5]), поэтому и все следствия этих теорем (следствие 1.1, предложения 1.2, 1.3 и 1.4 работы [5]) справедливы для полных пересечений.

1.4.2. Полные пересечения в многообразиях, допускающих вещественное "клеточное разложение". Пусть B – неособое вещественное проективное многообразие, допускающее вещественное "клеточное разбиение" (см. п. 3.1). Пусть A – полное пересечение в B: как и в предыдущем пункте, A – множество нулей сечения s соответствующего обильного расслоения

$$\xi = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k,$$

где λ_i линейны, и A неособо тогда и только тогда, когда s трансверсально нулевому сечению. Если хотя бы один из классов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ четен, то в силу теоремы 1.2 четверка (B, ξ, s, A) удовлетворяет условиям 1.3.1 и, значит, для A справедливы теоремы 1.7, 5.10 и 1.8.

Рассмотрим важный частный случай: пусть $B = \mathbb{P}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_r}$, пусть A задано k уравнениями мультистепеней

$$(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1r}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(d_{k1}, d_{k2}, \dots, d_{kr}),$$

т.е. $\xi = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigotimes_{j=1}^{r} \mathcal{O}(d_{ij})$. Тогда старший класс Чженя расслоения ξ равен $\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{r} d_{ij}\, h_j)$, где h_j – образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^{N_j})$. Четверка (B, ξ, s, A) заведомо удовлетворяет условиям 1.3.1, если $\prod_{i=1}^{k}$ НОД$[d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ir}]$ четно.

Заметим, что если $k \le N_i$ для всех i, то класс $c_k(\xi)$ делится на 4 тогда и только тогда, когда $\prod_{i=1}^{k}$ НОД$[d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ir}]$ делится на 4. (Разумеется, аналогичное утверждение справедливо для любой степени 2.)

Следующие утверждения являются простыми следствиями теорем 1.7 и 1.8.

Предложение 1.11. *Пусть n четно, A – n-мерное полное пересечение в B – произведении проективных пространств, для которого $\prod_{i=1}^{k}$НОД$[d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ir}] \equiv 0 \pmod 4$.*

(1) *Пусть*

$$H^n(\mathbb{C}B) = H^1(C_2, H^n(\mathbb{C}B)) \xrightarrow{2\,\mathrm{in}_{B/A}} H^1(C_2, H^n(\mathbb{C}A))$$

– мономорфизм. Тогда $\mathbb{C}A$ – GM-многообразие.

(2) *Пусть инволюция* conj *действует на группе $H^n(\mathbb{C}A)$ тривиально. Тогда $\mathbb{C}A$ – M-многообразие, т.е.* $\dim(H^*(\mathbb{R}A)) = \dim(H^*(\mathbb{C}A))$.

(3) *Пусть* $\dim(H^n(X)) - \dim(H^1(C_2, H^n(X))) = 2$. *Тогда $\mathbb{C}X$ – GM-многообразие, т.е.*

$$\dim(H^*(\mathbb{R}X)) = \dim(H^1(C_2, H^*(\mathbb{C}Y)) = \dim(H^*(\mathbb{C}X)) - 2.$$

1.5. План статьи. В §2 приводятся без доказательств стандартные утверждения о спектральной последовательности инволюции и фильтрации когомологий множества неподвижных точек.

В §3 спектральная последовательность (необязательно связанная с инволюцией) рассматривается как объект соответствующей абелевой категории со специального вида фильтрацией и с дополнительной структурой на ассоциированном градуированном объекте. Автор видит определенные преимущества этого подхода к спектральным последовательностям в его инвариантности (исчезает необходимость работы с элементами – не приходится говорить об "убивании" и "доживании" элементов), в возможности применения техники работы с фильтрованными объектами в духе статьи Делиня [14], а также в том, что члены ${}^{r}H^{*}$ спектральной последовательности рассматриваются одновременно для всех r. (Читатель может перевести формулировки и доказательства §5 на классический язык и убедиться, что объем изложения значительно возрастет). Более серьезно эти соображения используются в работе [10], подготавливаемой к печати (см. также теорему 3.7). Далее в этом параграфе изучаются *эффективные* пары и пространства, вводятся Вещественные векторные расслоения в смысле Атьи, строится изоморфизм ψ и приводятся доказательства предложений 1.1, 1.3 и теоремы 1.2.

В п. 4.1 начинается подготовка к доказательству теорем 1.7, 1.8 и 5.10. Изучаются Вещественные расслоения с четным старшим классом Чженя, для которых расщепление точной последовательности Гизина продолжается до расщепления соответствующей последовательности спектральных последовательностей. Такие расслоения называются *четными*. Для четных расслоений над эффективными пространствами строится неоднородный характеристический класс α, играющий решающую роль в доказательствах (см. п. 5.5).

В §5 формулируется и доказывается теорема 5.10, а также завершаются доказательства теорем 1.7 и 1.8.

§2. Спектральная последовательность инволюции

Здесь приводятся без доказательств стандартные утверждения о спектральной последовательности инволюции и фильтрации когомологий множества неподвижных точек. Соответствующие доказательства можно найти в работах [5, 6, 8].

Теорема 2.1. *Пусть $(Y, X; c)$ – C_2-пара. Тогда существуют естественные по отношению к C_2-отображениям*

(1) *фильтрация группы $H^*(F(Y,X))$*

$$0 = \mathcal{F}_{-1}(Y,X) \subset \mathcal{F}_0(Y,X) \subset \ldots \subset \mathcal{F}_i(Y,X) \subset \ldots \subset H^*(F(Y,X));$$

(2) *$\mathbb{Z}$-градуированная спектральная последовательность $({}^rH^*(Y,X), {}^rd^*)$, где*

$$ {}^rd^i : {}^rH^i(Y,X) \to {}^rH^{i-r+1}(Y,X), $$

для которой

$$ {}^1H^i(Y,X) = H^i(Y,X), \quad {}^1d^* = 1 + c^*; $$

$$ {}^2H^i(Y,X) = H^1(C_2, H^i(Y,X)); $$

(3) *изоморфизм $\varphi_i : \mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}(H^*(F(Y,X))) \to {}^\infty H^i(Y,X)$, где $\mathrm{gr}^*_{\mathcal{F}}(H^*(F(Y,X)))$ – градуированная группа, ассоциированная с фильтрацией.*

Предложение 2.2. *Пусть (Y,X) и (Y_1,X_1) – C_2-пары. Тогда*

(1) *умножение*

$$ \times : H^*(Y,X) \otimes H^*(Y_1,X_1) \to H^*(Y\times Y_1, X\times Y_1 \cup Y\times X_1) $$

индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей

$$ \times : {}^rH^i(Y,X) \otimes {}^rH^j(Y_1,X_1) \to {}^rH^{i+j}(Y\times Y_1, X\times Y_1 \cup Y\times X_1), $$

где $d_r(a\otimes b) = a\otimes d_r(b) + d_r(a)\otimes b$ для $r>1$;

(2) $\times : \mathcal{F}_i(Y,X)\otimes\mathcal{F}_j(Y_1,X_1) \subset \mathcal{F}_{i+j}(Y\times Y, X\times Y_1\cup Y\times X_1)$;

(3) $\varphi_*(a\otimes b) = \varphi_*(a)\times\varphi_*(b)$.

Предложение 2.3. *Пусть (Z,Y,X) – C_2-тройка. Тогда*

(1) *граничный гомоморфизм точной последовательности тройки $\delta : H^*(Y,X) \to H^{*+1}(Z,Y)$ индуцирует морфизм спектральной последовательности*

$$ {}^r\delta : {}^rH^*(Y,X) \to {}^rH^{*+1}(Z,Y); $$

(2) *$F\delta(\mathcal{F}_i(Y,X) \subset \mathcal{F}_{i+1}(Z,Y)$, где $F\delta$ – граничный гомоморфизм тройки $F(Z,Y,X)$;*

(3) $\varphi_*F\delta = {}^\infty\delta\varphi_*$.

Предложение 2.4. *Пусть (Y, X) – C_2-пара, пусть $\hat{\mathrm{Sq}}^i$ – нестабильная когомологическая операция, определяемая для $x \in H^p(F(Y, X))$ следующим образом: $\hat{\mathrm{Sq}}^i x := \sum\binom{P-p}{i-j}\mathrm{Sq}^j x$, где P – степень 2, большая $p + 2i$. Тогда*

(1) *i-й квадрат Стинрода $\mathrm{Sq}^i : {}^rH^*(Y, X) \to {}^rH^{*+i}(Y, X)$ индуцирует морфизм спектральной последовательности*

$$\mathrm{Sq}^i : H^*(Y, X) \to H^{*+i}(Y, X);$$

(2) $\hat{\mathrm{Sq}}^i \mathcal{F}_j(Y, X) \subset \mathcal{F}_{i+j}(Y, X)$;

(3) $\varphi_* \hat{\mathrm{Sq}}^i = \mathrm{Sq}^i \varphi_*$.

Пусть ξ – векторное C_2-расслоение над C_2-пространством Y. Существуют однозначно определенные C_2-подрасслоения расслоения $\xi\,|_{FY}$: инвариантных и косоинвариантных векторов, обозначаемые далее через ξ_+ и ξ_-, соответственно, и изоморфизм:

$$\xi\,|_{FY} \simeq \xi_+ \oplus \xi_-.$$

Нетрудно видеть, что $\xi_+ = F\xi$. Снабдим расслоение ξ, а значит, и $\xi_\pm$, метрикой, инвариантной относительно действия группы C_2, через $D\xi$ и $S\xi$ обозначим соответствующие расслоение на единичные диски и сферическое расслоение.

Предложение 2.5 (изоморфизм Тома). *Пусть ξ – векторное n-мерное C_2-расслоение. Тогда*

(1) *изоморфизм Тома $\mathrm{th}_\xi : H^*(Y) \to H^*(D\xi, S\xi)$ индуцирует для $r \le \infty$ изоморфизм спектральных последовательностей*

$${}^rH^*(Y) \to {}^rH^*(D\xi, S\xi);$$

(2) $\mathrm{th}_{F\xi}(w_*(\xi_-)\mathcal{F}_i(Y)) = \mathcal{F}_{i+n}(D\xi, S\xi)$;

(3) $\varphi_*(\mathrm{th}_{F\xi}(w_*(\xi_-)-)) = \mathrm{th}_\xi\, \varphi_*(-)$.

