Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

Т. В. Лейкина

МОДУЛИ ЗАЦЕПЛЕНИЙ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ КОМПОНЕНТАМИ

§1. Определения и формулировки результатов

1.1. Введение. В настоящей работе изучаются модули многомерных двухкомпонентных зацеплений коразмерности 2 с пересекающимися компонентами. Такие зацепления, как и "обычные" многомерные зацепления коразмерности 2, возникают при обобщении понятия одномерных зацеплений на высшие размерности.

Под классическим (т.е. одномерным) m-компонентным зацеплением понимается набор из m непересекающихся (или, что то же самое, трансверсально пересекающихся) окружностей, гладко вложенных в трехмерную сферу S^3.

Традиционное обобщение классических зацеплений на высшие размерности ограничивается частным случаем трансверсальности: компоненты не должны пересекаться, т.е. *m-компонентное зацепление размерности n – это гладкое подмногообразие L сферы S^{n+2}, диффеоморфное несвязной сумме m экземпляров n-мерной сферы S^n. Если потребовать, чтобы в высших размерностях гладко вложенные в S^{n+2} n-мерные сферы попарно трансверсально пересекались непустым образом, то мы получим объект, родственный с "обычными" многомерными зацеплениями, но, разумеется, во многом отличающийся от них. В этой работе мы будем рассматривать самые простые зацепления такого вида: компонент всего 2, и их пересечение также является сферой.*

Определение 1.1. n-Мерным зацеплением с пересекающимися компонентами (сокращённо, I-зацеплением (от intersection)) назовем объединение K двух гладких трансверсально пересекающихся подмногообразий K_1 и K_2 сферы S^{n+2} таких, что каждое из K_1 и K_2 диффеоморфно сфере S^n, а их пересечение $k = K_1 \cap K_2$ диффеоморфно сфере S^{n-2}.

По аналогии с обычными зацеплениями, для I-зацеплений естественным образом определяются несколько отношений эквивалентности: объемлемая изотопия, изотопия, кобордизм. Наиболее строгим из них является объемлемая изотопия.

Определение 1.2. Два n-мерных I-зацепления K и K' называются *объемлемо изотопными*, если существует такой диффеоморфизм $F: S^{n+2} \times I \to S^{n+2} \times I$, что

(1) $F(S^{n+2} \times \{\alpha\}) \subset S^{n+2} \times \{\alpha\}$ для любого $\alpha \in I$;
(2) $F|_{S^{n+2} \times \{0\}} = \mathrm{id}$;
(3) $F(K \times \{1\}) = K'$.

Важнейшими алгебраическими инвариантами объемлемой изотопии для зацеплений являются модули гомологий максимального абелева накрывающего пространства над дополнением зацепления в S^{n+2} (модули зацепления). В случае многомерных однокомпонентных зацеплений (узлов) эти модули усилиями ряда авторов (библиографию см., напр, в [3]) изучены практически полностью. Типичные модули многокомпонентных зацеплений охарактеризованы в [2]. В данной работе определяются и изучаются аналогичные инварианты I-зацеплений.

1.2. Модули I-зацеплений. Пусть

$$TK = (K_1 \times D_1^2) \cup (K_2 \times D_2^2)$$

– регулярная окрестность I-зацепления K (здесь D_1^2 и D_2^2 – стандартные двумерные диски). *Внешностью* I-зацепления K назовем многообразие X, полученное из замыкания $\overline{S^{n+2} \setminus TK}$ дополнения TK в сфере S^{n+2} сглаживанием углов. Легко видеть, что

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq H_1(\partial X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

и гомоморфизм включения

$$\mathrm{in}_* : H_1(\partial X; \mathbb{Z}) \to H_1(X; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом. Фиксируем в группе $H_1(\partial X; \mathbb{Z})$ образующие s и t, представляемые окружностями $x_1 \times \partial D_1^2$ и $x_2 \times \partial D_2^2$ соответственно, где $x_i \in K_i \setminus (k \times D_{3-i}^2)$. Для образующих $\mathrm{in}_*(s)$ и $\mathrm{in}_*(t)$ группы $H_1(X; \mathbb{Z})$ также будем использовать обозначения s и t.

