Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

М. Д. Ковалев

О РАВНОУГОЛЬНЫХ ТОЧКАХ

Ориентированным углом между двумя пересекающимися прямыми на плоскости называют угол $\varphi \in (0;\pi)$, отмеряемый от первой прямой до второй в направлении против часовой стрелки. Ориентированный угол между двумя параллельными или совпадающими прямыми считается нулевым. Будем говорить, что из точки T вектор $\overline{ab}$ *виден под углом* $\varphi \in [0;\pi)$, если ориентированный угол между прямой Ta и прямой Tb равен φ. Для точки $T \neq a, b$ этот угол определен однозначно. Угол, под которым вектор $\overline{ab}$ виден из точек a и b, не определен, и мы будем приписывать ему произвольное значение. Если $\varphi > 0$, то точки T, из которых вектор ab виден под углом φ, составляют окружность, проходящую через a и b. В этом случае мы считаем вектор $\overline{ab}$ видным из его начала и его конца также под углом φ. Множество точек, из которых ненулевой вектор $\overline{ab}$ виден под нулевым углом, считаем совпадающим с множеством точек прямой ab. Точку T плоскости, из которой все векторы некоторой совокупности видны под одинаковыми ориентированными углами, назовем *точкой равноугольной видимости* или короче *равноугольной точкой* для данной совокупности векторов.

Теорема 1. *Для двух векторов на плоскости точка равноугольной видимости всегда существует.*

Доказательство. Если векторы лежат на пересекающихся прямых, то в качестве равноугольной точки можно взять точку пересечения этих прямых (и угол видимости равен 0). Если векторы $\overline{Aa}, \overline{Bb}$ лежат на параллельных прямых и противоположно направлены, то точкой равноугольной видимости является точка пересечения прямых Ab и Ba. Если векторы $\overline{Aa}, \overline{Bb}$ лежат на параллельных прямых, одинаково направлены и не равны по длине, то точкой их равноугольной видимости является точка пересече-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00619).

ния прямых AB и ab. Если же векторы равны и лежат на параллельных прямых, то расстояние ρ между центрами окружностей O_a и O_b их равноугольной видимости не зависит от угла видимости. Эти окружности имеют одинаковый радиус, и если взять его большим $\rho/2$, то они пересекутся. Точка их пересечения является равноугольной точкой. •

В случае совокупности трех векторов $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$ вопрос оказывается более интересным, точка равноугольной видимости не всегда существует. Например, возьмем векторы $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$, лежащими на трех попарно различных параллельных прямых, причем вектор Aa нулевым и таким, что точка A не является точкой равноугольной видимости для ненулевых векторов $\overline{Bb}, \overline{Cc}$. Поскольку вектор $\overline{Aa} = \overline{AA}$ виден из любой точки $T \neq A$ под нулевым углом и не существует точки из которой оба вектора $\overline{Bb}, \overline{Cc}$ видны под нулевым углом то для этой совокупности нет равноугольной точки.

Заметим, что в случае совпадения хотя бы двух крайних точек двух различных векторов тройки, эта общая крайняя точка является равноугольной для данной тройки векторов.

Зафиксируем начала A, B, C векторов в плоскости так, чтобы точки A и B не совпадали. Тогда имеется декартова прямоугольная система координат, в которой: $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (u, v)$. Пусть в этой системе координат $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Последние шесть координат параметризуют пространство $\mathbb{R}^6$ всех троек векторов плоскости с началами A, B, C.

Теорема 2. *Пусть хотя бы две из точек A, B, C не совпадают между собой. Тогда множество троек векторов $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$, для которых существует равноугольная точка, всюду плотно в пространстве параметров $\mathbb{R}^6$.*

Доказательство. Запишем уравнения окружностей, из точек которых каждый из векторов $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$ виден под углом φ, считая $t = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$.

$$(x - \frac{x_1}{2} + ty_1)^2 + (y - \frac{y_1}{2} - t\,x_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)\frac{1}{4} + t^2),$$

$$(x - \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} + ty_2)^2 + (y - \frac{y_2}{2} - t(x_2 - 1))^2$$
$$= ((x_2 - 1)^2 + y_2^2)\frac{1}{4} + t^2),$$

$$(x - \frac{u}{2} - \frac{x_3}{2} + t(y_3 - v))^2 + (y - \frac{v}{2} - \frac{y_3}{2} - t(x_3 - u))^2$$
$$= ((x_3 - u)^2 + (y_3 - v)^2)(\frac{1}{4} + t^2).$$