Предложение 2.6 (двойственность Александера–Лефшеца). *Пусть (Y, X) – n-мерное относительное гладкое C_2-многообразие. Тогда:*

(1) *для $r \le \infty$ невырожденная билинейная форма*

$$\Phi_{(Y,X)} : H^*(Y, X) \otimes H^*(Y \setminus X) \to \mathbb{F}_2,$$

где $\Phi_{(Y,X)}(x \otimes y) = (x \cup y) \cap [Y, X]$, *индуцирует невырожденную билинейную форму*

$$^r\Phi_{(Y,X)} : {}^rH^*(Y, X) \otimes {}^rH^*(Y \setminus X) \to \mathbb{F}_2;$$

для $r < \infty$ *дифференциалы* $^rd_{(Y,X)}$ *и* $^rd_{Y\setminus X}$ *сопряжены друг с другом относительно этой формы;*

(2) $\mathcal{F}_i(Y, X)^\perp = w_*^{-1}\mathcal{F}_{n-i-1}(Y \setminus X)$, *где* w_* *– полный класс Штифеля–Уитни нормального расслоения подмногообразия* $F(Y \setminus X)$ *в* $Y \setminus X$;

(3) $^\infty\Phi_{(Y,X)}(\varphi_* x \otimes \varphi_* y) = \Phi_{F(Y,X)}((w_*^{-1}x) \otimes y)$ *для любых* $x \in H^*(F(Y, X))$ *и* $y \in H^*(F(Y \setminus X))$.

Из предложения 2.6 и формулы Ву вытекает

Следствие 2.7. *Пусть* (Y, X) *– n-мерное относительное гладкое* C_2*-многообразие. Тогда*

$$(\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y, X))^\perp = \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_{n-i-1}(Y \setminus X).$$

§3. Эффективные пространства

3.1. Фильтрации колец когомологий. Пусть (Y, X) – C_2-пара и $F(Y, X) = (FY, FX)$ – ее множество неподвижных точек. В теореме 2.1 введена возрастающая фильтрация $\mathcal{F}_i(Y, X)$ когомологий множества неподвижных точек пары $H^*(F(Y, X))$. Спектральную последовательность инволюции также будем рассматривать как особого вида фильтрацию группы $H^*(Y, X)$ с дополнительной структурой на ассоциированной градуированной группе.

3.1.1. (B, Z)**-фильтрация кольца когомологий.** Пусть $(Y, X; c)$ – C_2-пара. Как в [6],

$$^rB(Y, X) \subset {}^rZ^*(Y, X) \subset H^*(Y, Z)$$

– прообразы групп $\mathrm{Im}\, {}^rd_*$ и $\mathrm{Ker}\, {}^rd_*$, соответственно. Положим также

$$^\infty B(Y, X) = \bigcup {}^rB(Y, X);\ {}^\infty Z(Y, X) = \bigcap {}^rZ(Y, X).$$

Нетрудно видеть, что

(1) $^rB(Y, X)$, $^rZ(Y, X)$ – однородные подгруппы градуированной группы $H^*(Y, X)$ для всех $r \le \infty$;

(2) $0 = {}^0B(Y,X) \subset {}^1B(Y,X) \subset \dots \subset {}^1Z(Y,X) \subset {}^0Z(Y,X) = H^*(Y,X)$;
(3) ${}^1B(Y,X) = \mathrm{Im}\,(1+c^*)$, ${}^1Z(Y,X) = \mathrm{Ker}\,(1+c^*)$;
(4) ${}^\infty Z(Y,X)/{}^\infty B(Y,X) = {}^\infty H(Y,X)$;
(5) для $r < \infty$ дифференциал ${}^r d(Y,X)$ спектральной последовательности пары, индуцирует однородный изоморфизм степени $1-r$

$$\tilde{d}_r : {}^{r-1}Z/{}^rZ \to {}^rB/{}^{r-1}B. \tag{1}$$

Обратно, фильтрация $({}^*B, {}^*Z)$ группы $H^*(Y,X)$ и изоморфизмы $\{\tilde{d}_r\}$ однозначно определяют спектральную последовательность $({}^rH(Y,X), {}^rd)$.

Фактически построена эквивалентность между категорией спектральных последовательностей и категорией объектов со специального вида фильтрациями ((B,Z)-фильтрациями) с дополнительной структурой на градуированном объекте, ассоциированном с этой фильтрацией (изоморфизмы $\tilde{d}_i$).

3.1.2. Вырождение спектральной последовательности инволюции. В силу (1) имеем

$$\dim(H^1(C_2, H^*(Y,X)) = \dim(H^*(Y,X)) - 2\dim({}^1B(Y,X)); \tag{2}$$
$$\dim(H^*(F(Y,X))) = \dim(H^*(Y,X)) - 2\dim({}^\infty B(Y,X)). \tag{3}$$

Определение 3.1. C_2-пару (Y,X), для которой ${}^1B(Y,X) = {}^\infty B(Y,X)$ (т.е. спектральная последовательность инволюции вырождается в члене ${}^2H^*(Y,X) = H^1(C_2, H^*(Y,X)))$ будем называть *GM-парой* (*GM-пространством*), если $X = \emptyset$.

C_2-пару (Y,X) для которой ${}^\infty B(Y,X) = 0$ (т.е. спектральная последовательность инволюции вырождается в члене ${}^1H^*(Y,X) = H^*(Y,X)$) будем называть *M-парой* (*M-пространством*), если $X = \emptyset$.

Как легко заметить, C_2-пара является GM-парой тогда и только тогда, когда

$$\dim(H^*(F(Y,X))) = \dim(H^1(C_2, H^*(Y,X))),$$

а C_2-пара является M-парой тогда и только тогда, когда $\dim(H^*(F(Y,X))) = \dim(H^*(Y,X))$.

3.2. Эффективные пространства и канонический изоморфизм ψ**.** Следующее предложение легко вытекает из того, что Sq – автоморфизм кольца $H^*(F(Y,X))$.

Предложение-определение 3.2. *Пусть* (U,V) *– эффективная* C_2*-пара. Композицию гомоморфизмов модулей*

$$H^i(F(U,V)) \xrightarrow{\mathrm{Sq}} \mathcal{F}_{2i}(U,V) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \frac{\mathcal{F}_{2i}(U,V)}{\mathcal{F}_{2i-1}(U,V)} \xrightarrow{\varphi_i} {}^{\infty}H^{2i}(U,V) \qquad (4)$$

обозначим через $\psi^i_{U,V}$*. Тогда*

(1) $\psi^i_{U,V}$ *– изоморфизм;*
(2) *гомоморфизм*

$$\psi^*_{U,V} = \bigoplus \psi^i_{U,V} : H^*(F(U,V)) \to {}^{\infty}H^*(U,V)$$

– изоморфизм колец. □

Предложение 3.3.

(1) *Конечное произведение эффективных пар – эффективная пара;*
(2) *функция* ψ *от произведения пар равна произведению функций* ψ *от соответствующих пар.*

Доказательство. Следует из мультипликативности Sq и предложения 2.2. □

3.2.1. Вещественные расслоения. Пусть U – C_2-пространство. Будем называть *Вещественным расслоением* (с большой буквы В!) $\mathbb{C}$-векторное расслоение над U с линейной антиинволюцией, накрывающей инволюцию пространства U. Размерностью Вещественного расслоения ξ будем называть его размерность над $\mathbb{C}$. Как нетрудно видеть, у расслоения $\xi\,|_{FU}$ существуют однозначно определенные C_2-подрасслоения инвариантных и косоинвариантных векторов, обозначаемые далее через ξ_+ и ξ_-, соответственно, и изоморфизм

$$\xi\,|_{FU} \simeq \xi_+ \oplus \xi_-.$$

Очевидно, что $F\xi = \xi_+ \simeq \xi_-$. Снабдим расслоение ξ C_2-инвариантной эрмитовой метрикой; через $D\xi$ и $S\xi$ обозначим соответствующие расслоения на единичные диски и сферы.

Предложение 3.4. *Пусть U — эффективное пространство, ξ – Вещественное расслоение над U. Тогда*

(1) $\psi_U^*(w_i(F\xi)) = c_i(\xi)$;
(2) $(D\xi, S\xi)$ *– эффективная пара;*
(3) $\psi_{(D\xi,S\xi)}\mathrm{th}_{F\xi} = \mathrm{th}_\xi\psi_U$, *где* $\mathrm{th}_\xi : H^*(Y) \to H^*(D\xi, S\xi)$ *– изоморфизм Тома.*

Доказательство. (1) Это следует из теоремы 1.2, примененной к соответствующему многообразию Грассмана.

(2) Пусть $\dim\xi = k$, пусть $u_+ \in H^k(F(D\xi, S\xi))$, $u_\xi \in H^{2k}(D\xi, S\xi)$ – классы Тома расслоений ξ_+ и ξ. Как известно, $\mathrm{Sq}\, u_+ = w(\xi_+)u_+$. Из того, что для Вещественного расслоения ξ расслоения ξ_- и ξ_+ изоморфны, и предложения 2.5 вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i(D\xi, S\xi) &= \mathrm{th}_{F\xi}(w(\xi_-)\mathcal{F}_{i-2k}(U) = \mathrm{Sq}\, u_+ \cdot \mathrm{Sq}\,(H^{\leq i/2-k}(FU)) \\ &= \mathrm{Sq}\,(u_+ \cdot H^{\leq i/2-k}(FU)) = \mathrm{Sq}\,(H^{\leq i/2}(F(D\xi, S\xi)),\end{aligned}$$

т.е. $(D\xi, S\xi)$ – эффективная пара.

(3) Достаточно заметить, что $\psi_{(D\xi,S\xi)}(u_+) = u_\xi$. □

Доказательство следующего предложения аналогично предыдущему с той разницей, что мы должны воспользоваться предложением 2.6.

Предложение 3.5. *Пусть (U, V) – относительно гладкое C_2-многообразие, касательное расслоение которого над $U \setminus V$ C_2-изоморфно Вещественному расслоению.*

(1) *Тогда (U, V) – эффективная пара тогда и только тогда, когда $U \setminus V$ – эффективное пространство.*
(2) *Если (U, V) – эффективная пара, то для любых $x \in H^*(F(U, V))$ и $y \in H^*(F(U \setminus V))$ справедливо*

$$\Phi_{(FU,FV)}(x, y) = {}^\infty\Phi_{(U,V)}(\psi_{(U,V)}(x), \psi_{(U\setminus V)}(y)),$$

где Φ, ${}^\infty\Phi$ — формы индексов пересечения (см. предложение 2.6).

□

3.2.2. Когомологии эффективных пространств не смешиваются.

