Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. С. Кальницкий

АЛГЕБРЫ ЯКОБИ ПЛОСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Введение

В работах автора [1–3] было предпринято систематическое исследование симметрий геодезических потоков аффинных связностей. Вопрос о симметриях векторных полей как геометрических объектов до настоящего времени остается практически не изученным. То немногое, что удалось сказать о симметриях полей, можно найти в работах Omori [4], Смоленцева [5]. Ковекторные поля симметрий гамильтоновых систем изучались В. В. Козловым [6] (в размерности 2), И. А. Таймановым [7] (в старших размерностях), М. А. Париновым [8] (в аналитическом случае).

Идеи, нашедшие применение в ходе исследования, предпринятого автором, не являются новыми. Градуированные и фильтрованные алгебры струй полей симметрий геометрических объектов появились уже в работах Картана. Полилинейные поля симметрий потоков рассматривались В. В. Козловым. Однако такие объекты как алгебра Якоби и обобщенное уравнение Якоби введены автором впервые.

В силу общности постановки вопроса используемая техника крайне ограничена в средствах. В этом контексте случай однородного многообразия со связностью можно рассматривать как простейший. Однако до настоящего времени изученным остается лишь одномерный случай. Получена полная классификация геодезических потоков на окружности с точностью до изоморфности алгебр Якоби (см. [1]).

В настоящей работе делается следующий шаг в этом направлении. Доказана классификационная теорема для плоских многообразий (содержателен, конечно, в первую очередь, случай n-мерного тора).

По существу, все результаты являются комбинаторными фактами. Однако прямые вычисления кажутся невыполнимыми уже в размерности 2. Обозначения, принятые в настоящей статье, следуют работе [1].

- $\mathcal{T}_p^k$ $(S\mathcal{T}_p^k)$ – пространство k раз контравариантных p раз (симметричных) ковариантных тензорных полей.
- $\{,\}_{\bar\alpha}$ – симметризация по мультииндексу $\bar\alpha$
- TM – касательное расслоение многообразия M.
- (x, v) – стандартная карта на TM.
- (A, Q) – полилинейное векторное поле типа k на TM. В карте (x, v) имеет вид
$$(A, Q) = A^i_{\bar\alpha}(x)v^{\bar\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i} + Q^i_{\bar\beta}(x)v^{\bar\beta}\frac{\partial}{\partial v_i},$$
где $A \in S\mathcal{T}_k^1$; Q – псевдотензор типа $(1, k+1)$, $k \geqslant 0$.
- $A(B)$ – симметризованная свертка тензоров.
- ∇ – полная ковариантная производная.
- $\hat\nabla$ – симметризованная полная ковариантная производная.

§1. Алгебра $\mathfrak{aff}_n(\infty)$

Напомним геометрическую реализацию алгебры Ли $\mathfrak{aff}_n(\mathbb{R})$ группы аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Алгебра состоит из линейных векторных полей вида
$$X(x) = (a^i_j x^j + b^i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$
В алгебре $\mathfrak{aff}_n$ имеется n-мерная коммутативная подалгебра Ли $\mathfrak{r}_0$ векторных полей с постоянными коэффициентами. Если рассматривать $\mathbb{R}^n$ с заданной тривиальной связностью, то $\mathfrak{r}_0$ – алгебра ковариантно постоянных векторных полей.

Эта геометрическая конструкция допускает бесконечномерное обобщение. На касательном расслоении $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ тривиальной связности соответствует векторное поле геодезического потока S. В выбранной нами системе координат оно имеет вид
$$S = (E, O) = v^i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$
Рассмотрим поднятие $\tilde X$ поля X на касательное расслоение с помощью дифференциала. В веденных обозначениях
$$\tilde X = (X, dX) = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial X^i}{\partial x_j}(x)v^j\frac{\partial}{\partial v_i}.$$

Поле X на M является аффинным тогда и только тогда, когда $[\tilde{X}, S] = 0$ относительно скобки Ли векторных полей на TM. Этим мотивируется следующее определение. Рассмотрим векторное поле (A, Q) типа $k \geqslant 0$.