Пусть $\overline{X}$ – максимальное абелево накрывающее многообразия X. Тогда, очевидно, его край $\partial\overline{X}$ является максимальным абелевым накрывающим края ∂X многообразия X, причём отображение накрытия $p_\partial : \partial\overline{X} \to \partial X$ является сужением накрывающего отображения $p : \overline{X} \to X$. Группы монодромии обоих накрытий изоморфны $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, так что группы гомологий $H_*(\overline{X};\mathbb{Z})$, $H_*(\overline{X}, \partial\overline{X};\mathbb{Z})$, $H_*(\partial\overline{X};\mathbb{Z})$ несут структуру модулей над кольцом $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]$.

Определение 1.3. Будем называть $\mathbb{Z}[\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}]$-модули $H_*(\overline{X};\mathbb{Z})$, $H_*(\overline{X}, \partial\overline{X};\mathbb{Z})$ и $H_*(\partial\overline{X};\mathbb{Z})$ (абсолютными) модулями I-зацепления, относительными модулями I-зацепления и модулями края I-зацепления, соответственно.

В данной работе описываются также группы $H_*(\overline{X};k)$, $H_*(\overline{X}, \partial\overline{X};k)$, $H_*(\partial\overline{X};k)$, где k – поле, являющиеся, очевидно $k[\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}]$-модулями.

1.3. Модули типа K. Обозначим через Λ кольцо $\mathbb{A}[\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}] = \mathbb{A}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]$, где $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$ (p – простое число), через Λ_s и Λ_t – его подкольца $\mathbb{A}[\mathbb{Z}_s]$ и $\mathbb{A}[\mathbb{Z}_t]$ соответственно, где $\mathbb{Z}_s$ и $\mathbb{Z}_t$ - подгруппы группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденные образующими s и t соответственно. Пусть $\mathcal{R}$ - одно из колец Λ, Λ_s, Λ_t.

Определение 1.4. Конечнопорожденный модуль H над кольцом $\mathcal{R}$ будем называть модулем *типа* K, если существует такой элемент $p \in \mathcal{R}$, что $\varepsilon(p) = 1$ и $pH = 0$, где $\varepsilon : \mathcal{R} \to \mathbb{A}$ – аугментация (сумма коэффициентов) (ср. [3]).

Будем говорить, что Λ-модуль H имеет *тривиальную* Λ_s (соответственно, Λ_t)-*модульную* структуру, если $(s-1)H = 0$ (соответственно, $(t-1)H = 0$). Модуль H имеет тривиальную Λ-модульную структуру, если он имеет тривиальные Λ_s- и Λ_t-модульные структуры.

Теорема 1.5. *Пусть X – внешность n-мерного I-зацепления K, $n > 3$. Тогда*

(1) $H_i(\overline{X};\mathbb{A})$ *является модулем типа K при* $1 \leqslant i \leqslant n+1$;
$H_0(\overline{X};\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ *с тривиальной Λ-модульной структурой;*
$H_{n+2}(\overline{X};\mathbb{A}) = 0$.

(2) $H_i(\overline{X}, \partial\overline{X};\mathbb{A})$ *является модулем типа K при* $1 \leqslant i \leqslant n-1$ *и при* $i = n+1$;
имеет место короткая точная последовательность Λ-модулей

$$0 \to H_n(\overline{X};\mathbb{A}) \to H_n(\overline{X}, \partial\overline{X};\mathbb{A}) \to \mathbb{A} \to 0,$$

где модуль $\mathbb{A}$ имеет тривиальную Λ-структуру.
$H_0(\overline{X}, \partial\overline{X}; \mathbb{A}) = H_{n+2}(\overline{X}, \partial\overline{X}; \mathbb{A}) = 0.$

(3) $H_i(\partial\overline{X}; \mathbb{A}) = H_i^s \oplus H_i^t$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n-2$, *где* H_i^s *является* Λ_s-*модулем типа* K, *а* H_i^t *является* Λ_t-*модулем типа* K;
$H_0(\partial\overline{X}; \mathbb{A}) = H_{n-1}(\partial\overline{X}; \mathbb{A}) = \mathbb{A}$ *с тривиальной* Λ-*модульной структурой;*
$H_n(\partial\overline{X}; \mathbb{A}) = H_{n+1}(\partial\overline{X}; \mathbb{A}) = 0.$

Замечание 1.6. С I-зацеплением естественно связана четвёрка узлов (K_1, K_2, k_1, k_2). K_1 и K_2 – это n-мерные узлы, представляемые компонентами I-зацепления, а k_1 и k_2 – это $(n-2)$-мерные узлы, представляемые $(n-2)$-мерной сферой $k = K_1 \cap K_2$ в n-мерных сферах K_1 и K_2 соответственно. Вопрос о реализации четвёрки узлов (K_1, K_2, k_1, k_2) I-зацеплением рассматривался в работах [4–6]. Прямые слагаемые H_i^s и H_i^t, в которые раскладывается модуль $H_i(\partial\overline{X}; \mathbb{A})$ (см. п. (3) теоремы 1.5), являются модулями узлов k_2 и k_1 соответственно, что будет ясно из доказательства.