Предложение 3.6. *Пусть (Z, Y, X) – C_2-тройка такая, что C_2-пары (Y, X) и (Z, Y) эффективны. Тогда граничный гомоморфизм*

$$\delta : H^*(F(Y, X)) \to H^{*+1}(F(Z, Y))$$

гомологической последовательности тройки тривиален.

Доказательство. Пусть $x \in H^i(F(Y, X))$ и $\delta(x) \neq 0$. Тогда $\operatorname{Sq}\delta(x) \in \mathcal{F}_{2i+2}(Z, Y) \backslash \mathcal{F}_{2i+1}(Z, Y)$, что противоречит предложению 2.3, так как $\operatorname{Sq} x \in \mathcal{F}_{2i}(Y, X)$ и $\delta(\operatorname{Sq} x) \in \mathcal{F}_{2i+1}(Z, Y)$.

В нижеследующей теореме 3.7, обобщающей предложение 3.6, утверждается, что когомологии множества неподвижных точек C_2-пространства, склеенного из эффективных M-пространств, являются суммой когомологий множества неподвижных точек этих кусков. Таким образом, спектральная последовательность, ассоциированная с соответствующей фильтрацией, вырождается. Заметим, что для когомологий самого C_2-пространства это не всегда так.

Эта теорема является основой для ряда утверждений о вырожденности спектральных последовательностей, связанных с когомологиями множества неподвижных точек. В отличие от предыдущих предложений, доказательство этой теоремы требует развития некоторой техники, связанной с категорией фильтрованных модулей и гомоморфизмами, сильно согласованными с фильтрациями, и, так как эти результаты не используются в настоящей работе, они будут приведены без доказательства. Автор намеревается посвятить этой теме отдельную работу (см. [5]).

Теорема 3.7. *Пусть (U, V) – C_2-пара, пусть $V = U_{-1} \subset U_0 \subset \cdots \subset U_k = U$ – конечная C_2-фильтрация пары (U, V) такая, что*

(1) *(U_i, U_{i-1}) – эффективная пара для всех i, и*

(2) *(U_i, U_{i-1}) – M-пара для $1 \leq i \leq k-1$.*

Тогда градуированные $\mathbb{F}_2$-модули $H^*(FU, FV)$ и $\oplus H^*(FU_i, FU_{i-1})$ изоморфны. $\square$

Следствие 3.8 (из теорем 3.7 и 1.2). *Пусть $X \to Y$ – локально тривиальное вещественное алгебраическое расслоение со слоем Z, для которого выполнены следующие условия:*

(1) *$\mathbb{C}Z$ – эффективное M-пространство;*

(2) *Y допускает вещественное "клеточное разложение".*

Тогда градуированные $\mathbb{F}_2$-модули $H^*(\mathbb{R}X)$ и $H^*(\mathbb{R}Y) \otimes H^*(\mathbb{R}Z)$ изоморфны. □

3.3. Примеры эффективных C_2-пар и эффективных C_2-пространств. Следующее предложение является очевидным следствием теоремы 1.2.

Предложение 3.9. *C_2-пространства, соответствующие следующим вещественным алгебраическим многообразиям, – эффективные M-пространства:*

(1) *$\mathbb{C}P^N$ – проективное пространство;*
(2) *$\mathbb{C}Gr(N,k)$ – многообразие Грассмана;*
(3) *$\mathbb{C}Fl(N;a_1,\ldots,a_r)$ – многообразие флагов;*
(4) *$\mathbb{C}Q_{n,n}$, где $Q_{n,k}$ – квадрика в $\mathbb{P}^{n+k-1}$, задаваемая уравнением*

$$x_1^2+\ldots+x_n^2-y_1^2-\ldots-y_n^2=0. \qquad \square$$

3.4. Доказательство теоремы 1.2.

Лемма 3.10. *Пусть (Y,Z) – эффективная M-пара, Z – эффективное M-пространство. Тогда*

(1) *Y – M-пространство;*
(2) *имеет место короткая точная последовательность*

$$0\to {}^{\infty}H^*(Y,Z)\to {}^{\infty}H^*(Y)\to {}^{\infty}H^*(Z)\to 0;$$

(3) *если $Y\setminus Z$ C_2-гомеоморфно вещественному аффинному пространству с инволюцией комплексного сопряжения, то Y – эффективное пространство.*

Доказательство. (1), (2) Рассмотрим гомологическую последовательность пары (Y,Z):

$$0\to \operatorname{Ker}(p)\to H^*(Y,Z)\xrightarrow{p} H^*(Y)\to H^*(Z)\to \operatorname{Ker}(p)\to 0.$$

Как нетрудно видеть,

$$\dim(H^*(Y))+2\dim(\operatorname{Ker}(p))=\dim(H^*(Y,Z))+\dim(H^*(Z));$$

в силу предложения 3.6

$$\dim(H^*(FY))=\dim(H^*(F(Y,Z)+\dim(H^*(FZ)).$$

Вычитая одно равенство из другого, так как (Y, Z) – M-пара и Z – M-пространство, получаем, что $\operatorname{Ker}(p) = 0$ и Y – M-пространство.

(3) Пусть $Y \setminus Z$ изоморфно k-мерному аффинному пространству. Тогда $H^*(F(Y,Z)) = H^k(F(Y,Z))$ и

$$\mathcal{F}_i(Y,Z) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < 2k; \\ H^k(F(Y,Z)), & \text{если } i \geq 2k. \end{cases}$$

В силу леммы 3.10 точна последовательность

$$0 \to \mathcal{F}_i(Y,Z) \to \mathcal{F}_i(Y) \xrightarrow{q} \mathcal{F}_i(Z) \to 0.$$

Следовательно, точна последовательность

$$0 \to \operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y,Z) \to \operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y) \xrightarrow{q} \operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Z) \to 0$$

Поскольку (Y, Z) – эффективная пара и Z – эффективное пространство, справедливы равенства:

$$\operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y,Z) = H^{\leq i/2}(F(Y,Z)); \ \operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Z) = H^{\leq i/2}(FZ).$$

Докажем, что $\operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y) = H^{\leq i/2}(FY)$. Пусть это не так. Тогда $i \geq 2k$ и найдется $y \in \operatorname{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Z) \setminus H^{\leq i/2}(FY)$. Представим y в виде $y = y_0 + y_1$, где $y_0 \in H^{\leq i/2}(FY)$ и $y_1 \in H^{>i/2}(FY)$. В силу предположения $y_1 \neq 0$, но $q(y_1) = 0$, следовательно, y_1 – образ ненулевого элемента из $H^{>i/2}(F(Y,Z))$. Но группа $H^{>i/2}(F(Y,Z))$ – тривиальна. Противоречие. □

Доказательство теоремы 1.2. В силу последней леммы и предложения 3.5 теорема доказывается очевидной индукцией по числу "клеток". □

3.4.1. Пусть U – пространство, ξ – векторное расслоение. Будем обозначать через

$$\mathbb{P}(\xi), Gr(\xi, k), Fl(\xi; a_1, \ldots, a_r)$$

тотальные пространства расслоений, ассоциированных с ξ, со слоями

$$\mathbb{P}^{\dim\xi - 1}, \quad Gr(\dim\xi, k), \quad Fl(\dim\xi; a_1, \ldots, a_r),$$

соответственно.

Пусть U – C_2-пространство, ξ – вещественное расслоение. Тогда пространства $\mathbb{C}P(\xi)$, $\mathbb{C}Gr(\xi, k)$, $\mathbb{C}Fl(\xi, a_1, \ldots, a_r)$ естественным образом являются C_2-пространствами, так как $\mathbb{C}P^{\dim\xi-1}$, $\mathbb{C}Gr(\dim\xi, k)$, $\mathbb{C}Fl(\dim\xi; a_1, \ldots, a_r)$ – C_2-пространства.

Предложение 3.11. *Пусть U – эффективное C_2-пространство, ξ – Вещественное расслоение над U. Тогда*

(1) *C_2-пространства $\mathbb{C}P(\xi)$, $\mathbb{C}Gr(\xi,k)$, $\mathbb{C}Fl(\xi;a_1,\ldots,a_r)$ эффективны;*
(2) *если U – M-пространство, то $\mathbb{C}P(\xi)$, $\mathbb{C}Gr(\xi,k)$, $\mathbb{C}Fl(\xi;a_1,\ldots,a_r)$ – M- пространства;*
(3) *если U – GM-пространство, то $\mathbb{C}P(\xi)$, $\mathbb{C}Gr(\xi,k)$, $\mathbb{C}Fl(\xi;a_1,\ldots,a_r)$ – GM-пространства.*

Доказательство предложения 1.3. Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.12. *Пусть V – конечномерный $\mathbb{F}_2$-модуль, пусть группа C_2 действует тривиально на V и перестановкой сомножителей на $V\otimes V$. Тогда диагональное отображение $\Delta: V\to V\otimes V$ (не обязательно линейное!) индуцирует изоморфизм*

$$\Delta^*: V = H^1(C_2,V)\longrightarrow H^1(C_2,V\otimes V). \quad \square$$

Применив утверждение леммы к $V=H^*(X)$ и $V\otimes V = H^*(X\times X)$, получаем $\Delta^*: H^*(X)\longrightarrow {}^2H^*(X\times X)$ – изоморфизм, следовательно, $X\times X$ – GM-пространство. Осталось показать, что $\mathrm{Sq}\,(H^{\leq k}(X))\subset \mathcal{F}_{2k}(X\times X)$ и $\Delta^*=\psi_{X\times X}$. Доказательство следующей леммы состоит в несложных прямых вычислениях.

Лемма 3.13. *При любом $N>0$ утверждение предложения справедливо для $X=\mathbb{R}P^N$.* $\square$

Лемма 3.14. *Пусть $n>0$. Тогда для достаточно больших N справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mathcal{F}_{2n}(S\times S)\subset \mathrm{Sq}\,H^{\leq n}(S)$;*
(2) *композиция гомоморфизмов*

$$H^n(S)\xrightarrow{\mathrm{Sq}}\mathcal{F}_{2n}(S\times S)\to\frac{\mathcal{F}_{2n}(S\times S)}{\mathcal{F}_{2n-1}(S\times S)}\xrightarrow{\varphi_{2n}}{}^{\infty}H^{2n}(S\times S) \qquad (5)$$

переводит класс τ в $\overline{\tau\times\tau}$,

где $S=\mathrm{Ske}^N K(C_2,n)$ – N-мерный остов соответствующего пространства Эйленберга–Маклейна, $\tau\in H^n(S)$ – образ фундаментального класса пространства $K(C_2,n)$.