Определение. *Поле (A, Q) будем называть полиаффинным, если оно коммутирует с геодезическим векторным полем $[S, (A, Q)] = 0$.*

В [1] доказано, что полиаффинные поля имеют вид $(A, \hat{\nabla} A)$, где тензорное поле A удовлетворяет уравнению

$$\hat{\nabla}^2 A = 0. \tag{1}$$

Можно отождествить полиаффинное поле с тензором, его порождающим. Введем обозначение $\mathfrak{h}_k$ для пространства решений уравнения (1).

Определение. *Алгебра $\mathfrak{aff}_n(\infty)$ определяется как прямая сумма*

$$\mathfrak{aff}_n(\infty) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{h}_k.$$

Операция Ли индуцируется скобкой Ли векторных полей на TM. Если $A \in \mathfrak{h}_k$, $B \in \mathfrak{h}_s$, то

$$[A, B] = \{\nabla_A B - \nabla_B A\} + sB(\hat{\nabla} A) - kA(\hat{\nabla} B). \tag{2}$$

Сообщим простейшие факты про алгебру $\mathfrak{aff}_n(\infty)$.

1) $\mathfrak{aff}_n \cong \mathfrak{h}_0$.

2) Пространство $\mathfrak{h}_k$ есть конечномерное пространство тензоров с полиномиальными коэффициентами.

3) Все тензоры с линейными коэффициентами относительно введенной операции Ли образуют бесконечномерную подалгебру с естественной градуировкой $\mathfrak{aff}_n^0(\infty) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{l}_k$.

4) В свою очередь, тензоры с постоянными коэффициентами (ковариантно постоянные) образуют коммутативную подалгебру $\mathfrak{r} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{r}_k$.

Напомним простой факт теории алгебр Ли.

Утверждение. *Любой автоморфизм алгебры* $\mathfrak{aff}_n$ *является внутренним.*

Геометрически это означает, что любому автоморфизму θ алгебры $\mathfrak{aff}_n$ соответствует аффинное преобразование φ пространства $\mathbb{R}^n$, задающее автоморфизм θ операцией φ^* переноса тензорных структур (в данном случае векторных полей). Покажем, что любое аффинное преобразование φ задает автоморфизм всей алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$.

Лемма. *Пусть заданы C^∞-многообразие N, алгебра Ли векторных полей $Y \subset \mathcal{T}^1 N$, тензорный оператор $L : Y \to \bigoplus\limits_{k,p} \mathcal{T}_p^k N$ и диффеоморфизм $\varphi \in \operatorname{Diff} N$. Если*

(а) $\varphi^* L = L d\varphi$,

(б) $\operatorname{Ker} L$ – *алгебра Ли,*

то $\varphi^* \in \operatorname{Aut}(\operatorname{Ker} L)$.

Доказательство. Отображение $d\varphi$ является автоморфизмом алгебры векторных полей на многообразии. Условия (а) и (б) гарантируют, что алгебра $\operatorname{Ker} L$ инвариантна относительно $d\varphi$. $\square$

В нашей ситуации $N = T\mathbb{R}^n$, оператор $L_S Y = [S, Y]$ – производная Ли вдоль геодезического поля, диффеоморфизм $\varphi = d\psi$, где ψ – аффинное преобразование $\mathbb{R}^n$. Условие а) выполнено, так как для любого аффинного преобразования ψ

$$(d\psi)^* S = S.$$

Условие (б) очевидно выполнено.

Определение. *Автоморфизм φ^* алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$, порожденный аффинным преобразованием φ пространства, будем называть внутренним автоморфизмом в сильном смысле.*

Внутренние в сильном смысле автоморфизмы алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$ образуют группу $\operatorname{Aff}_n(\mathbb{R})$, сохраняют градуировку и подалгебры $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{aff}_n$, $\mathfrak{aff}_n^0(\infty)$. Действительно, операция переноса тензорных объектов сохраняет тип тензора и степень коэффициентов, так как сам автоморфизм задается линейным отображением.

Лемма (основная). *Любой автоморфизм θ алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$, сохраняющий*

(а) *градуировку,*

(б) *алгебру* $\mathfrak{aff}_n(\infty)$,
и в алгебре $\mathfrak{aff}_n^0(\infty)$

(в) *коммутирующий с оператором* $\hat{\nabla}$,
является внутренним в сильном смысле.

§2. Доказательство основной леммы

Нам понадобится ряд вычислительных лемм.