Замечание 1.7. Модули узлов (см. [1, 3]), зацеплений (см. [2]) и I-зацеплений (см. п. (1) теоремы 1.5 выше) являются модулями типа K. Для модулей узлов это практически единственное условие: любой $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-модуль типа K реализуется как i-й модуль n-мерного узла, если $2 \leqslant i \leqslant n-1$ и $i \neq [\frac{n+1}{2}]$ (см. [3]). Модули зацеплений удовлетворяют гораздо более жестким ограничениям: при $2 \leqslant i \leqslant n-1$ гомологическая размерность над кольцом $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^m]$ i-го модуля m-компонентного зацепления не превосходит 2, а над кольцом $k[\mathbb{Z}^m]$ (k – поле) – не превосходит 1 (см. [2]). Модули I-зацеплений в этом смысле больше похожи на модули узлов, чем зацеплений: как будет показано в следующей работе, любой $k[\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}]$-модуль типа K реализуем как модуль некоторого I-зацепления.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1.5.

§2. Предварительные леммы

Нам понадобится следующее известное утверждение (ср. [3]).

Лемма 2.1. *Пусть* (X, Y) – *клеточная пара (в частности,* Y *может быть пустым) и* $p : (\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \to (X, Y)$ – *накрытие с группой* *скольжения $\mathbb{Z}^m$. Тогда, если $H_i(X,Y;\mathbb{A})=0$, то $H_i(\widetilde{X},\widetilde{Y};\mathbb{A})$ является $\mathbb{A}[\mathbb{Z}^m]$-модулем типа K.*

Пусть $\widetilde{C}$ и C – цепные комплексы пар $(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ и (X,Y), соответственно. Тогда, очевидно, существует цепной гомоморфизм $\varepsilon:\widetilde{C}\to C$ (аугментация), являющийся эпиморфизмом, и лемма 2.1 следует из более общего утверждения:

Лемма 2.2. *Пусть*

$$\Lambda_{k+1}=\mathbb{A}[\mathbb{Z}^{k+1}]=\mathbb{A}[t_1^{\pm1},\dots t_{k+1}^{\pm1}],\quad \Lambda_k=\mathbb{A}[\mathbb{Z}^k]=\mathbb{A}[t_1^{\pm1}\dots t_k^{\pm1}].$$

Пусть C_{k+1}, C_k – цепные комплексы конечнопорождённых свободных модулей над Λ_{k+1} и Λ_k соответственно, и $\varepsilon_{k+1}:C_{k+1}\to C_k$ – цепной гомоморфизм, индуцированный проекцией $\Lambda_{k+1}\xrightarrow{t_{k+1}=1}\Lambda_k$. Тогда если $H_i(C_k)$ является Λ_k-модулем типа K, то $H_i(C_{k+1})$ является Λ_{k+1}-модулем типа K.

Доказательство. Гомоморфизм ε_{k+1} включается в короткую точную последовательность цепных комплексов:

$$0\to C_{k+1}\overset{\cdot(t_{k+1}-1)}{\to}C_{k+1}\overset{\varepsilon_{k+1}}{\to}C_k\to 0\ ,$$

индуцирующую длинную гомологическую последовательность:

$$\dots\to H_{i+1}(C_k)\to H_i(C_{k+1})\overset{\cdot(t_{k+1}-1)}{\to}H_i(C_{k+1})\overset{\varepsilon_{k+1}}{\to}H_i(C_k)\to\dots$$

Далее, $H_i(C_k)$ является модулем типа K, значит, существует $p\in\Lambda_k$ такой, что $\varepsilon(p)=1$ и $pH_i(C_k)=0$. Следовательно, для любого $a\in H_i(C_{k+1})$ элемент $pa\in\operatorname{Ker}(\varepsilon_{k+1})=\operatorname{Im}(\cdot(t_{k+1}-1))$, и, следовательно, существует $b\in H_i(C_{k+1})$ такой, что $(t_{k+1}-1)b=pa$.