Доказательство. Для $N_1>2n$ обозначим через P произведение n экземпляров $\mathbb{R}P^{N_1}$, положим $u=u_1\times\ldots\times u_1\in H^n(P)$, где u_1 –

образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^{N_1})$. Отображение $P \to K(C_2, n)$, соответствующее классу u, пропускается через $\mathrm{Ske}^N(K(C_2, n))$ для некоторого N. Как известно, отображение $\rho : P \to \mathrm{Ske}^N(K(C_2, n))$ индуцирует мономорфизм

$$\rho^* : H^{\leq 2n}(\mathrm{Ske}^N(K(C_2, n))) \to H^{\leq 2n}(P).$$

В силу леммы 3.13 для пространства P справедливы утверждения предположения, следовательно,

$$\rho^*(\mathcal{F}_{2n}(S \times S)) \subset \mathrm{Sq}\, H^{\leq n}(P) \cap \rho^*(H^{\leq 2n}(S)),$$

а, значит, $\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_{2n}(S\times S) \subset H^{\leq n}(S)$, что означает справедливость утверждения 1 леммы.

Утверждение 2 вытекает из леммы и естественности композиции 5. $\square$

Пространство X гомотопически эквивалентно конечному клеточному пространству, и, в силу естественности, из леммы 3.14 вытекает, что $\mathrm{Sq}(H^{\leq k}(X)) \subset \mathcal{F}_{2k}(X \times X)$ и $\Delta^* = \psi_{X\times X}$.

Доказательство предложения 1.1. Пусть $x_k \in H^k(FX)$. В силу предложения 2.4 $\mathrm{Sq}^{2i}\varphi_*(x_k) = \varphi_*(\hat{\mathrm{Sq}}^{2i} x_k)$. Следовательно, достаточно показать, что

$$\mathrm{Sq}\,\mathrm{Sq}^i x_k \equiv \hat{\mathrm{Sq}}^{2i}\mathrm{Sq}\, x_k \pmod{\mathcal{F}_{2i+2k-1}(X)},$$

или, что равносильно,

$$(\mathrm{Sq}^i + \mathrm{Sq}^{-1}\hat{\mathrm{Sq}}^{2i}\mathrm{Sq})x_k \in H^{\leq k+i-1}(FX). \tag{6}$$

Последнее утверждение зависит только от пространства FX и чисел i и k. В силу предложения 1.3 для пространства $(FX \times FX, t)$ выполняется (6), что и доказывает утверждение 3.

Утверждения 1 и 2 предложения легко следуют из того, что $\mathrm{Sq} : H^*(U, V) \to H^*(U, V)$ – изоморфизм колец.

§4. Четные расслоения

Рассмотрим над C_2-пространством Y Вещественное расслоение ξ с четным классом Эйлера. Последовательность пары $(D\xi, S\xi)$ для таких расслоений превращается в короткую точную расщепляющуюся последовательность $H^*(Y)$-модулей

$$0 \to H^*(D\xi) \xrightarrow{p_\xi} H^*(S\xi) \xrightarrow{\delta_\xi} H^*(D\xi, S\xi) \to 0. \tag{7}$$

Эта последовательность индуцирует последовательность спектральных последовательностей

$$0 \to {}^rH^*(D\xi) \xrightarrow{{}^rp_\xi} {}^rH^*(S\xi) \xrightarrow{{}^r\delta_\xi} {}^rH^*(D\xi, S\xi) \to 0. \qquad (8)$$

Нас будут интересовать Вещественные расслоения, для которых последняя последовательность точна и расщепляется.

4.1. Четные расслоения.

Определение 4.1. Будем называть Вещественное k-мерное расслоение ξ *четным*, если найдется элемент $\rho_\xi \in {}^\infty Z^{2k-1}(S\xi)$ (см. п. 3.1.1) такой, что $\delta_\xi(\rho_\xi) = u_\xi$ – класс Тома расслоения ξ. Класс ρ_ξ определен однозначно по модулю подгруппы $p_\xi({}^\infty Z^{2k-1}(D\xi))$.

Предложение 4.2. *Пусть ξ – Вещественное расслоение. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *ξ – четно;*
(2) *гомоморфизм ${}^r\delta : {}^rH^*(S\xi) \to {}^rH^*(D\xi, S\xi)$ – эпиморфизм для любого $1 \le r \le \infty$;*
(3) *гомоморфизм ${}^rp : {}^rH^*(D\xi) \to {}^rH^*(S\xi)$ – мономорфизм для любого $1 \le r \le \infty$;*
(4) *последовательность ${}^rH^*(D\xi)$-модулей (8) точна и расщепляется для любого $1 \le r \le \infty$.*

Следствие 4.3. *Пусть ξ – четное k-мерное расслоение. Тогда классы $w_{2k}(\xi)$ и $w_k(F\xi)$ тривиальны.*

Предложение 4.4.

(1) *Вещественное расслоение, содержащее четное подраслоение, четно.*
(2) *Расслоение, индуцированное из четного, четно.*
(3) *Пусть ξ – Вещественное k-мерное расслоение над GM-пространством Y. Пусть либо классы $w_{2k}(\xi)$ и $w_k(F\xi)$ тривиальны, либо класс $w_{2k}(\xi)$ тривиален и Y – эффективно. Тогда ξ – четное и $S\xi$ – GM-пространство.*

Доказательство предложения 4.2. (1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим гомоморфизм ${}^rH^*(Y)$-модулей ${}^rH^*(D\xi, S\xi) \to {}^rH^{*-1}(S\xi)$, переводящий класс ${}^ru_\xi$ – образ класса Тома в ${}^r\rho$ – образ элемента ρ_ξ в группе ${}^rH^*(S\xi)$. Это морфизм спектральных последовательностей, расщепляющий морфизм ${}^r\delta : {}^rH^*(S\xi) \to {}^rH(D\xi, S\xi)$.

(2) $\Rightarrow$ (4) Из сюръективности гомоморфизма ${}^1\delta = \delta_\xi$ и точности последовательности пары $(D\xi, S\xi)$ следует точность последовательности (7).

Точность последовательности (8) теперь доказывается очевидной индукцией по r.

(3) $\Rightarrow$ (4) – доказывается аналогично.

(4) $\Rightarrow$ (3) – очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1) ${}^rH^*(Y)$-модуль ${}^rH^*(D\xi, S\xi)$ – свободный одномерный модуль, порожденный классом ${}^ru_\xi$, следовательно, последовательность (8) расщепляется. Как очевидно, можно выбрать согласованные расщепления. Образ класса u_ξ при построенном расщеплении и будет искомым элементом. $\square$

Доказательство следствия 4.3. Из точности последовательности (7) следует тривиальность класса $w_{2k}(\xi)$, из точности последовательности (8) для $r = \infty$ следует точность последовательности

$$0 \to H^*(FD\xi) \to H^*(FS\xi) \to H^*(F(D\xi, S\xi)) \to 0, \qquad (9)$$

откуда вытекает тривиальность класса $w_k(F\xi)$. $\square$

Доказательство предложения 4.4. Пусть ξ – четное подрасслоение Вещественого расслоения η. Гомоморфизмы включения индуцируют коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} {}^rH^*(D\eta) & \xrightarrow{{}^rp_\eta} & {}^rH(S\eta) \\ \Big\downarrow \mathrm{in}_1 & & \Big\downarrow \mathrm{in}_2 \\ {}^rH^*(D\xi) & \xrightarrow{{}^rp_\xi} & {}^rH(S\xi). \end{array}$$

В силу предложения (4.2) существует расщепление q мономорфизма p_ξ. Нетрудно видеть, что гомоморфизм in_1 – изоморфизм и $\mathrm{in}_1^{-1} \circ q \circ \mathrm{in}_2$ – расщепление гомоморфизма ${}^rp_\eta$. Значит, ${}^rp_\eta$ – мономорфизм для всех $0 \le r \le \infty$, что вследствие предложения 4.2 и доказывает утверждение 1.

Утверждение 2 очевидно (положим $\rho_{f^*\xi} = f^*(\rho_\xi)$).

Для доказательства утверждения 3 заметим, что в обоих случаях классы $w_{2k}(\xi)$ и $w_k(F\xi)$ тривиальны. Заметим, что последовательности (7) и (9) точны. Применив к точной последовательности (7) функтор $H^1(C_2, -)$, получаем точную последовательность

$${}^2H^*(D\xi) \xrightarrow{{}^2p} {}^2H^*(S\xi) \xrightarrow{{}^2\delta} {}^2H^*(D\xi, S\xi),$$

из точности которой вытекает неравенство

$$\dim({}^2H^*(S\xi)) \leq \dim({}^2H^*(D\xi)) + \dim({}^2H^*(D\xi, S\xi)).$$

Теперь из равенства

$$\dim(H^*(FS\xi) = \dim(H^*(FD\xi)) + \dim(H^*(F(D\xi, S\xi))$$

и того, что Y – GM-пространство, следует, что $D\xi$ – GM-пространство и $(D\xi, S\xi)$ – GM-пара. Значит, ${}^2p$ – мономорфизм, и $S\xi$ – GM-пространство. Поэтому ${}^rp$ – мономорфизм для всех r.

4.2. Характеристический класс четных расслоений над эффективными пространствами. Пусть ξ – четное расслоение над C_2-пространством. Тогда последовательности (8) и (9) точны и расщепляются. Возникает вопрос: можно ли выбрать эти расщепления согласованными? Оказывается, что препятствие к этому – неоднородный когомологический класс кольца $H^*(FY)$.

В силу предложения 4.2 последовательности (8) для $r = \infty$ и (9) ${}^\infty H^*(Y)$- и, соответственно, $H^*(FY)$-модулей точны и расщепляются. Обозначим образы классов Тома ${}^\infty u_\xi$ и $u_{F\xi}$ для каких-либо расщеплений через ${}^\infty\rho$ и $\rho_{F\xi}$, это классы из групп ${}^\infty H^{2k-1}(S\xi)$ и, соответственно, $H^{k-1}(FS\xi)$. Обозначим через $\tilde\rho$ "подъем" класса ${}^\infty\rho$ в группу $H^*(FS\xi)$, т.е. $\tilde\rho \in \mathcal{F}_{2k-1}(S\xi)$ и $\varphi(\tilde\rho) = {}^\infty\rho$.