Лемма 1. $\hat{\nabla}\mathfrak{l}_k = \mathfrak{r}_k$, $k \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим множество полей пространства $\mathfrak{l}_k$, имеющих вид

$$\left(X^{(i,j,\bar{\alpha})}\right)^s_{\bar{\gamma}} = \delta_i^s \delta_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} x^j.$$

Поля из $\mathfrak{r}_{k+1}$ вида

$$\left(Y^{(i,\bar{\alpha})}\right)^s_{\bar{\gamma}} = \delta_i^s \delta_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}$$

образуют базис в $\mathfrak{r}_{k+1}$. Вычислим значение оператора $\hat{\nabla}$:

$$\hat{\nabla} X^{(i,j,\bar{\alpha})} = \left\{\nabla_s X^{(i,j,\bar{\alpha})}\right\}_{s,\bar{\alpha}} = \frac{\alpha_j + 1}{k} Y^{(i,\bar{\alpha}')},$$

где $\bar{\alpha}' = (\ldots, \alpha_j + 1, \ldots)$. Следовательно, любой базисный элемент в $\mathfrak{r}_{k+1}$ является образом некоторого поля из $\mathfrak{l}_k$. $\square$

Лемма 2. *Для поля* $X_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, *и любого поля* $A \in \mathfrak{h}_s$, $s \geqslant 0$,

$$[X_i, A] = \nabla_i A.$$

Доказательство. Распишем скобку по формуле (2):

$$[X_i, A]^j_{\bar{\alpha}} = \{\nabla_{X_i} A - \nabla_A X_i\}^j_{\bar{\alpha}} + sA\left(\hat{\nabla} X_i\right)^j_{\bar{\alpha}}.$$

Поскольку поля X_i ковариантно постоянны, второе и третье слагаемые – нулевые. Первое слагаемое имеет вид

$$\left\{\delta_i^l \nabla_l A\right\}^j_{\bar{\alpha}} = \nabla_i A^j_{\bar{\alpha}}. \quad \square$$

Уравнение (1) для каждого типа полей k распадается на группу уравнений относительно полей с однородными по x коэффициентами. Для каждого $p, p \geqslant 0$, степени однородности, обозначим пространство решений $\mathfrak{h}_k^p$. Так как пространство $\mathfrak{h}_k$ конечномерно, то

$$\mathfrak{h}_k = \bigoplus_{p=0}^{N(k)} \mathfrak{h}_k^p,$$

где $N(k)$ – некоторое число ($N(k) \leqslant nk - k + n$ [1]).

Лемма 3. *Коммутатор поля $Z = x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{l}_0$ с любым полем $A \in \mathfrak{h}_k^p$ равен*

$$[Z, A] = (k + p - 1)A.$$

Доказательство. По формуле (2)

$$[Z, A] = \{\nabla_Z A - \nabla_A Z\} + kA(\hat{\nabla} Z).$$

Вычислим каждое из слагаемых.

а) $(\hat{\nabla} Z)^i_j = \nabla_j Z^i = \nabla_j x^i = \delta^i_j = S$.

б) $(A(S))^s_{\bar{\imath}} = \left\{A^s_{li_2\ldots i_k}\delta^l_{i_1}\right\}_{\bar{\imath}} = A^s_{\bar{\imath}}$.

в) $\{\nabla_Z A\}^i_{\bar{\imath}} = Z^l \nabla_l A^i_{\bar{\imath}} = x^l \frac{\partial}{\partial x_l} A^i_{\bar{\imath}} = pA^i_{\bar{\imath}}$ в силу однородности по x.

г) $\{\nabla_A Z\}^i_{\bar{\imath}} = A^l_{\bar{\imath}} \nabla_l Z^i = A^l_{\bar{\imath}} \delta^i_l = A^i_{\bar{\imath}}$.

Окончательно

$$[Z, A] = pA - A + kA = (p + k - 1)A. \quad \square$$

Лемма 4. *Алгебра $\mathfrak{aff}_n(\infty)$ является биградуированной:*

$$\mathfrak{aff}_n(\infty) = \bigoplus_{k,p=0} \mathfrak{h}_k^p, \quad [\mathfrak{h}_k^p, \mathfrak{h}_s^r] \subset \mathfrak{h}_{k+s}^{p+r-1}.$$

Доказательство. В каждом слагаемом коммутатора (2) компоненты полей один раз дифференцируются по переменной, что понижает степень произведения однородных полиномов (коэффициентов тензорных полей) на 1. Свертка же тензоров дает сумму их рангов. $\square$