Пусть $a_1,\dots,a_n$ – образующие модуля $H_i(C_{k+1})$. Тогда существует $(n\times n)$-матрица (p_{ij}) с элементами из кольца Λ_{k+1} такая, что

$$pa_i=\sum_{j=1}^n p_{ij}a_j\qquad\text{для всех}\quad i=1,\dots,n$$

или

$$\sum_{j=1}^n\gamma_{ij}a_j=0,\ \text{ где }\ \gamma_{ij}=\begin{cases}(t_{k+1}-1)p_{ij}-p & \text{при } i=j,\ i=1,\dots,n,\\ (t_{k+1}-1)p_{ij} & \text{при } i\neq j,\ i,j=1,\dots,n.\end{cases}$$

Очевидно, $\det(\gamma_{ij})H_i(C_{k+1})=0$ и $\varepsilon(\det(\gamma_{ij}))=(-1)^n$. Следовательно, $(-1)^n\det(\gamma_{ij})$ и есть искомый многочлен. $\square$

Лемма 2.3. *Если в короткой точной последовательности Λ-модулей*

$$0 \to L \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} M \to 0$$

L и M – модули типа K, то и H – модуль типа K.

Доказательство. Пусть модули L и M являются модулями типа K. Тогда существуют $p, q \in \Lambda$ такие, что $\varepsilon(p) = \varepsilon(q) = 1$ и $pL = qM = 0$.

Для любого $a \in H$ элемент $qa \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$. Следовательно, существует $b \in L$ такой, что $f(b) = qa$, но $pb = 0$, значит, $pqa = 0$. $\varepsilon(pq) = \varepsilon(p)\varepsilon(q) = 1$. Следовательно, pq – искомый многочлен. $\square$

§3. Доказательство п. (3) теоремы 1.5

Всюду ниже все группы гомологий рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{A}$.

Рассмотрим внешности $Y_i = K_i \setminus Tk_i$ $(i = 1,\ 2)$ $(n-2)$-мерных узлов k_1 и k_2, представляемых вложениями многообразия $k = K_1 \cap K_2$ в многообразия K_1 и K_2, соответственно, и рассмотрим их максимальные абелевы накрытия $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_2$ с группами монодромии $\mathbb{Z}_t$ и $\mathbb{Z}_s$ соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\partial X \simeq (Y_1 \times S^1_s) \cup_{S^{n-2} \times T^2} (Y_2 \times S^1_t),$$

$$\partial \overline{X} \simeq (\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \cup_{S^{n-2} \times \mathbb{R}^2} (\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t),$$

где

$$T^2 = S^1_s \times S^1_t, \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1_s \times \mathbb{R}^1_t;$$

$$p_s : \mathbb{R}^1_s \to S^1_s \quad \text{и} \quad p_t : \mathbb{R}^1_t \to S^1_t$$

– соответствующие $\mathbb{Z}$-накрытия.

Отметим, в частности, что если узлы k_1 и k_2 тривиальны, то $Y_i \simeq D^{n-1} \times S^1$, и тогда $\partial X \simeq S^{n-1} \times T^2$, а $\partial \overline{X} \simeq S^{n-1} \times \mathbb{R}^2$.

Аддиционная последовательность триады $(\overline{X}; \overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s, \overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t)$ устанавливает связь между гомологиями пространства $\partial\overline{X}$ и модулями гомологий пространств $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_2$, являющимися, по известной теореме Дж. Левина, модулями типа K над кольцами Λ_t и Λ_s, соответственно:

$$\ldots \to H_{i+1}(\partial\overline{X}) \to H_i(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to H_i(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_i(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) \to$$
$$\to H_i(\partial\overline{X}) \to H_{i-1}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to \ldots$$

При $1 < i < n-2$ модули $H_i(S^{n-2})$ и $H_{i-1}(S^{n-2})$ – нулевые. Следовательно, при $1 < i < n-2$ имеет место изоморфизм

$$H_i(\partial\overline{X}) \simeq H_i(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_i(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t).$$

Для $n-2 \leqslant i \leqslant n+1$ имеем точную последовательность:

$$\begin{gathered} 0 \to H_{n+1}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_{n+1}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) \to H_{n+1}\partial\overline{X} \to H_n(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to \\ \to H_n(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_n(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) \to H_n\partial\overline{X} \to H_{n-1}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to \\ \to H_{n-1}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_{n-1}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) \to H_{n-1}\partial\overline{X} \to \\ \to H_{n-2}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} H_{n-2}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_{n-2}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) \to \\ \to H_{n-2}\partial\overline{X} \to H_{n-3}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) = 0. \end{gathered}$$

Здесь $H_{n+1}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) = H_{n+1}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) = 0$, так как пространства Y_1 и Y_2 имеют размерность n;

$$H_n(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) = H_n(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) = H_{n-1}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) = H_{n-1}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t) = 0,$$

поскольку это модули n-мерных узлов (см. [3]). Кроме того,

$$H_n(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) = H_{n-1}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) = 0.$$

Таким образом, $H_n(\partial\overline{X}) = H_{n+1}(\partial\overline{X}) = 0$.