Предложение-определение. *Пусть Y – эффективное пространство, ξ – четное расслоение размерности k.*

(1) *Тогда найдется класс $\alpha \in H^*(FD\xi)$, для которого $p_{F\xi}(\alpha) + \mathrm{Sq}^{-1}\tilde\rho + \rho \in \mathcal{F}_{2k-2}(S\xi)$, где $p_{F\xi} : H^*(FD\xi) \to H^*(FS\xi)$ – гомоморфизм включения.*

(2) *Пусть $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots$, где $\alpha_i \in H^i(FD\xi)$. Тогда элемент $\alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots$ зависит только от расслоения ξ и будет обозначаться через $\alpha(\xi)$. Ввиду очевидного равенства $H^*(FY) = H^*(FD\xi)$ будем считать, что $\alpha(\xi) \in H^*(FY)$.*

Доказательство. Как известно, $\mathrm{Sq}\, u_{F\xi} = w_*(F\xi)u_{F\xi}$, отсюда, в силу предложения 3.4, следует, что $\mathrm{Sq}\, u_{F\xi}$ – "поднятие" элемента ${}^\infty u_\xi$, т.е. $\varphi_*(\mathrm{Sq}\, u_{F\xi}) = {}^\infty u_\xi$. Поэтому $\mathrm{Sq}\,\rho + \tilde\rho \in \mathcal{F}_{2k-2}(S\xi) + \mathrm{Im}\,(p_{F\xi})$, следовательно,

$$\mathrm{Sq}\,\rho + \tilde\rho \equiv p_{F\xi}(\alpha) \pmod{\mathcal{F}_{2k-2}(S\xi)}$$

для некоторого элемента $\alpha \in H^*(FD\xi)$.

Выберем другие элементы $\rho_F^1, \tilde{\rho}^1, \alpha^1$. Тогда

$$\rho_F^1 \equiv \rho_F \bmod p_{F\xi}(H^{k-1}(FY)), \quad \tilde{\rho}^1 \equiv \tilde{\rho} \bmod (\mathcal{F}_{2k-2}(S\xi) + p_{F\xi}(\mathcal{F}_{2k-1}(Y)).$$

Y – эффективно, значит, $\mathcal{F}_{2k-1}(Y) = \mathcal{F}_{2k-2}(Y)$, следовательно, $\tilde{\rho}_1 \equiv \tilde{\rho} \pmod{\mathcal{F}_{2k-2}(S\xi)}$. В силу точности последовательности (8) для $r = \infty$ гомоморфизм фильтрованных модулей $p_{F\xi}$ сильно согласован с фильтрацией, т.е.

$$p_{F\xi}(\mathcal{F}_i(Y)) = p_{F\xi}(H^*(FY)) \cap \mathcal{F}_i(S\xi),$$

следовательно,

$$\mathrm{Sq}\ \alpha^1 \equiv \mathrm{Sq}\ \alpha \bmod (\mathcal{F}_{2k-2}(Y) + \mathrm{Sq}\ H^{k-1}(FY)).$$

Так как Y эффективно, последнее сравнение равносильно следующему: $\alpha^1 \equiv \alpha \pmod{H^{\leq k-1}(FY)}$.

Предложение 4.6. *Пусть ξ – четное k-мерное расслоение над эффективным пространством Y.*

(1) *Пусть $f: X \to Y$ – C_2-отображение, X – эффективно. Тогда $\alpha(f^*(\xi)) = f^*(\alpha(\xi))$.*
(2) *Пусть η – Вещественное m-мерное расслоение над Y. Тогда $\alpha(\xi \oplus \eta) = \alpha(\xi) w_m(F\eta)$.*

Доказательство. В силу предложения 4.2 $f^*\xi$ четно и в качестве $\tilde{\rho}_{f^*\xi}$ и $\rho_{Ff^*\xi}$ можно выбрать $f^*(\tilde{\rho_\xi})$ и $f^*(\rho_{F\xi})$. Утверждение (1) доказано.

Пусть ξ – k-мерное, η – n-мерное векторное расслоение над конечным точным пространством X, пусть $w_k(\xi) = 0$. Тогда последовательность Гизина расслоения ξ принимает вид

$$0 \to H^*(Y) \to H^*(S\xi) \to H^*(Y) \to 0. \tag{10}$$

Как нетрудно видеть, класс $w_{k+m}(\xi \oplus \eta)$ тривиален, следовательно, для расслоения $S(\xi \oplus \eta)$ последовательность вида (7) точна. Расслоение $S\xi$ является подрасслоением расслоения $S(\xi \oplus \eta)$, поэтому существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^*(Y) & \longrightarrow & H^*(S(\xi \oplus \eta)) & \longrightarrow & H^*(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{in}^*} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^*(Y) & \longrightarrow & H^*(S(\xi)) & \longrightarrow & H^*(Y) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{11}$$

По очевидным соображениям она однозначно достраивается до морфизма коротких точных последовательностей. Обозначим соответствующий гомоморфизм через $f : H^*(Y) \to H^*(Y)$. Нетрудно проверить следующее утверждение.

Лемма 4.7. *$f(x) = w_m(\eta) \cup x$.* □

Пусть теперь ξ – четное расслоение. Тогда в силу предложения 4.4 расслоение $\xi \oplus \eta$ четно, пусть ρ_ξ и $\rho_{\xi\oplus\eta}$ – соответствующие расщепляющие элементы.

В силу леммы 4.7

$$\mathrm{in}^*(\rho_{\xi\oplus\eta}) \equiv w_{2m}(\eta) \cdot \rho_\xi \bmod p_\xi({}^\infty Z^{2k-1}(Y)).$$

Группа ${}^\infty H^{2k-1}(Y)$ тривиальна, так как C_2-пространство Y эффективно, следовательно, ${}^\infty \mathrm{in}({}^\infty \rho_{\xi\oplus\eta}) = w_{2m}(\eta) \cdot^\infty \rho_\xi$ и, в силу предложения 3.4

$$(F \in)^*(\tilde\rho_{\xi\oplus\eta}) = \mathrm{Sq}\ w_m(F\eta) \cdot \tilde\rho_\xi.$$

Аналогично, $\rho_{F(\xi\oplus\eta)} = w_m(F\eta) \cdot \rho_{F\xi}$.

Из коммутативности диаграммы (11) для расслоений $FS(\xi\oplus\eta)$ и $F(S\xi)$ следует утверждение (2) предложения 4.6. □

4.2.1. Вычисление класса $\alpha(\xi)$ для некоторых расслоений ξ. В этом пункте будет вычислен класс $\alpha(\xi)$ для четного расслоения ξ, C_2-изоморфного сумме линейных Вещественных расслоений.

Предложение 4.8. *Пусть ξ – Вещественное k-мерное расслоение над вещественным алгебраическим многообразием Y, для которого*

(1) *расслоение ξ содержит четное подрасслоение η и либо расслоение ξ/η четно, либо η C_2-изоморфно линейному вещественному алгебраическому расслоению, и*
(2) *C_2-пространство $\mathbb{C}Y$ эффективно.*

Тогда

(1) *имеем*

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } c_1(\xi) \equiv 0 \mod 4; \\ w_{k-1}(F\xi)(t + t^2 + \ldots + t^{2^i} + \ldots) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

где t некоторый элемент группы $H^1(FY)$;

(2) *найдется $z \in H^{2k}(\mathbb{C}Y;\mathbb{Z})$ такой, что $2z = c_k(\xi)$, $\overline{z} \in {}^\infty Z(\mathbb{C}Y)$ и $\psi(\alpha^k(\xi)) = \overline{\overline{z}}$, где $\overline{z}$ – редукция по модулю 2 класса z, $\overline{\overline{z}}$ – образ в группе ${}^\infty H^{2k}(Y)$ класса $\overline{z}$ и $\alpha^k(\xi)$ — k-я компонента класса $\alpha(\xi)$.*

Доказательство. Если η и ξ/η – четные, то в силу предложения 4.6 $\alpha(\xi) = 0$ и, кроме того, $c_k(\xi) \equiv 0 \bmod 4$. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда η C_2-изоморфно четному линейному вещественному алгебраическому расслоению.

Покажем, что расслоение η индуцировано из четного расслоения над $\mathbb{C}P^N$. Как известно, вещественные линейные алгебраические расслоения относительно тензорного произведения образуют группу, обозначаемую $\operatorname{Pic}(Y)$. Воспользуемся ее известным выражением через этальные когомологии:

$$\operatorname{Pic}(Y) = H^1_{\mathrm{et}}(Y, \mathbb{G}).$$

Точная последовательность Куммера

$$0 \to \mu_2 \to \mathbb{G} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{G} \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$\operatorname{Pic}(Y) \xrightarrow{\otimes 2} \operatorname{Pic}(Y) \xrightarrow{\delta} H^2_{\mathrm{et}}(Y, \mu_2).$$

Лемма 4.9. *Пусть η – линейное вещественное алгебраическое расслоение над GM-пространством и $c_1(\mathbb{C}\eta) \equiv 0 \pmod 2$. Тогда $\delta(\eta) = 0$.*

Доказательство. В силу совпадения этальных и эквивариантных когомологий (см. п. 0.0.1)

$$H^*_{\mathrm{et}}(Y) = H^*_G(\mathbb{C}CY),$$

где $H^*_G(\mathbb{C}CY)$ – эквивариантные когомологии Бореля C_2-пространства $\mathbb{C}Y$. Пусть $\operatorname{Pic}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}Y)$ – группа Пикара над $\mathbb{C}$. Как очевидно, $\delta_{\mathbb{C}}(\eta) = \overline{c_1(\eta)}$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Pic}(Y) & \xrightarrow{\delta} & H^2_{\mathrm{et}}(Y, \mu_2) = H^2_{\mathrm{et}}(Y, \mathbb{F}_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Pic}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}Y) & \xrightarrow{\delta_{\mathbb{C}C}} & H^2_{\mathrm{et}}(\mathbb{C}Y, \mu_2) = H^2(\mathbb{C}Y, \mathbb{F}_2)
\end{array}$$

следует, что при забывании вещественной структуры класс $\delta(\eta)$ переходит в $\overline{c_1(\mathbb{C}\eta)}$ – редукцию класса $c_1(\mathbb{C}\eta)$ по модулю 2. Заметим, что для GM-пространства $\mathbb{C}Y$ следующая последовательность точна:

$$0 \to \mathcal{F}_1(Y) \to H^2_G(\mathbb{C}Y) \to H^2(\mathbb{C}Y).$$

Так как η – четное расслоение, то $\overline{c_1(\mathbb{C}C\eta)} = 0$, значит $\delta(\eta) \in \mathcal{F}_1(\mathbb{C}Y)$.