Вычитая из двух последних уравнений первое, придем к системе 2 линейных уравнений относительно координат (x, y) точки пересечения трех окружностей:

$$\begin{cases} (2t - 2tx_2 + y_1 - y_2 + 2x_1)y \\ +(-1 + 2ty_2 + x_1 - x_2 - 2ty_1)x = 2ty_2 - x_2, \\ (2tx_1 - v - y_3 + y_1 - 2tx_3 + 2tu)y \\ +(x_1 + 2ty_3 - 2ty_1 - u - 2tv - x_3)x \\ = -vy_3 - u\,x_3 + 2uty_3 - 2x_3tv. \end{cases}$$

Далее в вычислениях существенно использовался пакет Maple. Решая эту систему в предположении неравенства нулю ее определителя $\Delta(t)$, получим достаточно громоздкие выражения для x и y в виде дробей, в числителях и знаменателях которых стоят многочлены второй степени по переменной t. Подставляя эти выражения x, y в уравнение первой окружности и выделяя из получившейся несократимой дроби числитель, получим многочлен относительно переменной $t = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$. Старшая (шестая) степень переменного t в этом многочлене уничтожается, и остается многочлен $P_5(t)$ пятой степени по t. Коэффициент k_5 при t^5 этого многочлена представляет собой довольно громоздкую функцию от координат точек a, b, c.

Проверим, что эта функция не обращается ни при каких значениях u и v в ноль тождественно по остальным переменным. Для этого подсчитаем ее значения при следующих четырех наборах координат свободных шарниров:

$$(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3) = (1,1;0,0;1,0),\ (1,1;1,1;1,0),$$
$$(0,1;0,0;1,0)\ (1,1;0,0;1,1).$$

Получаем, соответственно, следующие функции:

$$64v - 32vu + 64v^2,$$
$$-32 + 32u - 32v + 32vu,$$
$$64v - 32vu + 32v^2,$$
$$-96vu + 64v^2 + 32u^2.$$

Приравняем их нулю. Система из первых трех полученных уравнений имеет единственное очевидное решение: $u = 1, v = 0$. Однако это решение не удовлетворяет последнему уравнению. Невозможность тождественного обращения в ноль функции k_5 ни при каких u и v установлена. Таким образом, множество решений уравнения $k_5 = 0$ является замкнутым множеством размерности меньшей 6, а его дополнение открыто и всюду плотно в пространстве $\mathbb{R}^6$. Но при $k_5 \neq 0$ алгебраическое уравнение относительно угла равноугольной видимости (получаемое приравниванием числителя дроби нулю) имеет вещественное решение, и следовательно, в этом случае имеется равноугольная точка.

Пока мы не учитывали возможности, возникающие при обращении в ноль определителя $\Delta(t)$ рассмотренной выше линейной системы. Проанализируем этот случай. Выпишем определитель $\Delta(t)$:

$$\begin{gathered}
-4x_2tu - y_1 + y_3 + v - 4tx_1 + 4tx_3 - x_1v - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2v \\
+x_2y_3 + 4t^2v - 4t^2y_3 + 4t^2y_1 + y_1x_3 + y_1u + 4t^2y_2x_1 + 4t^2y_2u \\
-4t^2y_2x_3 - 4t^2y_1u + 4t^2y_1x_3 + 4x_1tu - 4ty_2v + 4ty_1v - 4t^2x_2v \\
-4t^2x_2y_3 + 4t^2x_2y_1 + 4t^2x_1v - 4t^2x_1y_3 - y_2x_3 + y_2x_1 - y_2u.
\end{gathered}$$

Вышеприведенное рассуждение не приведет нас к цели, если при каких-либо определенных значениях u и v для всех значений переменных x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 хотя бы один корень многочлена $P_5(t)$ является также нулем определителя $\Delta(t)$. Чтобы доказать невозможность этого, вычислим результанты R_1, R_2, R_3 многочленов $P_5(t)$ и $\Delta(t)$ при следующих трех наборах переменных:

$$(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3) = (0, 1; 0, -1; 0, 0),\ (-1, -1; 0, -1; -1, 0),$$
$$(-1, 1; 0, 1; 0, -1).$$

Получим:

$$
\begin{aligned}
R_1 = {} & (-1+v+2u)(32768u - 4096v^2 - 90112u^2 + 65536u^3 \\
& - 16384uv^2 - 229376u^5 - 65536uv^4 + 163840u^2v^2 + 36864v^4 \\
& + 126976u^4 - 57344u^2v^4 + 32768u^6 + 20480u^4v^2 - 294912u^3v^2 \\
& - 4096 + 131072u^7 + 229376u^3v^4 + 49152uv^6 + 311296u^5v^2 \\
& + -45056v^6 - 180224v^2u^6 16384v^8 - 16384v^6u^2 \\
& - 147456v^4u^4 - 65536u^8),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_2 = {} & -1024uv + 512v - 256v^2 - 512u^2 + 256 - 1024u^3 \\
& - 1024v^3 - 2048uv^2 - 1024vu^2 + 1024u^5 + 2048uv^4 + 3072u^2v^3 \\
& + 1024u^2v^2 - 256v^4 + 256u^4 + 1536u^2v^4 + 2048u^3v^3 + 1024u^6 \\
& + 2304u^4v^2 + 1024u^5v + 1024uv^5 + 3072u^3v^2 + 2560u^4v \\
& + 512v^5 + 256v^6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_3 = {} & -4096uv - 35840v + 20480u + 2304v^2 - 26624u^2 - 12288u^3 \\
& + 12288v^3 - 11264uv^2 + 30720vu^2 + 1024uv^4 - 4096u^2v^3 \\
& + 3584u^2v^2 - 4096vu^3 - 2560v^4 + 9216u^4 + 512u^2v^4 + 256u^4v^2 \\
& + 1024u^3v^2 - 3072u^4v - 1024v^5 + 256v^6 + 25600.
\end{aligned}
$$

Исследование с помощью базисов Грёбнера системы уравнений $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ с неизвестными u и v показывает ее несовместность. Поскольку равенство нулю результанта является необходимым условием совпадения корней многочленов, наше доказательство этим завершено. •

Из теоремы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Если для тройки связанных векторов плоскости не существует равноугольной точки, то проекции этих векторов на некоторую ось равны.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть три связанных вектора $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}, \overline{Cc}$ с попарно различными крайними точками. (В противном случае равноугольная точка заведомо существует.) Вследствие теоремы 2 найдутся последовательности $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и

$\{c_i\}$ точек плоскости, сходящиеся соответственно к a, b и c, и такие, что для троек векторов $\overline{Aa_i}, \overline{Bb_i}, \overline{Cc_i}$ имеется хотя бы одна равноугольная точка, – пусть это T_i.

Возможны два случая: либо последовательность $\{T_i\}$ ограничена, либо нет. В первом случае у нее найдется сходящаяся подпоследовательность. Ее предельная точка T, очевидно, является равноугольной точкой для $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$. Действительно, пусть из точки T_i вектор $\overline{Aa}$ виден под углом φ_i. Пусть T не совпадает, скажем, с A и a. Тогда, очевидно, последовательность φ_i сходится к некоторому углу φ. В силу непрерывной зависимости этого угла от $\overline{Aa_i}$ и от точки T_i, при достаточно больших i не совпадающей ни с одной из точек a_i, a, A, предельный вектор $\overline{Aa}$ виден из T под углом φ. В силу сказанного выше, T может совпасть не более чем с одной из крайних точек векторов $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$, пусть, например, с a. В этом случае мы считаем, что вектор $\overline{Aa}$ виден из $T = a$ под тем же предельным углом φ, что и остальные два вектора.

Если же последовательность $\{T_i\}$ неограниченна, то из нее можно выбрать подпоследовательность $T_{i_k} \to \infty$ при $k \to \infty$, для которой направления радиус-векторов $\overline{oT_{i_k}}$ сходятся к некоторому направлению $\mathbf{e}$. Остается заметить, что в этом случае проекции векторов $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$ на ось направления, перпендикулярного к $\mathbf{e}$, равны между собой. •

Пример отсутствия равноугольной точки для всех трех ненулевых векторов даёт набор

$$A = (0,0), a = (-2,0); B = (1,0), b = (-2,-1); C = (0,1), c = (0,3).$$

В этом случае векторы $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$ имеют одинаковые проекции на ось с направляющим вектором $(1,-1)$.

Приведем еще очевидную переформулировку доказанной теоремы на языке векторного и скалярного произведений.

Теорема 4. *Пусть для трех векторов $\overline{Aa}, \overline{Bb}, \overline{Cc}$ плоскости P не существует такой точки $T \in P$, чтобы*

$$[\overline{TA}, \overline{Ta}] = (\overline{TA}, \overline{Ta})\mathbf{l}, [\overline{TB}, \overline{Tb}] = (\overline{TB}, \overline{Tb})\mathbf{l},$$

$$[\overline{TC}, \overline{Tc}] = (\overline{TC}, \overline{Tc})\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ – вектор перпендикулярный плоскости P. Тогда имеется единичный вектор $\mathbf{e} \in P$ с $(\overline{Aa}, \mathbf{e}) = (\overline{Bb}, \mathbf{e}) = (\overline{Cc}, \mathbf{e})$.

Kovalev M. D. On equi-angular points.

A point T is an *equi-angular point* of a collection of localized vectors if all of them are seen from T at an equal oriented angle. It is proved that almost all triples of vectors in the plane with fixed origins (not all of which coincide) have an euqi-angular point. As a consequence, it is proved that if a triple of vectors in the plane has no equi-angular point, then their projections to a certain axis are equal.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: kovalev.math@ mtu.net.ru

Поступило 13 января 2003 г.