Лемма 5. *Если автоморфизм θ алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$ неподвижен на подалгебре $\mathfrak{aff}_n$, то*

$$\theta \mathfrak{h}_k^p \subset \mathfrak{h}_k^p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_0^{k+p}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3 для любого поля $A \in \mathfrak{h}_k^0$

$$[Z, A] = (k-1)A.$$

Запишем цепочку тождеств:

$$(k-1)\theta A = \theta[Z, A] = [Z, \theta A].$$

Из этого следует, что

$$\theta A \in \mathfrak{h}_k^0 \oplus \mathfrak{h}_{k-1}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_0^{k+p}.$$

С другой стороны, для любого i

$$[X_i, A] = 0 = \theta[X_i, A] = [X_i, \theta A] = \nabla_i \theta A.$$

Следовательно $\theta A \in \mathfrak{r}$. Докажем утверждение леммы индукцией по степени однородности p. База $p = 0$ доказана. Пусть все доказано для $s \leqslant p-1$. Рассмотрим поле $A \in \mathfrak{h}_k^p$. С одной стороны,

$$(p+k-1)\theta A = \theta[Z, A] = [Z, \theta A],$$

т.е.

$$\theta A \in \mathfrak{h}_{k+p}^0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_0^{k+p}.$$

С другой стороны, для любого i имеем $\nabla_i A \in \mathfrak{h}_k^{p-1}$. В силу индукционного предположения

$$\nabla_i \theta A = \theta \nabla_i A \in \mathfrak{h}_k^{p-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_0^{k+p-1}.$$

Отсюда

$$\theta A \in \mathfrak{h}_k^p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_0^{p+k} \oplus \mathfrak{r}.$$

Сравнивая оба включения, получаем окончательно

$$\theta A \in \mathfrak{h}_k^p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_0^{k+p}.$$

Индукционный переход и вся лемма доказаны. $\square$

Из леммы 5 следует, что автоморфизм градуированной алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$, неподвижный на подалгебре $\mathfrak{aff}_n$ сохраняет биградуировку.

Лемма 6. *Автоморфизм θ градуированной алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$, неподвижный на подалгебре $\mathfrak{aff}_n$ и подпространстве $\mathfrak{r}_k$, тождественен на подпространстве $\mathfrak{h}_k$.*

Доказательство. В силу леммы 5 автоморфизм θ сохраняет биградуировку. Докажем индукцией по p, что он тождественен на $\mathfrak{h}_k^p$. База $p = 0$ дана в условии. Пусть θ тождественен на $\mathfrak{h}_k^s$, $s \leqslant p - 1$. Рассмотрим поле $A \in \mathfrak{h}_k^p$. Поле $\nabla_i A \in \mathfrak{h}_k^{p-1}$. По индукционному предположению

$$\nabla_i A = \theta \nabla_i A = \nabla_i \theta A.$$

Следовательно, для любого i

$$\nabla_i(\theta A - A) = 0.$$

Так как $\theta A - A \in \mathfrak{h}_k^p$, $p \geqslant 1$, то $\theta A - A = 0$. Индукционный переход доказан. □

Итак, любое условие на автоморфизм, неподвижный на $\mathfrak{aff}_n$, гарантирующее его неподвижность на $\mathfrak{r}$, влечет его тождественность. Например, таким естественным (с геометрической точки зрения) условием является коммутирование с симметризованной ковариантной производной.

Лемма 7. *Автоморфизм θ градуированной алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$,*
(а) *неподвижный на $\mathfrak{aff}_n$ и*
(б) *коммутирующий с $\hat{\nabla}$ на $\mathfrak{aff}_n^0(\infty)$,*
тождественен.