Нетрудно видеть, что для канонического линейного расслоения λ над $\mathbb{R}P^N$ справедливо равенство $\delta(\eta) = \operatorname{Sq} w_1(\lambda)$. В силу естественности гомоморфизма δ и четности расслоения η имеем $\delta(\eta) = w_1(\mathbb{R}\eta)$ и класс $w_1(\mathbb{R}\eta)$ тривиален. □

В силу леммы $\eta = \zeta \otimes \zeta$ для некоторого $\zeta \in \operatorname{Pic}(Y)$. Вещественного расслоение $\mathbb{C}\zeta$ индуцировано из λ – канонического линейного Вещественного расслоения над $(\mathbb{C}P^N, \operatorname{conj})$, следовательно, расслоение η индуцировано из четного расслоения $\lambda \otimes \lambda$ над $(\mathbb{C}P^N, \operatorname{conj})$. Для последнего расслоения проверка утверждений предложения состоит в несложных прямых вычислениях.

Теперь утверждения предложения вытекают из предложения 4.6. □

§5. Доказательства

Для C_2-пары (Y, X) положим

$$\partial(Y, X) = {}^{\infty}B(Y, X)/{}^{1}B(Y, X), \quad \vartheta(Y, X) = {}^{1}Z(Y, X)/{}^{\infty}Z(Y, X);$$

это – однородный подмодуль и, соответственно, фактормодуль градуированного модуля ${}^{2}H^*(Y, X)$. В силу построений п. 3.1 модули $\partial(Y, X)$ и $\vartheta(Y, X)$ снабжены однородными фильтрациями

$$\begin{gathered} 0 \subset \partial_2(Y, X) \subset \partial_3(Y, X) \subset \dots \subset \partial(Y, X), \\ \vartheta(Y, X) \supset \vartheta_2(Y, X) \supset \vartheta_3(Y, X) \supset \dots \end{gathered} \tag{12}$$

и изорфизмом биградуированных групп $d : \operatorname{gr} \vartheta(Y, X) \to \operatorname{gr} \partial(Y, X)$. (Разумеется, $\partial(Y, X) \subset \vartheta(Y, X)$ и ${}^{\infty}H^*(Y, X) = \vartheta(Y, X)/\partial(Y, X)$.)

Цель этого параграфа – вычислить размерность $\mathbb{F}_2$-модуля $\partial(X)$ для интересующего нас C_2-пространства X. Для этого вычислим размерности модулей $\partial(X) \cap \operatorname{Im}({}^{2}\operatorname{in}_{Y/X})$ (см. предложение 5.1) и $\partial(X)/(\partial(X) \cap \operatorname{Im}({}^{2}\operatorname{in}_{Y/X}))$ (см. предложения 5.5, 5.8).

5.1. Вычисление $\dim(\partial(X) \cap \operatorname{Im}({}^{2}\operatorname{in}_{Y/X}))$.

Предложение 5.1. *Пусть для C_2-пары (Y, X) выполнены условия:*

(1) *Y – эффективное GM-пространство;*
(2) *X – замкнутое $2n$-мерное многообразие;*
(3) *$H^{\leq n}(Y, X) = 0$.*

Тогда

(1) $\dim(\partial^{<n}(X)) = \dim(\mathrm{Ker}^{<n/2}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X}))$;

(2) $\partial(X) \subset H^{\leq n/2}(X)$;

(3) $\dim(\partial^n(X)) \leq \dim(\partial^{<n}(X))$;

(4) $\dim(\partial(X) \cap \mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X})) = \dim(\mathrm{Ker}^{\leq n/2}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X})) - \dim(\mathrm{Ker}^n(^2\mathrm{in}^*_{Y/X}))$;

Доказательство. Включение $\mathrm{in}_{Y/X} : X \to Y$ индуцирует отображение спектральных последовательностей:

$$^r\mathrm{in}_{Y/X} : {}^rH^*(Y) \to {}^rH^*(X).$$

Поскольку $^2H^*(Y) = \cdots = {}^\infty H^*(Y)$, ядра гомоморфизмов $^r\,\mathrm{in}_{Y/X}$ для всех r расположены в одном пространстве и

$$\mathrm{Ker}(^2\mathrm{in}_{Y/X}) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(^\infty\mathrm{in}_{Y/X}). \tag{13}$$

Лемма 5.2. *Пусть для C_2-пары (Y, X) выполнены условия* (1), (3) *предложения* 5.1. *Тогда*

(1) *следующая последовательность точна:*

$$0 \to \mathrm{Ker}(^2\mathrm{in}_{Y/X}) \to \mathrm{Ker}(^\infty\mathrm{in}_{Y/X}) \xrightarrow{^2\mathrm{in}_{Y/X}} \partial(X) \cap \mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X}) \to 0; \tag{14}$$

(2) *естественное вложение градуированных групп* $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Ker}(F\,\mathrm{in}_{Y/X})^*) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(^\infty\,\mathrm{in}_{Y/X})$ *индуцирует изоморфизм* $\mathrm{gr}^{\leq n}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Ker}(F\,\mathrm{in}_{Y/X})^*) \hookrightarrow \mathrm{Ker}^{\leq n}(^\infty\,\mathrm{in}_{Y/X})$.

Доказательство. Y – GM-пространство, следовательно, $\mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X}) \subset \vartheta(X)$, поэтому

$$^2\,\mathrm{in}_{Y/X}(\mathrm{Ker}(^\infty\mathrm{in}_{Y/X})) \subset \partial(X) \cap \mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X}).$$

Фильтрация (13) индуцирует фильтрацию на группе $\mathrm{Ker}(^\infty\mathrm{in}_{Y/X})/\mathrm{Ker}(^2\mathrm{in}_{Y/X})$, фильтрация (12) – на группе $\partial(X) \cap \mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X})$. Как нетрудно видеть, гомоморфизм $^2\,\mathrm{in}_{Y/X}$ индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{gr}(\mathrm{Ker}(^\infty\mathrm{in}_{Y/X})/\mathrm{Ker}(^2\mathrm{in}_{Y/X})) \to \mathrm{gr}(\partial(X) \cap \mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X}))$$

и, следовательно, – изоморфизм

$$\mathrm{Ker}(^\infty\mathrm{in}_{Y/X})/\mathrm{Ker}(^2\mathrm{in}_{Y/X}) \to \partial(X) \cap \mathrm{Im}(^2\mathrm{in}_{Y/X}).$$

Гомоморфизм $^2\mathrm{in} : {}^2H^i(Y) \to {}^2H^i(X)$ – изоморфизм для $i \leq n-1$. Для доказательства утверждения 2 заметим, что

$$^\infty\mathrm{in}_{Y/X} : {}^\infty H^{\leq n-1}(Y) \to {}^\infty H^{\leq n-1}(X),$$

или, что то же самое,

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X}) : \mathrm{gr}^{\leq n-1}_{\mathcal{F}}(H^*(FY)) \to \mathrm{gr}^{\leq n-1}_{\mathcal{F}}(H^*(FX))$$

– эпиморфизм.

Нетрудно видеть, что морфизм фильтрованных модулей $f : A \to B$ индуцирует мономорфизм $\mathrm{gr}(\mathrm{Ker}\,f) \hookrightarrow \mathrm{Ker}\,(\mathrm{gr}\,f)$ и, если $\mathrm{gr}\,f : \mathrm{gr}^{\leq n-1}A \to \mathrm{gr}^{\leq n-1}B$ – эпиморфизм, то вложение $\mathrm{gr}^{\leq n}(\mathrm{Ker}\,f) \hookrightarrow \mathrm{Ker}\,^{\leq n}(\mathrm{gr}\,f)$ – изоморфизм.

Применив последнее рассуждение к гомоморфизму фильтрованных модулей $(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X}) : H^*(FY) \to H^*(FX)$, получаем доказательство утверждения 2. □

X – замкнутое многообразие и $H^{<n}(X) \subset \mathrm{Im}\,({}^2\mathrm{in}_{Y/X}) \subset \vartheta(X)$, следовательно, $\partial(X) \subset (H^{<n}(X))^\perp = H^{\leq n}(X)$, что и доказывает утверждение 2. Теперь утверждения 1 и 4 следуют из того, что Y – эффективно и подмодуль $\mathrm{Ker}\,(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X})$ инвариантен относительно действия автоморфизма Sq.

Как нетрудно видеть, для $k > 1$

$$(\partial^n_k(X)/\partial^n_{k-1}(X))^\perp = \vartheta^n_{k-1}(X)/\vartheta^n_k(X)$$

и изоморфизм $\tilde{d}_k$ индуцирует изоморфизм

$$\vartheta^n_{k-1}(X)/\vartheta^n_k(X) \to \partial^{n-k+1}_k(X)/\partial^{n-k+1}_{k-1}.$$

Следовательно,

$$\dim \frac{\partial^n_k(X)}{\partial^n_{k-1}(X)} \leq \dim \frac{\partial^{\leq n-1}_k(X)}{\partial^{\leq n-1}_{k-1}(X)};$$

утверждение 3 вытекает из последнего неравенства. □

Доказательство предложения 1.4. Как нетрудно видеть C_2-пара $(\mathbb{C}B, \mathbb{C}A)$ удовлетворяет условиям предложения 5.1. Следовательно,

$$\dim(\partial^{<n}(\mathbb{C}A)) \leq \dim(\partial(\mathbb{C}A)) \leq 2\dim(\partial^{<n}(\mathbb{C}A))$$

и

$$\dim(\partial^{<n}(\mathbb{C}A)) = \dim(\operatorname{Ker}^{<n/2}(F\,\mathrm{in}^*_{B/A})).$$

Утверждение 1 предложения следует теперь из равенства (3).

Для доказательства утверждения 2 заметим, что для $i < n$ из равенства

$$\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(\mathbb{C}A) = \operatorname{Im}\mathbb{R}\,\mathrm{in}^*_{B/A}(\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(\mathbb{C}B))$$

и эффективности пространства $\mathbb{C}B$ следует однородность подгрупп $\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(\mathbb{C}A)$; для $i \geq n$ однородность подгрупп $\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(\mathbb{C}A)$ вытекает из следствия 2.7. □

5.2. Вычисление $\dim(\partial(X)/\partial(X) \cap \operatorname{Im}({}^2\,\mathrm{in}_{Y/X}))$**.** Пусть Y – C_2-многообразие, ξ – n-мерное Вещественное расслоение над Y, s – C_2-сечение расслоения ξ, трансверсальное нулевому, X – множество его нулей. Очевидно, X – C_2-многообразие и s индуцирует C_2-вложение $s : Y \backslash X \to S\xi$, которое индуцирует морфизм спектральных последовательностей ${}^r s : {}^r H^*(S\xi) \to {}^r H^*(Y \setminus X)$

Лемма 5.3. *Пусть X – множество нулей сечения s, трансверсального нулевому, векторного расслоения ξ над многообразием Y, пусть размерность X равна $2n$ и $H^{\leq n}(Y, X) = 0$. Тогда $H^{\leq n+2k-1}(S\xi, s(Y \backslash X)) = 0$.*

Доказательство. Сечение индуцирует морфизм точной последовательности пары $(D\xi, S\xi)$ в точную последовательность пары $(Y, Y \setminus X)$. Теперь утверждение следует из леммы о пяти изоморфизмах. □

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.4.