Гомоморфизм

$$\mathrm{in}_* : H_{n-2}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to H_{n-2}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_{n-2}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t)$$

представляет собой разность гомоморфизмов

$$\mathrm{in}_1 : H_{n-2}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to H_{n-2}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s)$$

и

$$\mathrm{in}_2 : H_{n-2}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \to H_{n-2}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t).$$

Поскольку $H_{n-2}(S^{n-2} \times \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{A}$ с тривиальной Λ-структурой, а $H_{n-2}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s)$ является Λ_t-модулем типа K, и $H_{n-2}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t)$ является Λ_s-модулем типа K, то оба гомоморфизма in_1 и in_2 – нулевые, и мы получаем изоморфизмы:

$$\begin{aligned} &H_{n-2}(\partial\overline{X}) \simeq H_{n-2}(\overline{Y}_1 \times \mathbb{R}^1_s) \oplus H_{n-2}(\overline{Y}_2 \times \mathbb{R}^1_t); \\ &H_{n-1}(\partial\overline{X}) \simeq \mathbb{A} \quad \text{с тривиальной } \Lambda\text{-структурой.} \end{aligned}$$

Все пространства S^{n-2}, $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$ и $\partial\overline{X}$ линейно связны, поэтому

$$H_0(S^{n-2}\times\mathbb{R}^2)\simeq H_0(\overline{Y}_1\times\mathbb{R}^1_s)\simeq H_0(\overline{Y}_2\times\mathbb{R}^1_t)\simeq H_0(\partial\overline{X})\simeq\mathbb{A}$$

с тривиальной Λ-структурой, и последовательность

$$\ldots\to H_1(S^{n-2}\times\mathbb{R}^2)\to H_1(\overline{Y}_1\times\mathbb{R}^1_s)\oplus H_1(\overline{Y}_2\times\mathbb{R}^1_t)\to H_1\partial\overline{X}\to$$
$$\to H_0(S^{n-2}\times\mathbb{R}^2)\to H_0(\overline{Y}_1\times\mathbb{R}^1_s)\oplus H_0(\overline{Y}_2\times\mathbb{R}^1_t)\to H_0\partial\overline{X}\to 0$$

распадается на короткую точную последовательность

$$0\to\mathbb{A}\to\mathbb{A}\oplus\mathbb{A}\to\mathbb{A}\to 0$$

и изоморфизм

$$H_1(\partial\overline{X})\simeq H_1(\overline{Y}_1\times\mathbb{R}^1_s)\oplus H_1(\overline{Y}_2\times\mathbb{R}^1_t).$$

§4. Доказательство п. (1) и (2) теоремы 1.5

Пусть X – внешность n-мерного I-зацепления K, $p:(\overline{X},\partial\overline{X})\to(X,\partial X)$ – максимальное абелево накрытие. Легко видеть, что

$$H_i(X;\mathbb{A})=\begin{cases}\mathbb{A}, & i=0,\ 2,\\ \mathbb{A}\oplus\mathbb{A}, & i=1,\\ 0, & i>2\end{cases}$$

$$H_i(X,\partial X;\mathbb{A})=\begin{cases}\mathbb{A}, & i=n,\ n+2,\\ \mathbb{A}\oplus\mathbb{A}, & i=n+1,\\ 0, & i=0,\ldots,n-1.\end{cases}$$

Поэтому применение леммы 2.1 в случае, когда $\widetilde{X}=\overline{X}$, а $\widetilde{Y}=\emptyset$ (соответственно, $\widetilde{Y}=\partial\overline{X}$), дает нам доказательство п. (1) теоремы 1.5 для $3\leqslant i\leqslant n+1$ (п. (2) теоремы 1.5 для $1\leqslant i\leqslant n-1$, соответственно).

Очевидно, $H_0(\overline{X})=\mathbb{A}$ с тривиальной Λ-модульной структурой, $H_0(\overline{X},\partial\overline{X})=0$.