Доказательство. В силу сохранения биградуировки подалгебра $\mathfrak{aff}_n^0(\infty)$ инвариантна. Докажем тождественность автоморфизма θ на $\mathfrak{h}_k$ индукцией по k. База $k = 0$ есть пункт а) условия леммы. Пусть доказано, что автоморфизм θ неподвижен на $\mathfrak{h}_s$, $s \leqslant k - 1$. Рассмотрим любое поле $A \in \mathfrak{h}_k^0$. В силу леммы 1, существует поле $B \in \mathfrak{h}_{k-1}^1 \subset \mathfrak{aff}_n^0(\infty)$ такое, что

$$\hat{\nabla} B = A.$$

По индукционному предположению $\theta B = B$ и по свойству б) леммы $\hat{\nabla}\theta = \theta\hat{\nabla}$. Запишем цепочку тождеств

$$\theta A = \theta \hat{\nabla} B = \hat{\nabla} \theta B = \hat{\nabla} B = A.$$

То есть θ тождественен на $\mathfrak{r}_k$. По лемме 6 автоморфизм θ тождественен на $\mathfrak{h}_k$. Индукционный переход и лемма доказаны. $\square$

Доказательство основной леммы. Рассмотрим произвольный автоморфизм θ градуированной алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$, сохраняющий подалгебру $\mathfrak{aff}_n$. Сужение θ на $\mathfrak{aff}_n$ является внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{aff}_n$, т.е. порождается некоторым аффинным преобразованием φ пространства $\mathbb{R}^n$. Автоморфизм

$$\theta \circ \left(\varphi^{-1}\right)^*$$

алгебры $\mathfrak{aff}_n(\infty)$ неподвижен на $\mathfrak{aff}_n$, сохраняет градуировку и коммутирует с оператором $\hat{\nabla}$ на $\mathfrak{aff}_n^0(\infty)$. По лемме 7

$$\theta \circ \left(\varphi^{-1}\right)^* = \mathrm{id}.$$

Значит $\theta = \varphi^*$, т.е. θ является внутренним в сильном смысле. $\square$

§3. Классификационная теорема

Покажем как основная лемма позволяет классифицировать возможные алгебры на плоских многообразиях. Пусть многообразие M – однородное относительно плоской связности ∇ без кручения. Алгебра Якоби над односвязной картой U изоморфна алгебре $\mathfrak{aff}_n(\infty)$. В силу однородности возникает представление монодромии

$$\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{aff}_n(\infty)).$$

Во-первых, продолжение тензорных полей вдоль петель сохраняет тип поля, т.е. градуировку алгебры. Во-вторых, коммутирует с любым оператором, чья псевдогруппа автоморфизмов содержит (локальные) автоморфизмы связности. В частности, с полной ковариантной производной и ее степенями, симметризованной ковариантной производной и ее степенями. Первое гарантирует, что алгебры $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{aff}_n^0(\infty)$ инвариантны, второе есть часть условия основной леммы. Мы находимся в условиях этой леммы. Таким образом, все автоморфизмы представления ρ являются внутренними в сильном смысле.

Теорема (классификационная)**.** *Список возможных алгебр Якоби плоских связностей на многообразии M возникает как перечисление максимальных тривиальных подпредставлений монодромии*

$$\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{aff}_n). \qquad \square$$

Вопрос реализуемости алгебр из полученного списка остается открытым.

Литература

1. В. С. Кальницкий, *Алгебра обобщенных полей Якоби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1995), 222–244.
2. В. С. Кальницкий, *Автоморфизмы геодезического векторного поля.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1, Вып. 2, No. 8 (1995), 23–24.
3. V. Kalnitsky, *Symmetry fields of geodesic vector field.* — In: Proc. 7th Int. Conf. DGA'98 Brno (1998), pp. 355–359.
4. H. Omori, *Infinite dimensional Lie transformation groups.* — Lect. Notes Math. **427** (1974).
5. Н. К. Смоленцев, *О группе диффеоморфизмов, оставляющих неподвижным векторное поле.* — Сиб. мат. ж. **25** (1984).
6. В. В. Козлов, *О группах симметрии геодезических потоков на замкнутой поверхности.* — Мат. зам. **48** (1990).
7. И. А. Тайманов, *О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков.* — Мат. зам. **44**, вып. 2 (1988), 283.
8. М. А. Паринов, *О группах диффеоморфизмов сохраняющих невырожденное аналитическое ковекторное поле.* — Мат. сб. **186**, No. 5 (1995), 115–126.

Kalnitsky V. S. Jacobi algebras on flat manifolds.

A classification theorem for the Jacobi algebras on flat manifolds is proved. The proof involves a generalization of a result about the Lie algebra $\mathfrak{aff}_n(\mathbb{R})$.

С.-Петербургский государственныйуниверситет

E-mail: skalnitsky@hotmail.com

Поступило 28 декабря 2002 г.