(1) $\operatorname{Ker}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/(Y\backslash X)}) = (\operatorname{Ker}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/X}))^{\perp}$, *где ортогональное дополнение берется относительно формы индексов пересечений Φ_{FY}.*

(2) *Пусть расслоение ξ четно. Тогда*

$$\operatorname{Ker}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/X}) \supset \operatorname{Ker}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/(Y\backslash X)}). \qquad \square$$

5.2.1. Доказательство теорем 1.7 и 1.8. Обозначим фактор-группу, соответствующую последнему включению, через L. Как нетрудно видеть, L – градуированный $H^*(FY)$-модуль.

Предложение 5.5. *Пусть для четверки (Y, ξ, s, X) выполнено:*

(1) *Y – эффективное GM-многообразие,*
(2) *X – замкнутое многообразие размерности $2n$,*
(3) *$H^{\leq n}(Y, X) = 0$,*
(4) *ξ – четное расслоение.*

Тогда

$$\dim \frac{\partial(X)}{\partial(X) \cap \operatorname{Im}({}^2\operatorname{in}_{Y/X})} =$$
$$= \dim(\operatorname{Ker}^{<n/2}(F\ \operatorname{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})) + \dim\{x \in L^{<n/2} \mid \alpha(\xi)x \in L^{\leq n/2+k-1}\}.$$

Доказательство теорем 1.7 и 1.8. В силу предложения 4.8 класс $\alpha(\xi)$ тривиален. Теперь из предложений 5.5 и 5.1 вытекает, что
$$\dim \frac{\partial^n(\mathbb{C}A)}{\partial^n(\mathbb{C}A) \cap \operatorname{Im}({}^2\operatorname{in}_{B/A})} = \dim(\partial^{<n}(X)),$$
откуда в силу предложения 5.1 следует, что $\dim(\partial(X)) = 2\dim(\partial^{<n}(X))$ и, $\partial^n(\mathbb{C}A) \cap \operatorname{Im}({}^2\operatorname{in}_{B/A}) = 0$. Последнее утверждение влечет теорему 1.8, предпоследнее – теорему 1.7. $\square$

Лемма 5.6. *Пусть четверка (Y, ξ, s, X) удовлетворяет условиям предложения 5.5. Тогда*

$$\dim \frac{\partial(X)}{\partial(X) \cap \operatorname{Im}({}^2\operatorname{in}_{Y/X})}$$
$$= \dim(\mathcal{F}_{n+2k-2}(\operatorname{Ker}(Fs^*))) - \dim(\mathcal{F}_{n+2k-2}(\operatorname{Ker}(F\operatorname{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})))$$

Доказательство. Из точности последовательностей пар (Y, X) и (FY, FX) вытекают равенства:

$$\dim(H^*(X)) = \dim(H^*(Y)) + \dim(H^*(Y, X)) - 2\dim\operatorname{Ker}(\operatorname{in}^*_{Y/X}),$$
$$\dim(H^*(FX)) = \dim(H^*(FY)) + \dim(H^*(F(Y, X))) - 2\dim(\operatorname{Ker}(F\operatorname{in}^*_{Y/X}))$$

Вычитая одно равенство из другого и воспользовавшись (3), получаем

$$\dim({}^\infty B(X)) = \dim({}^1B(Y)) + \dim({}^\infty B(Y, X)) - \dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{in}^*_{Y/X})) + \dim(\operatorname{Ker}(F\operatorname{in}^*_{Y/X})). \qquad (15)$$

Как очевидно,

$$\dim(\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X})) = \dim(\mathrm{gr}^{\leq n}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X})) + \dim(\mathrm{gr}^{\geq n}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X}));$$

Вследствие предложения 2.6

$$\dim(\mathrm{gr}^{\geq n}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X})) = \dim({}^{\infty}H^{>n}Y) - \dim(\mathrm{gr}^{\leq n+2k-1}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})).$$

Следовательно, в силу предложения 5.1

$$\dim(\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/X})) = \dim({}^{\infty}H^{>n}(Y)) - \dim(\mathrm{gr}^{\leq n+2k-1}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})) + \dim(\partial^n(X)\cap\operatorname{Im}({}^2\mathrm{in}_{Y/X})) + \dim(\operatorname{Ker}^n({}^2\mathrm{in}_{Y/X})).$$

Заметим, что из тривиальности класса $w_{2k}(\xi)$ и двойственности Пуанкаре вытекает

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{in}^*_{Y/X}) = H^{>n}(Y). \tag{16}$$

Подставляя последние равенства в (15) получаем:

$$\dim\frac{\partial(X)}{\partial(X)\cap\operatorname{Im}({}^2\mathrm{in}_{Y/X})} = \dim(\partial(Y\setminus X)) - \dim(\mathrm{gr}^{\leq n+2k-1}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})) + \dim({}^1B(Y)) - \dim({}^1B(X)) + \dim({}^1B(Y\setminus X)) - 2\dim({}^1B^{>n}(Y)) + \dim(\operatorname{Ker}^n({}^2\mathrm{in}_{Y\setminus X})) - \dim(\operatorname{Ker}^{n+2k-1}({}^2\mathrm{in}_{Y/Y\setminus X})).$$

Из леммы 5.3 и предложения 4.4 следует, что C_2-пара удовлетворяет условиям леммы 5.2, поэтому

$$\dim(\partial(Y\setminus X)) = \dim(\mathrm{gr}^{\leq n+2k-1}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})),$$

поэтому достаточно доказать, что

$$\dim({}^1B(Y)) - \dim({}^1B(X)) + \dim({}^1B(Y\setminus X)) - 2\dim({}^1B^{>n}(Y)) = \dim(\mathrm{gr}^{n+2k-1}_{\mathcal{F}}\operatorname{Ker}(F\,\mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})) - \dim(\operatorname{Ker}^n({}^2\mathrm{in}_{Y/X})) \tag{17}$$

По тем же причинам выполняется равенство

$$\dim({}^1B(Y\setminus X)) = \dim({}^1B^{n+2k-1}(Y\setminus X)) + \dim({}^1B^{<n}(Y)) + \\ + \dim({}^1B^{>n}(Y)) - \dim({}^1B^{n+2k-1}(Y)),$$

значит, левая часть равенства (17) равна

$$\dim({}^1B^n(Y)) - \dim({}^1B^n(X)) + \dim({}^1B^{n+2k-1}(Y\setminus X)) \\ - \dim({}^1B^{n+2k-1}(Y)).$$

В силу (16) и точности длинной последовательности пары следующая последовательность точна:

$$0 \to H^n(Y) \to H^n(X) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Y,X) \to H^{n+1}Y \to 0$$

и, значит, точны последовательности $\mathbb{F}_2[C_2]$-модулей

$$0 \to H^n(Y) \to H^n(X) \to \operatorname{Im}\delta \to 0; \tag{18}$$

$$0 \to H^{n+2k-1}Y \to H^{n+2k-1}(Y\setminus X) \to (\operatorname{Im}\delta)^* \to 0. \tag{19}$$

Для конечного $\mathbb{F}_2[C_2]$-модуля A положим

$$a(A) = \frac{\dim A - \dim(H^1(C_2,A))}{2}$$

Следующее утверждение вытекает из точности соответствующей длинной последовательности.

Лемма 5.7. *Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ – точная последовательность конечных $\mathbb{F}_2[C_2]$-модулей. Тогда*

$$a(C) = a(B) - a(A) - \dim(\operatorname{Ker}(H^1(C_2,A) \to H^1(C_2,B)). \quad \square$$

Заметим, что $a(H^n(Y)) = \dim({}^1B^n(Y))$, аналогично для $\mathbb{F}_2[C_2]$ модулей $H^n(X), H^{n+2k-1}(Y\setminus X)$ и $H^{n+2k-1}(Y)$. В силу последней леммы, из точности последовательностей (18), (19) вытекает равенство

$$\dim({}^1B^n(X)) - \dim({}^1B^n(Y)) - \dim(\operatorname{Ker}({}^2\mathrm{in}_{Y/X})) \\ = \dim({}^1B^{n+2k-1}(Y\setminus X)) - \dim({}^1B^{n+2k-1}(Y)) \\ - \dim(\operatorname{Ker}^{n+2k-1}({}^2\mathrm{in}_{Y/Y\setminus X})).$$

Значит, равенство (17) доказано. □

Доказательство предложения 5.5. В силу леммы 5.6 достаточно вычислить размерность группы

$$R = \frac{\mathcal{F}_{n+2k-2}\mathrm{Ker}\,(Fs^*)}{Fp^*_{S\xi}(\mathcal{F}_{n+2k-2}\mathrm{Ker}\,(F\ \mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)}))}.$$

Из определения класса $\tilde{\rho}$ (см. п. 4.2) вытекает, что

$$\mathcal{F}_{n+2k-2}(S\xi) = \mathcal{F}_{n+2k-2}(Y)\cdot 1_{FS\xi} \oplus \mathcal{F}_{n-1}(Y)\cdot\tilde{\rho}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R = \{x \in \mathcal{F}_{n-1}\mathrm{Ker}\,(F\ \mathrm{in}^*_{Y/X}) \mid x\cdot(Fs^*)(\tilde{\rho}) \\ \in (F\ \mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})(\mathcal{F}_{n+2k-2}(Y))\}. \end{aligned}$$

Вспомнив, что Y – эффективное пространство, и применяя автоморфизм Sq^{-1}, получаем

$$R = \{x \in \mathrm{Ker}^{<n/2}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/X}) \mid x\cdot(Fs^*)(\mathrm{Sq}^{-1}\tilde{\rho}) \in H^{\le n/2+k-1}(Y\setminus X)\}$$

$$= \{x \in \mathrm{Ker}^{<n/2}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/X}) \mid x\cdot(Fs^*)(\mathrm{Sq}^{-1}\tilde{\rho}+\rho_F) \in H^{\le n/2+k-1}(Y\setminus X)\},$$

так как $\rho_F \in H^{k-1}(FS\xi)$. В силу определения класса $\alpha(\xi)$ (см. п. 4.5) можно считать, что $\mathrm{Sq}^{-1}\tilde{\rho} = \rho_F + Fp^*_{S\xi}(\alpha(\xi))$, поэтому

$$\begin{aligned} R = \{x \in \mathrm{Ker}^{<n/2}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/X}) \mid x\cdot(F\ \mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)})(\alpha(\xi)) \\ \in H^{\le n/2+k-1}(Y\setminus X)\} \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что $\mathrm{Ker}^{<n/2}(F\ \mathrm{in}^*_{Y/(Y\setminus X)}) \subset R$. Нетрудно видеть, что соответствующая фактор-группа изоморфна группе $\{x \in L^{<n/2} \mid \alpha(\xi)x \in L^{\le n/2+k-1}\}$. □

5.3. Теорема 5.10 и ее доказательство. Пусть M – градуированный $H^*(FX)$-модуль, $\alpha \in H^*(FX)$; положим

$$\mathrm{Ann}_M(\alpha) = \{x \in M \mid \alpha\cdot x = 0\}.$$

Как очевидно, $\mathrm{Ann}_M(\alpha)$ – однородный подмодуль модуля M.