Для вычисления модулей $H_1(\overline{X})$ и $H_2(\overline{X})$ напишем соответствующую часть гомологической последовательности пары $(\overline{X},\partial\overline{X})$:

$$\ldots\to H_2(\partial\overline{X})\overset{\mathrm{in}_{*2}}{\to}H_2(\overline{X})\overset{\mathrm{rel}_2}{\to}H_2(\overline{X},\partial\overline{X})\to$$

$$\to H_1(\partial\overline{X}) \overset{\mathrm{in}_{*1}}{\to} H_1(\overline{X}) \overset{\mathrm{rel}_1}{\to} H_1(\overline{X}, \partial\overline{X}) \to \dots$$

Так как модули $H_i(\partial\overline{X})$ и $H_i(\overline{X}, \partial\overline{X})$ при $i = 1,\ 2$ являются модулями типа K, то, по лемме 2.3, подмодули $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{*i}) \subset H_i(\overline{X})$ и фактор-модули $H_i(\overline{X})/\,\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{*i})$ являются модулями типа K. Следовательно, и сами $H_i(\overline{X})$ являются модулями типа K $(i = 1,\ 2)$.

Осталось доказать утверждение теоремы 1.5 для модулей $H_{n+2}(\overline{X})$, $H_{n+2}(\overline{X}, \partial\overline{X})$, $H_{n+1}(\overline{X}, \partial\overline{X})$ и $H_n(\overline{X}, \partial\overline{X})$. Рассмотрим другую часть гомологической последовательности пары $(\overline{X}, \partial\overline{X})$:

$$\dots \to H_{n+2}(\partial\overline{X}) \to H_{n+2}(\overline{X}) \to H_{n+2}(\overline{X}, \partial\overline{X}) \to$$

$$\to H_{n+1}(\partial\overline{X}) \to H_{n+1}(\overline{X}) \to H_{n+1}(\overline{X}, \partial\overline{X}) \to$$

$$\to H_n(\partial\overline{X}) \to H_n(\overline{X}) \to H_n(\overline{X}, \partial\overline{X}) \to$$

$$\to H_{n-1}(\partial\overline{X}) \overset{\mathrm{in}_{*n-1}}{\longrightarrow} H_{n-1}(\overline{X}) \to \dots$$

Здесь $H_{n+2}(\overline{X}) = 0$, так как $\overline{X}$ является гладким многообразием с краем; $H_{n+1}(\partial\overline{X}) = 0$ по п. (1). Следовательно, и $H_{n+2}(\overline{X}, \partial\overline{X}) = 0$.

$H_n(\partial\overline{X}) = 0$, следовательно модуль $H_{n+1}(\overline{X}, \partial\overline{X})$ изоморфен модулю $H_{n+1}(\overline{X})$, являющемуся модулем типа K.

$H_{n-1}(\partial\overline{X}) = \mathbb{A}$ с тривиальной Λ-структурой, а $H_{n-1}(\overline{X})$ является модулем типа K, следовательно, $\mathrm{in}_{*n-1} = 0$, и для модуля $H_n(\overline{X}, \partial\overline{X})$ получаем короткую точную последовательность:

$$0 \to H_n(\overline{X}) \to H_n(\overline{X}, \partial\overline{X}) \to \mathbb{A} \to 0.$$

Литература

1. M. Kervaire, *Les noeuds de dimensions superieures.* — Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 225–271.
2. В. Л. Кобельский, *Модули двухкомпонентных зацеплений коразмерности* 2. — Алгебра и анализ, **1**, No. 3 (1989), 160.
3. J. Levine, *Knot modules.* — Trans. AMS **229** (1977), 1–50.
4. E. Ogasa, *The intersection of spheres in a sphere and a new geometric meaning of Arf invariant.* — arXiv.math.gt (2000).
5. E. Ogasa, *Intersectional pairs of n-knots, local moves of n-knots, and their associated invariants of n-knots.* — Math. Res. Let. **5** (1998), 577–582.
6. E. Ogasa, *On the intersection of spheres in a sphere* II *(high dimensional case).* — University of Tokyo, preprint (1995).

Leikina T. V. Modules of links with intersecting components.

An I-link K is the union of two n-spheres smoothly embedded in S^{n+2} and transversally intersecting along a smoothly embedded $(n-2)$-sphere. The homologies of the universal Abelian cover of the exterior of K regarded as modules over the group ring $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}]$ are studied.

Российский
государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

E-mail: tanvov@ mail.ru

Поступило 8 января 2003 г.