Предложение 5.8. *Пусть расслоение ξ удовлетворяет условиям предложения 4.8, и пусть класс $c_k(\xi)$ не делится на 4. Тогда*

$$\dim \frac{\partial(X)}{\partial(X)\cap \operatorname{Im}(\,^2\operatorname{in}_{Y/X})} = \dim(\operatorname{Ker}^{<n/2}(F\ \operatorname{in}^*_{Y/(Y\setminus X)}))+$$
$$\dim(\operatorname{Ann}^{<n/2}_L(w_{k-1}(F\xi)))+\sum_{i<n/2+k-1}\dim(\operatorname{Ann}^i_{w_{k-1}(\xi)L}(t^{2(n+1-i)-\varepsilon})),$$

где класс $t\in H^1(FY)$ – такой, что $\psi_Y(t)=\overline{c_1(\xi_1)/2}$ для некоторого четного линейного подрасслоения расслоения ξ и ε – остаток при делении n на 2.

Для $Y=\mathbb{C}$ предложение 5.8 принимает более простой вид.

Следствие 5.9. *Пусть расслоение ξ над $\mathbb{C}P^N$ удовлетворяет условиям предложения 4.8, и пусть класс $c_k(\xi)$ не делится на 4. Пусть $\operatorname{Ker}^{<n/2}(F\operatorname{in}^*_{Y/X})\neq 0$. Тогда $\partial(X)\subset \operatorname{Im}(\,^2\operatorname{in}_{Y/X})$.*

Теорема 5.10. *Пусть четверка (B,ξ,s,A) удовлетворяет условиям 1.3.1 и пусть $c_k(\xi)$ не делится на 4. Тогда*

$$\dim(H^*(\mathbb{R}A))=\dim(H^1(C_2,H^*(\mathbb{C}A)))-2\dim(\operatorname{Ker}^{<n/2}(\mathbb{R}\operatorname{in}^*_{B/A}))-2R,$$

где

$$\begin{aligned}R=\dim(\operatorname{Ker}^{<n/2}(F\ \operatorname{in}^*_{Y/(Y\setminus X)}))&+\dim(\operatorname{Ann}^{<n/2}_L(w_{k-1}(F\xi)))\\ +\sum_{i<n/2+k-1}&\dim(\operatorname{Ann}^i_{w_{k-1}(\xi)L}(t^{2(n+1-i)-\varepsilon}))\\ +\dim(\operatorname{Ker}^{n/2}(\mathbb{R}\operatorname{in}^*_{B/A}))&-\dim(\operatorname{Ker}^{n}(\,^2\operatorname{in}_{B/A}))\end{aligned}$$

и ε – остаток при делении n на 2.

Доказательство. Легко следует из предложений 5.8 и 5.1. □

Доказательство предложения 5.8. Пусть α – необязательно однородный элемент кольца $H^*(FY)$, пусть M – градуированный $H^*(FY)$-модуль. Для произвольных n,r положим

$$K_\alpha(M;n,r):=\{x\in M^{<n}\mid \alpha x\in M^{\leq r}\}.$$

В силу предложения 5.5 для вычисления $\dim(\partial(X)/(\partial(X)\cap \operatorname{Im}(\,^2\operatorname{in}_{Y/X})))$ необходимо подсчитать размерность $\mathbb{F}_2$-модуля $K_{\alpha(\xi)}(L;n/2,n/2+k-1)$. Вспомним, что $\alpha(\xi)=w_{k-1}(F\xi)\cdot\beta$, где

$\beta = t + t^2 + \ldots + t^{2^i} + \ldots$ для некоторого $t \in H^1(FY)$. Заметим,что умножение на $w_{k-1}(F\xi)$ индуцирует точную последовательность

$$0 \to Ann_L^{<n/2}(w_{k-1}(F\xi)) \to K_{\alpha(\xi)}(L; \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k - 1) \to$$
$$\to K_\beta(w_{k-1}(F\xi)L; \frac{n}{2} + k - 1, \frac{n}{2} + k - 1) \to 0$$

$\mathbb{F}_2$-модули L и $w_{k-1}(F\xi)L$ являются градуированными $\mathbb{F}_2[t]$-модулями. Утверждение предложения вытекает из следующей леммы.

Лемма 5.11. *Пусть M – $\mathbb{F}_2[t]$-модуль, $n \geq 0$. Тогда*

$$\dim(K_\beta(M; n, n-\varepsilon)) = \sum_{i \leq n} \dim(\mathrm{Ann}_M^i(t^{2(n-i)-\varepsilon})).$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для градуированных модулей $I_r = \mathbb{F}F_2[t]/(t^{r+1})$. Пусть

$$\gamma_{r,n}^\varepsilon : I_r^{<n} \to I_r / I_r^{\leq n-\varepsilon}$$

– композиция проекции и умножения на β. Легко заметить, что

$$\mathrm{Ker}\, \gamma_{r,n}^\varepsilon = K_\beta(I_r; n, n-\varepsilon); \quad \gamma_{r,n}^\varepsilon = \mathrm{pr} \circ \gamma_{r+1,n}^\varepsilon,$$

где $\mathrm{pr} : I_{r+1}/I_{r+1}^{\leq n-\varepsilon} \to I_r/I_r^{\leq n-\varepsilon}$ – каноническая проекция. В силу коммутативности соответствующих диаграмм, если $\gamma_{r,n}^\varepsilon$ – мономорфизм, то $\gamma_{r_1,n}^\varepsilon$ – мономорфизм для всех $r_1 \geq r$, и если $\gamma_{r,n}^\varepsilon$ – эпиморфизм, то $\gamma_{r_1,n}^\varepsilon$ – эпиморфизм для всех $r_1 \leq r$.

Теперь для доказательства леммы достаточно показать, что $\gamma_{2n-\varepsilon,n}^\varepsilon$ – изоморфизм. Докажем это индукцией по n.

База очевидна. Пусть доказываемое утверждение верно для $n < r$. Докажем, что $\gamma_{2r-\varepsilon,r}^\varepsilon$ – изоморфизм. Найдется натуральное i такое, что $\gamma_{2r-\varepsilon,r}^\varepsilon(1) = \overline{t^{2^i}}$. Как очевидно, для всех $0 \leq j \leq 2n - \varepsilon - 2^i$ выполняется сравнение $\gamma_{2r-\varepsilon,r}^\varepsilon(t^j) \equiv \overline{t^{2^i+j}} \pmod{I_{2r-\varepsilon}^{2^i+j-1}}$. Значит,

$$\dim(\mathrm{Im}(\gamma_{2r-\varepsilon,r}^\varepsilon)) = 2r - \varepsilon - 2^i + \dim(\mathrm{Im}(\gamma_{2r_1-\varepsilon,r_1}^\varepsilon)),$$

где $r_1 = 2^i - n - 2 + \varepsilon < r$. Теперь утверждение леммы вытекает из индукционного предположения. □

Доказательство следствия 5.9. Пусть образующая $\mathbb{F}_2[t]$-модуля L имеет размерность l. Тогда существуют изоморфизмы

(1) $I_{n+k-2l} \to L$ степени l,
(2) $I_{n-2l+1} \to w_{k-1}(\xi)L$ степени $k-1$.

Теперь легко видеть, что

$$\{x \in L^{<n/2} \mid w_{k-1}(F\xi) \cdot x = 0\} = 0$$

и из вычислений доказательства предложения следует, что

$$K_\beta(w_{k-1}(F\xi)L; \frac{n}{2}+k-1, \frac{n}{2}+k-1) = K_\beta(I_{n-2l+1}; \frac{n}{2}-l, \frac{n}{2}-l) = 0. \square$$

Литература

1. В. И. Арнольд, *О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм.* — Функцион. анализ и его прил. **5**, вып. 3 (1971), 1–9.
2. Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований.* Наука, М. (1980).
3. У. И. Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований.* Мир, М. (1979).
4. В. М. Харламов, *Новые сравнения для эйлеровой характеристик вещественных алгебраических многообразий.* — Функцион. анализ и его прил. **7**, вып. 2 (1973), 74–78.
5. И. О. Калинин, *Когомологические характеристики вещественных проективных поверхностей.* — Алгебра и анализ **18**, No. 4 (1991), 19–28.
6. A. Degtyarev, *On the Pontrjagin–Viro form.* — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **202** (2001), 71–94.
7. А. Дегтярев, В. Харламов, *Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: Du côte de chez Rokhlin.* — УМН **55**, вып. 4 (2000), 129–212.
8. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces.* — Lecture Notes Math. **1746**, Springer, Berlin (2000).
9. У. Фултон, *Теория пересечений.* — Мир, М. (1989).
10. И. О. Калинин, *Фильтрации, спектральные последовательности, дискриминантные многообразия.* — Готовится к печати.
11. W. Fulton, R. Lazarsfeld, *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors.* — Acta Math. **146** (1981), 271–283.
12. В. М. Харламов, *Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многообразий.* — Функц. анал. и его прилож. **9**, No. 2 (1975), 51–60.
13. O. Viro, *Mutual position of hypersurfaces in projective space.* — Preprint.
14. P. Deligne, *Theorie de Hodge,* II. — Republications Math., IHES No. 40 (1972).

Kalinin I. O. On the cohomology of real algebraic varieties.

A class of spaces with involution introduced by the author is studied: *effective* spaces, whose cohomology rings of fixed-point sets are completely determined by the spectral sequence of involution. Real algebraic varieties admitting a "cellular decomposition" are effective M-spaces. Under certain restrictions, one calculates the spectral sequence of involution and the total $\mathbb{Z}_2$ Betti number of the real part for real subvarieties of real algebraic varieties that are effective GM-spaces.

Поступило 1 декабря 2002 г.